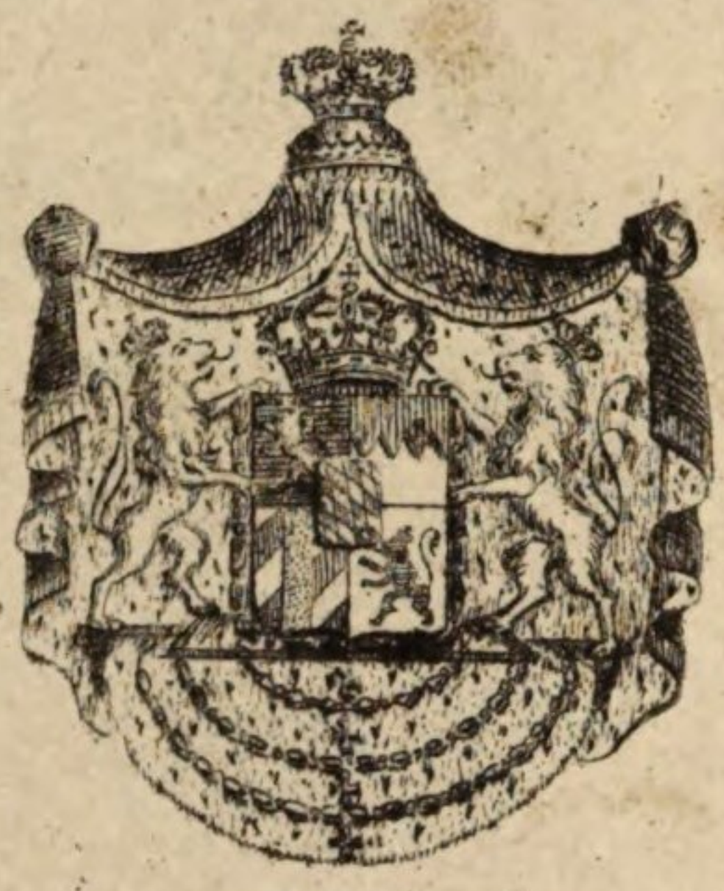
Math. 4°
382 ℳ - 2
Ohm



BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

<36635608670011

<36635608670011

Bayer. Staatsbibliothek

Lehrbuch

der

gesammten höhern Mathematik

in zwei Bänden.

Zum Gebrauche für die oberen Klassen der Gymnasien und anderen höheren Lehr-Anstalten, so wie zum Selbstunterrichte

bearbeitet

und mit vielen Uebungs-Beispielen versehen

vom

Professor Dr. Martin Ohm,

an der Königl. Friedrich-Wilhelms-Universität, an der Königl. Allgemeinen Kriegsschule, so wie auch an der Königl. vereinigten Artillerie- und Ingenieur-Schule zu Berlin; der Kaiserl. Russischen Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg, der Königl. Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München, und mehrerer anderen gelehrten Gesellschaften correspond. Mitglied.

Zweiter Band,

die Integral-Rechnung, die Variations-Rechnung, die endliche Summen- und Differenzen-Rechnung und deren Anwendungen auf Geometrie und Analysis enthaltend.

Jeder Band mit einer Figurentafel.

Leipzig 1839.

Bei Friedrich Volckmar.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vorrede.

Der Verfasser benutzt diese Gelegenheit, um nachträglich noch auf die Auflösungs-Methode der numerischen höhern Gleichungen aufmerksam zu machen, welche Professor Gräffe in Zürich in seiner Schrift: „Die Auflösung der höhern numerischen Gleichungen. Zürich 1837.“ mitgetheilt hat, und welche man in dem „Berliner astronomischen Jahrbuche für 1841“ von Encke noch verbessert vorfindet. Sie gründet sich darauf, daß wenn α, β, γ, δ, ε, etc. etc. die gesuchten Wurzel-Werthe der gegebenen Gleichung vorstellen, und eine neue Gleichung gebildet wird, deren Koefficienten der Reihe nach durch — A, B, — C, D, — E, F, etc. etc. ausgedrückt seyn mögen, und deren Wurzel-Werthe bezüglich α^m, β^m, γ^m, δ^m, ε^m, etc. etc. sind, dann (wenn alle Wurzel-Werthe α, β, γ, δ, ε, etc. etc. reell und der Größe nach geordnet sind, so daß α die größeste ist),

$$\alpha = \sqrt[m]{A},\ \beta = \sqrt[m]{\frac{B}{A}},\ \gamma = \sqrt[m]{\frac{C}{B}},\ \delta = \sqrt[m]{\frac{D}{C}},\ \text{etc. etc.}$$

desto näher seyn wird, je größer m ist. — Aehnliches findet statt, wenn einige oder alle Wurzel-Werthe imaginär seyn sollten. — Diese Methode hat den großen

Vorzug a) daß sie die reellen Wurzel-Werthe direkt findet, und b) daß sie, nach dem von Encke hinzugefügten Verfahren, unter den bis jetzt bekannten Wegen, die imaginären Wurzel-Werthe zu finden, bei weitem den besten und ausführbarsten geliefert hat. — Solche hier näher zu beschreiben, kann jedoch nicht in dem Plane eines so kurz gefaßten Werkes liegen, weshalb wir uns damit begnügen, auf selbige aufmerksam gemacht zu haben, um so mehr, als die im ersten Bande mitgetheilte verbesserte Newton'sche Näherungs-Methode ihre anderweitigen Vorzüge hat, so lange die imaginären Wurzel-Werthe nicht verlangt werden.

Berlin, im August 1839.

M. Ohm.

Inhalt des zweiten Bandes

V. Höhere Analysis. Zweite Abtheilung. Integral-Rechnung.

Seite.

Erstes Kapitel. Integration entwickelt gegebener Funktionen eines einzigen Veränderlichen. . . . 3

§. 1. Begriff des Integrals $\int y \cdot dx$. 3

§. 2. Die Maclaurin'sche Reihe giebt eine allgemeine Integral-Formel. 3

§. 3. Allgemeines, — besonderes Integral. 5

§. 4. Die vier allgemeinen Hauptformeln für das Integriren. . . 5

§. 5. Zwölf einfachste Integrale. 7

§. 6. Noch fünfzehn zusammengesetztere Integrale, aus diesen einfachern gebildet. 8

§. 7. Integration der algebraischen rationalen ganzen Funktionen. . 14

§. 8. Integration der algebraischen rationalen gebrochenen Funktionen. 14

§. 9. Zerlegung der ächt gebrochenen Funktionen in ihre Partial-Brüche. 16

§. 10. Zerlegung einer gebrochenen Funktion in ihre doppelten Partial-Brüche. 22

§. 11. Direkte Integration der doppelten Partial-Brüche. . . . 24

§. 12. Integration der irrationalen Funktionen I. $\sqrt{a+bx}$, II. $\sqrt{a+bx+cx^2}$, III. $\sqrt{a+bx}$ und $\sqrt{p+qx}$. IV. Ellipt. Transcendenten. 31

§. 13. Reduktionsformeln für solche Integrale, welche $\sqrt{a+bx+cx^2}$ enthalten. 40

§. 14. Integration des irrationalen Binomiums $x^{m-1}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}} \cdot dx$ oder $(ax+b)^m(px+q)^n \cdot dx$. 42

§. 15. Integration einiger logarithmischen Funktionen. 51

§. 16. Integration einiger Exponential-Funktionen. 54

§. 17. Integration von trigonometrischen Funktionen. 57

§. 18. Integration durch unendliche Reihen. 66

Seite.

Zweites Kapitel. Eigenschaften der besondern und bestimmten Integrale. 73

§. 19. Mit x = a anfangendes; mit x = b aufhörendes; bestimmtes Integral. 73

§. 20. $\int_{b\div a} y \cdot dx$ ist die Summe aller Differentialien von x = a an bis x = b hin. 77

§. 21. Formeln zur Näherungs-Berechnung bestimmter Integrale. . 79

§. 22. Die Formeln des §. 4. für Integrale, die mit x = a anfangen. 81

§. 23. In wie fern die Ordnung des Differenziirens und Integrirens vertauscht werden kann. 83

§. 24. Noch fünf allgemeine Sätze über bestimmte Integrale. . . 84

§. 25. Der Taylor'sche und Maclaurin'sche Lehrsatz nebst den Grenzen, zwischen denen das Ergänzungs-Glied liegen muß, wenn die Reihen irgend wo abbrechen. 86

§. 26. Näherungs-Berechnung eines bestimmten Integrals mit Bestimmung der Grenzen des Fehlers. 89

VI. Zweite Reihe der Anwendungen der höhern Analysis.

Drittes Kapitel. Rektifikation der Kurven überhaupt, und Quadratur der ebenen Kurven. . . . 93

§. 27. Quadratur ebener Kurven mittelst rechtwinklicher Koordinaten. 93

§. 28. Quadratur ebener Kurven mittelst Polar-Koordinaten. . . . 106

§. 29. Rektifikation der ebenen Kurven und auch der Kurven doppelter Krümmung. 108

§. 30. Wie durch Rektifikation des Kreises bewiesen wird, daß die Werthe der allgemeinen Sinus und Kosinus-Reihen, die, unter denselben Namen geschichtlich bekannten Linien im Kreise ausdrücken, dessen Radius 1 ist. 111

§. 31. Quadratur, Rektifikation, auch sonstige Eigenschaften der Cykloide. 115

Viertes Kapitel. Kubatur der Körper und Quadratur ihrer Oberflächen §.§. 32. 33. 120

§. 32. Kubatur der Körper. 120

§. 33. Quadratur ihrer Oberflächen. 128

VII. Höhere Analysis. Dritte Abtheilung. Fortsetzung der Integral-Rechnung.

Fünftes Kapitel. Von der Integration der Differential-Funktionen und der totalen Differential-Gleichungen, vorzüglich mit zwei Veränderlichen. . 133

§. 34. Differential-Funktion, Differential-Gleichung definirt. . . . 133

§. 35. Integral einer Differential-Funktion definirt. 134

Seite.

§. 36. Bedingungs-Gleichungen der Integrabilität. I. Bei $M+N\cdot\partial y_x$. II. Bei $M+N\cdot\partial y_x+P\cdot\partial z_x$. 137

§. 37. Integral einer Differential-Gleichung definirt. 141

§. 38. Jede Differential-Gleichung der n^{ten} Ordnung hat n erste Integrale, und ein Ur-Integral mit n willkührlichen Constanten, mit Ausnahme der singulären Werthe. 142

§. 39. Integration einer jeden Gleichung der n^{ten} Ordnung mittelst des Maclaurin'schen Lehrsatzes. 144

§. 40. Integrations-Methoden für Differential-Gleichungen der ersten Ordnung zwischen zwei Veränderlichen x und y. I. Direkte Integration. II. Methode des integrirenden Faktors. III. Trennung der Veränderlichen. IV. Einführung neuer Veränderlichen. V. Einen neuen Veränderlichen p dadurch eingeführt, daß man $\partial y_x = p$ setzt. 145

§. 41. Integration der Differential-Gleichungen der zweiten und höhern Ordnungen zwischen zwei Veränderlichen (in endlicher Form). 161

§. 42. Integration der lineären Gleichungen aller Ordnungen. . . 170

§. 43. Integration zweier oder mehrerer gleichzeitig gegebener (totaler) Differential-Gleichungen. 179

§. 44. Die d'Alembert'sche Methode zur Integration mehrerer gleichzeitig gegebener (totaler) lineären Differential-Gleichungen. . 186

§. 45. Von den singulären Werthen. 190

§. 46. Integration durch unendliche Reihen. 197

§. 47. Ueber die Bestimmung der Constanten in den verschiedenen Anwendungen der gefundenen Integrale. 200

Sechstes Kapitel. Von der Integration der Gleichungen zwischen drei und mehr Veränderlichen, sowohl der totalen als auch der Partial-Gleichungen. 202

Erster Abschnitt. Integration der totalen Gleichungen. . . . 202

§. 48. Integration der Gleichung $P\cdot\partial x+Q\cdot\partial y+R\cdot\partial z=0$. Bedingungs-Gleichung ihrer Integrabilität und der Existenz eines integrirenden Faktors und eines Integrals. 202

§. 49. Wenn sie kein Integral hat, so kann man zwei Ur-Gleichungen mit einer willkührlichen Funktion finden, welche ihr genügen. 206

Zweiter Abschnitt. Integration der Partial-Gleichungen. . 207

§. 50. Integration der lineären Partial-Gleichungen der ersten Ordnung. 207

§. 51. Integration der nicht lineären Partial-Gleichungen der ersten Ordnung. 211

§. 52. Allgemeine Betrachtungen über die Partial-Gleichungen der ersten Ordnung. 216

§. 53. Ueber die Integrale der Partial-Gleichungen der zweiten Ordnung in endlicher Form. 218

Seite.

§. 54. Fortsetzung. Beispiele der Integration. 220
§. 55. Integration mittelst unendlicher Reihen. 225

Siebentes Kapitel. Geometrische Aufgaben. . . 231
§. 56. Aufgaben, welche zu totalen Differential-Gleichungen führen. 231
§. 57. Aufgaben, welche zu Partial-Differential-Gleichungen führen. 250

Achtes Kapitel. Noch einiges über bestimmte Integrale; als Fortsetzung des zweiten Kapitels. . . 262

§. 58—§. 63. Methoden zur Auswerthung von Integralen zwischen völlig bestimmten in Ziffern-Werthen gegebenen Grenzen, 0 und ∞, oder $-\infty$ und $+\infty$, oder 0 und 1, oder 0 und $\frac{1}{2}\pi$; u. s. f. 262

VIII. Höhere Analysis. Vierte Abtheilung. Die Variationsrechnung und die allgemeinste Lehre vom Größten und Kleinsten.

Neuntes Kapitel. Ganz allgemeine Methode zur Entwickelung in Reihen. 289

Erster Abschnitt. Entwickelung der Polynomial-Funktionen in Reihen. 289

§. 64. Erklärung der Bezeichnung. 290
§. 65. Es ist $\delta^a \partial^n = \partial^n \delta^a$ und $\delta^a \int = \int \delta^a$. 291
§. 66. Erste Haupt-Aufgabe, wo $V_x = V_{a_x}$. 292
§. 67. Zweite Haupt-Aufgabe, wo $V_x = V_{a_x, b_x}$. 295
§. 68. Wenn $V_{a_x, b_x} = 0$ ist. 296
§. 69. Wenn $V_x = V_{a_x, b_x}$ und noch $\varphi_{a_x, b_x} = 0$ ist. . . . 297
§. 70. Die Umkehrung der Reihen. 298
§. 71. Wenn $V_x = V_{b_x}$ und noch $\varphi_{a_x, b_x} = 0$ ist. 299
§. 72. Dritter Haupt-Lehrsatz, wo $V_x = V_{a_x, b_x, c_x}$ ist. . . . 300
§. 73. Wenn $V = 0$ ist, oder wenn $V = 0$ und noch $W = 0$ ist. 301
§. 74. Wenn in der Aufgabe des §. 72.) noch $\varphi_{a_x, b_x, c_x} = 0$, oder noch $\varphi = 0$ und $\psi = 0$ seyn sollte. 301
§. 75. Allgemeinere Haupt-Aufgabe, wenn V eine Funktion von beliebig viel solchen Reihen a_x, b_x, c_x, etc. ist. 302
§. 76. Noch allgemeinere Haupt-Aufgabe, wo $V_x = V_{a_x, b_x, y_x, z_x}$ und die Koefficienten von y_x, z_x, etc. selbst noch Funktionen von a_x, b_x werden. 304
§. 77. Besonderer Fall hiervon, wenn nur a_x allein, und nicht noch b_x vorkommt. 309

Seite.

Zweiter Abschnitt. Variations-Rechnung. 311

§. 78. Erklärung der n^{ten} Variationen und der Total-Variation. . 311

§. 79. Praktische Regel für die Entwickelung der Variationen. . . 312

Zehntes Kapitel. Die allgemeinste Lehre vom Größten und Kleinsten. 315

§. 80. Allgemeinste Aufgabe. 315

§. 81. Aufgaben, in denen die Funktion V eine Ur-Funktion oder eine Differential-Funktion ist. 318

§. 82. Wenn $V_x = \int_{b \div a} U_x \cdot dx$ ist. 324

§. 83. Wenn $V_x = \int_{b_x \div a_x} U_x \cdot dx$ ist. 330

§. 84. Wenn $V = \int U \cdot dx$, und U außer x noch y, z, etc. etc. enthält, und zwischen y und z, etc., noch eine (oder einige) Gleichung(en) gegeben seyn sollte. 333

IX. Höhere Analysis. Fünfte Abtheilung. Von den Differenz- und Summen-Reihen. Vom endlichen Differenziiren und vom endlichen Integriren. Von der Interpolation und von der Summation der Reihen. Von den Fourier'schen Reihen.

Eilftes Kapitel. Von den Differenz- und Summen-Reihen, namentlich von dem Verhalten ihrer Glieder zu einander im Allgemeinen. 343

§. 85. Erklärung der Differenz-Reihen. 343

§. 86. Bezeichnung ihrer Glieder. 344

§. 87. Erklärung der Summen-Reihen. 345

§. 88. Folgerungen. N. 6. Die Summe von n Gliedern irgend einer Reihe ist gleich der Differenz zwischen zweien, um eine Anzahl n von einander entfernten Gliedern der nächsten Summen-Reihe. 346

§§. 89. 90. Algorithmus zur einfachen und bequemen Bildung der Gleichungen zwischen den Gliedern der verschiedenen Reihen. . 349

§. 91. Anwendungen dieses Algorithmus; I. $u_{r+n} = (1+\Delta)^n \cdot u_r$; II. $\Delta^n u_r = (u_1 - 1)^n \cdot u_r$; III. $u_{r-n} = (1+\Delta u_{-1})^n \cdot u_r$. . 352

§. 92. Dieselben Formeln, wenn n negativ ist. 356

§. 93. Arithmetische Reihen der höhern Ordnung. 359

Anmerkung. Wenn sich eine Reihe einer arithmetischen Reihe höherer Ordnung nähert. 361

§. 94.—§. 97. Vergleichungen zweier Schemen von Ur- und Differenz- und Summen-Reihen mit einander, wenn die eine Ur-Reihe aus gleichweit von einander entfernten Gliedern der andern besteht. 362

Seite.

Zwölftes Kapitel. Von den endlichen Summen und Differenzen. 370

Erste Abtheilung. Uebertragung der vorstehenden allgemeinen Lehren auf eine besondere Reihe von Ausdrücken. 370

§. 98. Welche besondere Reihe von Gliedern hier allein betrachtet wird. 370

§. 99. Erklärung der endlichen Differenzen und des endlichen Integrals einer Funktion f_x. 373

§. 100. Auffindung des Δf_x mittelst des Taylor'schen Lehrsatzes. Man findet noch $\Delta^m f_x = \partial f_x \cdot h^m +$ etc. etc., so daß für h unendlich klein und $= dx$, $\Delta^m f_x$ mit dem m^{ten} Differential $d^m f_x$ zusammenfällt. 374

§. 101. Die Ur-Reihe deren allgemeines Glied f_x eine ganze Funktion von x vom m^{ten} Grade ist, ist allemal eine arithmetische Reihe der m^{ten} Ordnung. 376

§. 102. Die Formeln des §. 91.) auf die gegenwärtigen Reihen angewandt. 377

Zweite Abtheilung. Vom endlichen Differenziiren und vom endlichen Integriren einer Funktion f_x. 380

§. 103. Jedes endliche Integral erhält eine absolute oder periodische Constante.. 380

§. 104. Allgemeine Gesetze des endlichen Differenziirens und Integrirens. 382

§. 105. Differenzen und Integrale von x, 1, a^x und x^m. 383

§§. 106. 107. Von x^{mIh}, x^{mI-h}, $\left(\frac{x}{h}\right)_m$; dieselben auch für $h = 1$. 384

§. 108. Differenzen und Integrale von trigonometrischen Funktionen. 387

§. 109. $\Sigma(x^m)$ gefunden, wenn m positiv ganz ist. — Die Bernoulli'schen Zahlen. 389

§. 110. Das endliche Integral einer ganzen Funktion von x gefunden. 392

§. 111. Endliche Integrale von gebrochenen Funktionen. 393

§. 112. Endliche Integrale von transcendenten Funktionen. . . . 394

§. 113. Fortgesetzte theilweise Integration, um $\Sigma(P_x \cdot Q_x)$ zu finden. 398

§. 114. Der besondere Fall hiervon, wenn $P_x = a^x$ genommen wird. 399

§. 115. Verallgemeinerung des Weges des §. 109.) um $\Sigma(f_x)$ eben so ausgedrückt zu finden wie dort $\Sigma(x^m)$. 400

Dritte Abtheilung. Vom Integriren einer gegebenen endlichen Differenzen-Gleichung. 404

§. 116. Differenzen-Gleichung, Integral derselben definirt. . . . 404

Seite.

§. 117. Integration der linearen Differenzen-Gleichung $\Delta y + Py = Q$. 405

§. 118. Methode der Variation der Constanten, um von dem Integral der reducirten linearen Differenzen-Gleichung zu dem der vollständigen überzugehen. 408

§. 119. Die linearen Differenzen-Gleichungen mit constanten Koefficienten integrirt. 410

§. 120. Bestimmung der durch die Integration eingehenden willkührlichen periodischen Constanten. 411

§. 121. Integration von Differenzen-Gleichungen, in denen die Differenz des absolut Veränderlichen nicht constant ist. 414

§. 122. Behandlung einiger Gleichungen mit gemischten Differenzen. 416

Dreizehntes Kapitel. Einige Anwendungen der Differenzen-Rechnung. 418

Erste Abtheilung. Einiges über Berechnung von Tafeln mittelst des Differenzen-Kalkuls. 418

§. 123. Berechnung der Werthe von u_x für $x = \cdots -5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, \cdots$. 418

§. 124. Berechnung der Werthe von u_x für $x = 3;\ 3{,}1;\ 3{,}2;\ 3{,}3;\ 3{,}4$; etc. etc. 419

§. 125. Berechnung von Logarithmen-Tafeln. 420

§. 126. Berechnung von Sinus- und Kosinus-Tafeln. 423

§. 126bis. Berechnung der Logarithmen der Sinus und Kosinus in Tafeln. 425

Zweite Abtheilung. Von der Interpolation. 426

§. 127. Was Interpoliren ist. 426

§. 128. Man kann eine beliebige Funktion von x dazu verwenden. . 427

§. 129. Man nimmt gewöhnlich eine ganze Funktion von x, die Form des Laplace. 428

§. 130. Dieselbe etwas umgeändert. 429

§. 131. Die Form des Lagrange. 430

§. 132. Wie die Form des Laplace zur möglichst genauen Rechnung gebraucht wird. 432

§. 133. Wenn die zu benutzenden Werthe von x, eine arithmetische Reihe bilden. 434

§. 134. Wenn Glieder genau in die Mitte zwischen zwei gegebenen interpolirt werden sollen. 436

Dritte Abtheilung. Von der Summation der Reihen. . . 437

§. 135. Die Summe einer Reihe $f_x + f_{x+h} + f_{x+2h} + \cdots + f_{x+(n-1)h}$ ist allemal das zwischen den Grenzen x und $x+nh$ genommene endliche Integral von f_x 437

§. 136. Das x^{te} Glied f_x einer Reihe ist allemal die Differenz $\Delta_1 S_x$

Seite.

zwischen der Summe S_{x+1} der ersten x Glieder und der Summe S_x der ersten $x-1$ Glieder. Also ist $S_x = \Sigma_1 f_x + const.$. 439

§. 137. Hat man die Summe von n Gliedern einer Reihe gefunden, so setze man $n = \infty$, und man hat sogleich die Summe der unendlichen Reihe, wenn nur letztere convergent ist. . 442

Vierzehntes Kapitel. Ueber Summation allgemeiner und numerischer unendlichen Reihen, namentlich solcher die nach Sinus und Kosinus der vielfachen Bogen fortlaufen. 443

§. 138. Begriff der Summation einer allgemeinen unendlichen Reihe. 443

§. 139. Wie die Summe einer unendlichen, nach Kosinus oder Sinus der vielfachen Bogen fortlaufenden Reihe gefunden wird. . 445

§. 140. Einige Beispiele von Summation solcher Reihen, nach den vorgegebenen Methoden. 446

§§. 141. 142. Solche Beispiele, wo die Summe der gegebenen Reihe durch Differentiation oder Integration anderer summirten Reihen gefunden wird. 452

Fünfzehntes Kapitel. Von der Entwickelung beliebig gegebener Funktionen in Reihen, die nach den Sinus und Kosinus der vielfachen Bogen fortlaufen. (Fourier's Reihen.) 461

§. 143. Man kann zwischen $x = a$ und $x = b$ unendlich viele Werthe interpoliren. 461

§. 144. Eine Sinus-Reihe von $n-1$ Gliedern gefunden, welche mit $n-1$ Werthen einer Funktion u_x, die von $x = 0$ an bis $x = \pi$ hin genommen sind, zusammenfallen. 462

§. 145. Der Uebergang, wenn $n = \infty$ gedacht wird. 466

§. 146. Auffindung einer unendlichen Kosinus-Reihe, welche dieselbe Eigenschaft hat, d. h. welche mit einer Funktion u_x, von $x = 0$ an bis $x = \pi$ hin alle Werthe gemein hat. 468

§. 147. Verallgemeinerung dieser Formeln, so daß die Reihen mit u_x alle Werthe gemein haben von $x = -\pi$ an bis zu $x = \pi$ hin. 471

§§. 148. 149. Beweis der Convergenz dieser Reihen. 473

§§. 150. 151. Umformung dieser Reihen, so daß die neuen Reihen mit einer Funktion u_x alle Werthe gemein haben, von $x = -a$ an bis zu $x = +a$ hin, oder von $x = 0$ an bis zu $x = +a$ hin. 476

V.

Höhere Analyſis.

Zweite Abtheilung.

Integral-Rechnung.

Erstes Kapitel.

Integration entwickelt gegebener Funktionen eines einzigen Veränderlichen.

§. 1.

Wenn y_x eine gegebene Funktion von x ist, und nun eine Funktion ψ_x gesucht wird, so daß

$$\partial\psi_x = y_x \quad \text{oder} \quad d\psi = y_x \cdot dx$$

ist, so sagt man: „es werde y nach x integrirt"; und die Funktion ψ_x nennt man das Integral von y nach x, und bezeichnet sie durch

$$\int y_x \cdot dx \quad \text{oder} \quad \int y \cdot dx.$$

Ist also

1) $\psi_x = \int y \cdot dx$, so ist 2) $\partial\psi_x = y$;

d. h. es ist

I. $\partial(\int y \cdot dx)_x = y$ und II. $\psi_x = \int(\partial\psi_x) \cdot dx$.

§. 2.

Ist $\psi_x = \int y \cdot dx$,

so ist

$\partial\psi_x = y$, $\partial^2\psi_x = \partial y_x$, $\partial^3\psi_x = \partial^2 y_x$ und $\partial^n\psi_x = \partial^{n-1} y_x$.

Daher giebt der Maclaurin'sche Lehrsatz (I. Bd. §. 156.), wenn man C statt ψ_0 schreibt, augenblicklich

1) $$\psi_x = C + y_0 \cdot x + \partial y_0 \cdot \frac{x^2}{2!} + \partial^2 y_0 \cdot \frac{x^3}{3!} + \cdots.$$

Umgekehrt: wenn man C ganz willkührlich sich denkt, aber (nach x) constant, so giebt diese Gleichung 1.), indem sie nach x abgeleitet wird,

$$2) \qquad \partial\psi_x = y_0 + \partial y_0 \cdot x + \partial^2 y_0 \cdot \frac{x^2}{2!} + \cdots,$$

d. h.

$$3) \qquad \partial\psi_x = y_x,$$

in so fern in 2.) die Reihe zur Rechten (nach I. Bd. §. 156.) genau die Funktion y_x ist.

Man findet also

$$(\odot) \cdots \quad \int y \cdot dx = C + y_0 \cdot x + \partial y_0 \cdot \frac{x^2}{2!} + \partial^2 y_0 \cdot \frac{x^3}{3!} + \cdots,$$

wo C eine ganz unbestimmte, willkührliche Constante (nach x) vorstellt.

Weil aber y_0, oder ∂y_0, $\partial^2 y_0$, etc. etc. die Form $\frac{1}{0}$ annehmen können, in Ausnahmsfällen, so wird man lieber den allgemeinern Maclaurin'schen Lehrsatz (I. Bd. §. 156.) anwenden und dann genau durch dasselbe Verfahren erhalten

$$(\mathfrak{D}) \cdots \quad \int y \cdot dx = C + y_\alpha \cdot (x - \alpha) + \partial y_\alpha \cdot \frac{(x-\alpha)^2}{2!} + \partial^2 y_\alpha \cdot \frac{(x-\alpha)^3}{3!} + \cdots,$$

während auch hier wieder C ganz willkührlich und unbestimmt bleibt, aber (nach x) constant.

Diese Formeln ($\odot$) und ($\mathfrak{D}$) geben sogleich jedes verlangte Integral einer jeden gegebenen Funktion y_x, entweder nach Potenzen von x, oder nach Potenzen von $x - \alpha$ entwickelt, also in der Regel in Form einer unendlichen Reihe, obgleich auch in besonderen Fällen die Glieder dieser Reihe abbrechen können, so daß sie selbst eine endliche Reihe wird *).

Wir lernen aber daraus, daß jedes Integral $\int y \cdot dx$ eine

*) Dies ist dann gewiß der Fall, wenn y_x eine ganze Funktion von x ist, weil dann eine der Ableitungen und alle folgenden für jedes x der Null gleich werden.

unbestimmte Constante C in sich aufnimmt; daß es also eigentlich von jeder Funktion y von x, unendlich viele, um die verschiedenen Werthe der Constante C von einander verschiedene Integrale nach x, giebt *).

§. 3.

Das Integral, welches die unbestimmte Constante C in sich aufgenommen hat, wird das allgemeine Integral genannt. — Jedes Integral dagegen, welches keine solche unbestimmte Constante enthält, welches aber allemal aus dem allgemeinen Integral dadurch hervorgehen muß, daß der unbestimmten Constante C ein bestimmter Werth beigelegt wird, wird ein besonderes Integral genannt.

Hat man aber irgend ein besonderes Integral, so darf man zu selbigem nur noch eine völlig unbestimmte Constante C addiren, und man hat sogleich das allgemeine Integral.

§. 4.

Man kann nicht jede gegebene Funktion y_x in endlicher Form integriren. Wo man es aber durchsetzen kann, da geschieht es mittelst der nachstehenden Formeln:

1) $\int A\varphi_x \cdot dx = A \cdot \int \varphi_x \cdot dx;$

2) $\int (\varphi_x \pm \psi_x) \cdot dx = \int \varphi \cdot dx \pm \int \psi \cdot dx;$

3) $\int (\varphi_x \cdot \psi_x) \cdot dx = \varphi \cdot \int \psi \cdot dx - \int (\partial \varphi_x \cdot \int \psi \cdot dx) \cdot dx,$

in welcher Gleichung das zur Rechten zweimal vorkommende Zeichen $\int \psi \cdot dx$ jedesmal ein und dasselbe besondere, übrigens beliebige Integral von ψ nach x vorstellt; — endlich

4) $\int \varphi_x \cdot dx = \int (\varphi \cdot \partial x_z) \cdot dz,$

wenn φ_x ohne z ist und wenn man rechts statt x eine ganz

---

*) In der That bekommt man jedesmal ein und dasselbe, ob man die Ableitungen von f_x, oder von $f_x + C$ nach x nimmt, weil $\partial(C)_x = 0$ ist (nach I. Bd. §. 150. B. 9.).

beliebige Funktion von z setzt, so daß in $\varphi \cdot \partial x_z$ durchaus kein x mehr vorkommt, und dann das ganze Produkt $\varphi \cdot \partial x_z$ nach z integrirt.

Man erhält diese Formeln 1.) und 2.), wenn man die Formeln des I. Bd. §. 150. B. 4. und 1.) gerade umgekehrt.

Die Formel 3.) ergiebt sich auch aus I. Bd. §. 150. B. 2.). Es ist nämlich nach letzterer

1′) $$\partial(yz)_x = z \cdot \partial y_x + y \cdot \partial z_x,$$

also

2′) $$z \cdot \partial y_x = \partial(yz)_x - y \cdot \partial z_x,$$

oder, wenn man hier φ_x statt z, und ψ_x statt ∂y_x setzt, so daß aus $\psi_x = \partial y_x$ noch $\int \psi \cdot dx = y_x$ hervorgeht,

3′) $$\varphi \cdot \psi = \partial(\varphi \cdot \int \psi \cdot dx) - \partial\varphi_x \cdot \int \psi \cdot dx.$$

Und nimmt man hier links und rechts das Integral nach allem x, so findet sich die obige 3.) unmittelbar *).

Die Formel 4.) endlich geht aus I. Bd. §. 150. B. I.) hervor, indem man sie umkehrt. Ist nämlich

$$\int \varphi \cdot dx = y, \quad \text{so ist} \quad \varphi = \partial y_x;$$

allein nach der gedachten Formel ist

$$\partial y_z = \partial y_x \cdot \partial x_z = \varphi \cdot \partial x_z;$$

also ist auch

$$y = \int (\varphi \cdot \partial x_z) \cdot dz.$$

Dieselbe Funktion y also, welche $= \int \varphi \cdot dx$ ist, ist zu gleicher Zeit auch $= \int (\varphi \cdot \partial x_z) \cdot dz$.

Wendet man die Formel 1.) an, so sagt man: bei'm Integriren (nach x) wird jeder (nach x) constante Faktor herausgesetzt, und bloß der veränderliche (d. h. von x abhängige) Faktor integrirt.

Wendet man die Formel 2.) an, so sagt man: eine

---

*) Es muß zwar, wenn

$$f_x = \pi_x$$

ist, nicht nothwendig

$$\int f_x \cdot dx = \int \pi_x \cdot dx,$$

seyn, sondern es können diese beiden Integrale $\int f \cdot dx$ und $\int \pi \cdot dx$ um eine Constante von einander verschieden seyn. — Weil aber in jedem angezeigten Integral immer noch eine willkührliche Constante mit begriffen ist, so ist das obige Verfahren richtig und überzeugend.

Reihe von Gliedern wird integrirt, wenn man nach und nach jedes einzelne Glied integrirt *).

Die Anwendung der Formel 3.) nennt man das theilweise Integriren (l'intégration par parties).

Und wird die Formel 4.) benutzt, so sagt man: es werde durch Substitution integrirt.

Anmerkung 1. Wendet man die Formel 4.) auf die Formel 3.) an, so kann letztere, wie aus der 2′.) hervorgeht, auch diese Form annehmen

1) $$\int z \cdot dy = zy - \int y \cdot dz,$$

in so fern sie vorher diese Form hatte

2) $$\int (z \cdot \partial y_x) \cdot dx = zy - \int (y \cdot \partial z_x) \cdot dx.$$

Sind nämlich y und z Funktionen von x, so ist auch z als eine Funktion von y herzustellen, also dann z nach y zu integriren; während aber auch y als eine Funktion von z hergestellt gedacht, also dann auch y nach z integrirt werden kann.

Anmerkung 2. Für die bequemere Anwendbarkeit der Formel 4.) ist zu bemerken, daß

$$dx = \partial x_z \cdot dz$$

ist, und daß man aus $\varphi \cdot dx$ in 4.) zur Linken, sogleich das $(\varphi \cdot \partial x_z) \cdot dz$ zur Rechten bekommt, wenn man von x als Funktion von z das Differential dx nimmt, und diesen Ausdruck $\partial x_z \cdot dz$ statt des Faktors dx subſtituirt.

§. 5.

Aber eben weil man nur diese vier allgemeineren Integral-Formeln hat, so thut man wohl, die einfacheren Integrale zunächst dadurch sich zu verschaffen, daß man die einfacheren Ableitungs-Resultate der §§. 150. und 151. des I. Bd. bloß umkehrt. Dadurch erhält man namentlich sogleich:

---

*) Eine Funktion y_x kann daher integrirt werden, sobald sie in eine solche Reihe einzelner und in endlicher Form integrirbarer, Glieder zerlegt werden kann.

1) $\int x^m \cdot dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}$; 2) $\int \frac{1}{x} \cdot dx = log\, x$;

3) $\int a^x \cdot dx = \frac{a^x}{log\, a}$; 4) $\int e^x \cdot dx = e^x$;

5) $\int sin\, x \cdot dx = -cos\, x$; 6) $\int cos\, x \cdot dx = sin\, x$;

7) $\int \frac{1}{cos\, x^2} \cdot dx = tg\, x$; 8) $\int \frac{1}{sin\, x^2} \cdot dx = -cotg\, x$;

9) $\int \frac{sin\, x}{cos\, x^2} \cdot dx = sec\, x$; 10) $\int \frac{cos\, x}{sin\, x^2} \cdot dx = -cosec\, x$;

11) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx = \frac{1}{sin} x$, auch $= -\frac{1}{cos} x$;

12) $\int \frac{1}{1+x^2} \cdot dx = \frac{1}{tg} x$, auch $= -\frac{1}{cotg} x$*) $= -\frac{1}{tg}\,\frac{1}{x}$

§. 6.

Mittelst dieser Integrale kann man wieder viele andere ähnliche Integrale finden, z. B.

$$\int a^{px} \cdot dx, \quad \int sin\, px \cdot dx, \quad \int \frac{1}{px+q} \cdot dx,$$

u. s. w.; indem man $px+q=z$ setzt (es mag $q=0$ oder

---

*) In den NN. 11.) und 12.) ist die zweite Form des Integrals von der erstern allemal um die Constante $\frac{1}{2}\pi$ verschieden. Ist nämlich $\frac{1}{sin} x = z$, also $sin\, z = x$, so ist auch $cos\,(\frac{1}{2}\pi - z) = x$, d. h.

$$\tfrac{1}{2}\pi - z = \frac{1}{cos} x,$$

folglich

$$-\frac{1}{cos} x = -\tfrac{1}{2}\pi + z = -\tfrac{1}{2}\pi + \frac{1}{sin} x.$$

Und ist $\frac{1}{tg} x = u$, so ist $tg\, u = x$, also auch $cotg\,(\frac{1}{2}\pi - u) = x$

d. h. $$\frac{1}{cotg} x = \tfrac{1}{2}\pi - u$$

und $$-\frac{1}{cotg} x = -\tfrac{1}{2}\pi + u = -\tfrac{1}{2}\pi + \frac{1}{tg} x.$$

nicht $=0$ seyn), daraus $x=\frac{1}{p}z-\frac{q}{p}$, und $dx=\frac{1}{p}\cdot dz$ findet, und nun durch Substitution, d. h. nach der Formel §. 4. N. 4.) integrirt. — Auf diesem Wege erhält man noch

13) $$\int(px+q)^m\cdot dx=\frac{1}{p(m+1)}\cdot(px+q)^{m+1};$$

14) $$\int\frac{1}{px+q}\cdot dx=\frac{1}{p}\cdot log(px+q);$$

15) $$\int a^{px+q}\cdot dx=\frac{1}{p\cdot log\, a}\cdot a^{px+q};$$

16) $$\int sin(px+q)\cdot dx=-\frac{1}{p}\cdot cos(px+q);$$

17) $$\int cos(px+q)\cdot dx=\frac{1}{p}\cdot sin(px+q)\ *).$$

Zuweilen muß man die zu integrirende Funktion vorher erst ein wenig umformen, damit ihr Integral nach der vorstehenden Weise ebenfalls auf eines der einfachern und bekannten Integrale (des §. 5.) zurückgebracht werden könne. — Hat man z. B. $\frac{1}{\sqrt{b-cx^2}}\cdot dx$, oder $\frac{1}{b+cx^2}\cdot dx$ zu integriren, so kann man versuchen sie auf die (aus §. 5. N. N. 11. und 12.) be-

---

*) Ist überhaupt irgend einmal $\int f_x\cdot dx=\psi_x$ gefunden, so ist allemal sogleich $\int f_{px+q}\cdot dx=\frac{1}{p}\cdot\psi_{px+q}$, wie auf demselben Wege der Substitution in die Augen fällt. — Aber dann ist auch noch

$$\int x\cdot f_{px^2+q}\cdot dx=\frac{1}{2p}\cdot\psi_{px^2+q},$$

wie sich findet, wenn man $px^2+q=z$ setzt, so daß sich $2px\cdot dx=dz$ ergiebt. —

Aber eben so ist dann auch noch

$$\int x^{n-1}\cdot f_{px^n+q}\cdot dx=\frac{1}{np}\cdot\psi_{px^n+q};$$

und zwar ergiebt sich dieses Resultat sogleich, wenn man $px^n+q=z$ setzt, so daß $npx^{n-1}\cdot dx=dz$ wird, und dann die Formel §. 4. N. 4.) anwendet.

kannten Integrale von $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot dx$ und $\frac{1}{1+x^2}\cdot dx$ zurückzuführen. — Da muß man denn von $b\mp cx^2$, den Faktor b herausſetzen, alſo, indem man $\frac{c}{b}=p^2$, d. h. $p=\sqrt{\frac{c}{b}}$ nimmt, $b(1\mp p^2x^2)$ ſtatt $b\mp cx^2$ ſchreiben, dann $px=z$ ſetzen, ſo daß $p\cdot dx=dz$ wird; und man erhält dann

$$\int\frac{1}{\sqrt{b-cx^2}}\cdot dx=\frac{1}{\sqrt{b}}\cdot\int\frac{1}{\sqrt{1-p^2x^2}}\cdot dx=\frac{1}{\sqrt{b}}\cdot\frac{1}{p}\int\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\cdot dz$$

und

$$\int\frac{1}{b+cx^2}\cdot dx=\frac{1}{b}\cdot\int\frac{1}{1+p^2x^2}\cdot dx=\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{p}\int\frac{1}{1+z^2}\cdot dz.$$

Auf dieſe Weiſe erhält man (aus §. 5. N. N. 11. und 12.)

18) $$\int\frac{1}{\sqrt{b-cx^2}}\cdot dx=\frac{1}{\sqrt{c}}\cdot\frac{1}{sin}x\sqrt{\frac{c}{b}}=\frac{1}{\sqrt{c}}\cdot\frac{1}{tg}\frac{x\sqrt{c}}{\sqrt{b-cx^2}}\text{*)},$$

$$\text{auch}\quad=-\frac{1}{\sqrt{c}}\cdot\frac{1}{cos}x\sqrt{\frac{c}{b}}\text{**)};$$

---

*) Iſt nämlich $x\sqrt{\frac{c}{b}}$ der Sinus eines Bogens, ſo iſt die Tangente deſſelben Bogens $=\frac{sin}{\sqrt{1-sin^2}}$ d. h. $=\frac{x\sqrt{c}}{\sqrt{b-cx^2}}$.

**) Man muß nur nicht überſehen, daß wenn von einer und derſelben Funktion zwei oder mehr Integrale angegeben ſind, ſolche nicht nothwendig einander gleich ſeyn müſſen, ſondern um eine Conſtante von einander verſchieden ſeyn können. So findet man z. B. für $\int\frac{1}{x}\cdot dx$ ſowohl $log\,x$, als auch $log\,(ax)$, $log\,(-bx)$, alſo auch $log\,(\frac{1}{3}x)$, $log\,(-2x)$ u. ſ. f. — Alle dieſe Integrale ſind einander nicht gleich, aber ſie ſind alle von einander nur um eine Conſtante verſchieden; z. B. es iſt $log\,ax-log\,(-bx)=log\left(\frac{ax}{-bx}\right)=log\left(-\frac{a}{b}\right)$. — Oder es iſt $log\,(ax)=log\,x+log\,a$; $log\,(-bx)=log\,x+log\,(-b)$; eben ſo iſt $log\,(-x)=log\,x+log\,(-1)$; u. ſ. w. Und alle dieſe Integrale ſind im allgemeinen Integral $log\,x+C$ enthalten.

Hier oben (in 18.) ergiebt ſich die zweite Form des Integrals, wenn

und

19) $$\int \frac{1}{b+cx^2}\cdot dx = \frac{1}{\sqrt{(bc)}}\cdot\frac{1}{tg}\, x\sqrt{\frac{c}{b}} = \frac{1}{\sqrt{(bc)}}\cdot\frac{1}{sin}\,\frac{x\sqrt{c}}{\sqrt{b+cx^2}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{bc}}\cdot\frac{1}{cos}\,\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b+cx^2}}, \text{ auch } = -\frac{1}{\sqrt{(bc)}}\cdot\frac{1}{cotg}\, x\sqrt{\frac{c}{b}}.$$

Eben so könnte man versuchen, die Integrale von $\frac{1}{\sqrt{a+bx-cx^2}}\cdot dx$ und von $\frac{1}{a+bx+cx^2}\cdot dx$ auf die Integrale von $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot dx$ und von $\frac{1}{1+x^2}\cdot dx$ zurückzuführen. Man würde zu dem Ende $x\mp\frac{b}{2c}=z$ setzen, d. h. $x=z\pm\frac{b}{2c}$, so daß $a+bx\mp cx^2=\left(a\pm\frac{b^2}{4c}\right)\mp cz^2$ sich findet. Und da zu gleicher Zeit $dx=dz$ wird, so sieht man diese letztern beiden Integrale auf die vorhergehenden beiden

---

man zu der erstern Form $\frac{1}{\sqrt{c}}\cdot\frac{1}{sin}\, x\sqrt{\frac{c}{b}}$ die Constante $\frac{-1}{\sqrt{c}}\cdot\frac{1}{2}\pi$ addirt. — Setzt man nämlich $\frac{1}{sin}\, x\sqrt{\frac{c}{b}}=v$, so ist $sin\, v = x\sqrt{\frac{c}{b}}$, und das neue Integral ist daher

$$= \frac{1}{\sqrt{c}}\cdot v - \frac{1}{\sqrt{c}}\cdot\tfrac{1}{2}\pi \text{ oder } = \frac{1}{\sqrt{c}}(v-\tfrac{1}{2}\pi) \text{ oder } = -\frac{1}{\sqrt{c}}(\tfrac{1}{2}\pi - v).$$

Weil aber v und $\frac{1}{2}\pi - v$ einander zu $\frac{1}{2}\pi$ ergänzen, so ist der Sinus des einen Bogens zugleich der Kosinus des andern; d. h. es ist

$$sin\, v = cos\,(\tfrac{1}{2}\pi - v), \quad \text{also} \quad cos\,(\tfrac{1}{2}\pi - v) = x\sqrt{\frac{c}{b}},$$

d. h.
$$\tfrac{1}{2}\pi - v = \frac{1}{cos}\, x\sqrt{\frac{c}{b}}.$$

Eben so geht in 19.) die zweite Form $-\frac{1}{\sqrt{(bc)}}\cdot\frac{1}{cotg}\, x\sqrt{\frac{c}{b}}$ aus der erstern Form $\frac{1}{\sqrt{(bc)}}\cdot\frac{1}{tg}\, x\sqrt{\frac{c}{b}}$ hervor, wenn man zur letzteren noch die Constante $\frac{-1}{\sqrt{(bc)}}\cdot\frac{1}{2}\pi$ addirt; weil, wenn zwei Bogen einander zu $\frac{1}{2}\pi$ ergänzen, dann die Tangente des einen allemal zugleich auch die Kotangente des andern ist. (Vgl. die Note zu §. 5. N. 12.)

18.) und 19.) zurückgebracht, so daß man in letztern nur $a \pm \frac{b^2}{4c}$ d. h. $\frac{4ac \pm b^2}{4c}$ statt b, und $x \pm \frac{b}{2c}$ statt x schreiben darf, um diese neuen zu haben. Dies giebt also

$$20) \quad \int \frac{1}{\sqrt{a+bx-cx^2}} \cdot dx = \frac{1}{\sqrt{c}} \cdot \frac{1}{sin} \frac{2cx-b}{\sqrt{4ac+b^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{c}} \cdot \frac{1}{tg} \frac{2cx-b}{2\sqrt{c} \cdot \sqrt{a+bx-cx^2}},$$

$$\text{auch} \quad = -\frac{1}{\sqrt{c}} \cdot \frac{1}{cos} \frac{2cx-b}{\sqrt{4ac+b^2}};$$

$$21) \quad \int \frac{1}{a+bx+cx^2} \cdot dx = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}} \cdot \frac{1}{tg} \frac{2cx+b}{\sqrt{4ac-b^2}},$$

$$\text{auch} \quad = -\frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}} \cdot \frac{1}{cotg} \frac{2cx+b}{\sqrt{4ac-b^2}}.$$

Obgleich aber diese Formeln 18.—20.) gelten, es mag c reell oder imaginär, positiv oder negativ seyn, so sind sie doch für die Ziffern-Rechnungen nur bequem, so lange c positiv ist. Denkt man sich c negativ, oder setzt man $-c$ statt c, damit auch nachher wieder c positiv gedacht werden könne, so muß man die Formeln des I. Bd. §. 151. I.—IV.) anwenden, um die Bogen in Logarithmen zu verwandeln, so daß in den End-Resultaten die $\sqrt{-1}$ d. h. i, die nun in 18.—20.), sobald $-c$ statt c gesetzt wird, sich rechts hervorhebt, wieder verschwinde und abermals reelle Formen entstehen. Dasselbe muß man in der 21.) thun, sobald $4ac-b^2$ negativ wird. Auf diesem Wege erhält man dann unmittelbar

$$22) \quad \int \frac{1}{\sqrt{b+cx^2}} \cdot dx = \frac{-1}{\sqrt{c}} \cdot log\,(\sqrt{b+cx^2} - x\sqrt{c}),$$

$$\text{auch} \quad = \frac{1}{\sqrt{c}} \cdot log\,(\sqrt{b+cx^2} + x\sqrt{c})^*),$$

*) Die zweite Form ergiebt sich, wenn man zur erstern die Constante $\frac{1}{\sqrt{c}} \cdot log\, b$ addirt.

auch (nach N. 18.) $= \frac{1}{\sqrt{(-c)}} \cdot \frac{1}{sin} x \sqrt{\frac{-c}{b}} = \frac{1}{\sqrt{(-c)}} \cdot \frac{1}{tg} \frac{x\sqrt{(-c)}}{\sqrt{b+cx^2}}$;

23) $\int \frac{1}{b-cx^2} \cdot dx = \frac{1}{2\sqrt{(bc)}} \cdot log \frac{1+x\sqrt{c:b}}{1-x\sqrt{c:b}}$,

auch (nach N. 19.)

$= \frac{1}{\sqrt{(-bc)}} \cdot \frac{1}{tg} x \sqrt{\frac{-c}{b}} = \frac{1}{\sqrt{(-bc)}} \cdot \frac{1}{sin} \frac{x\sqrt{-c}}{\sqrt{b-cx^2}}$;

24) $\int \frac{1}{\sqrt{a+bx+cx^2}} \cdot dx$

$= \frac{1}{\sqrt{c}} \cdot log (2cx+b+2\sqrt{c} \cdot \sqrt{a+bx+cx^2})$;

auch $= \frac{1}{\sqrt{c}} \cdot log \left(\frac{2cx+b}{2\sqrt{c}} + \sqrt{a+bx+cx^2} \right)$ *),

auch (nach N. 20.) $= -\frac{1}{\sqrt{(-c)}} \cdot \frac{1}{sin} \frac{2cx+b}{\sqrt{b^2-4ac}}$

$= -\frac{1}{\sqrt{(-c)}} \cdot \frac{1}{tg} \frac{2cx+b}{2\sqrt{(-c)} \cdot \sqrt{a+bx+cx^2}}$;

25) $\int \frac{1}{a+bx+cx^2} \cdot dx = \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}} \cdot log \frac{2cx+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2cx+b+\sqrt{b^2-4ac}}$,

auch (nach N. 21.) $= \frac{2}{\sqrt{(4ac-b^2)}} \cdot \frac{1}{tg} \frac{2cx+b}{\sqrt{4ac-b^2}}$.

Für $b = c = 1$ gehen die Formeln 22.) und 23.) noch in diese beiden besonderen Fälle über:

26) $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot dx = log (x+\sqrt{1+x^2})$ (Vgl. N. 11.);

27) $\int \frac{1}{1-x^2} \cdot dx = \frac{1}{2} log \frac{1+x}{1-x} = log \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ **) (Vgl. N. 12.).

---

*) Die zweite Form ergiebt sich, wenn man von der erstern die Constante $\frac{1}{\sqrt{c}} \cdot log (2\sqrt{c})$ subtrahirt.

**) Es ist $\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} \right)$,

Dies ist ohngefähr Alles, was man zunächst für das Integriren in den einfacheren Fällen thun kann.

§. 7.

Integration der ganzen Funktionen.

Gewöhnlich betrachtet man nach der Reihe die Integration a) der algebraischen rationalen ganzen, b) der algebraischen rationalen gebrochenen Funktionen, c) der algebraischen irrationalen und zuletzt d) der transcendenten (der Exponential-, der logarithmischen und der trigonometrischen) Funktionen. — Gehen auch wir nun diesen Weg.

Die algebraischen rationalen ganzen Funktionen von x sind alle von der Form

$$Ax^{\alpha} + Bx^{\beta} + Cx^{\gamma} + \cdots,$$

und ihr Integral giebt daher sogleich

$$\frac{A}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + \frac{B}{\beta+1}x^{\beta+1} + \frac{C}{\gamma+1}x^{\gamma+1} + \cdots;$$

und dieses Resultat gilt sogar dann noch, wenn α, β, γ etc. etc. gebrochene oder negative Zahlen seyn sollten.

§. 8.

Integration der algebraischen rationalen gebrochenen Funktionen.

I. Jede unächt gebrochene Funktion, d. h. jede Funktion von der Form

$$\frac{A + Bx + Cx^2 + \cdots + Px^m}{A' + B'x + C'x^2 + \cdots + Rx^n},$$

in welcher der Exponent m der höchsten Potenz von x im Zähler, gleich oder größer ist, als der Exponent n der höchsten Potenz von x im Nenner, — läßt sich allemal in eine Summe aus einer ganzen Funktion von x (die auch zuweilen, nämlich wenn

---

also $$\int \frac{1}{1-x^2}\cdot dx = \tfrac{1}{2}\int \frac{1}{1-x}\cdot dx + \tfrac{1}{2}\int \frac{1}{1+x}\cdot dx$$
$$= -\tfrac{1}{2}log\,(1-x) + \tfrac{1}{2}log\,(1+x).$$

$m = n$ ist, in eine bloße Constante nach x übergehen kann) und einer ächt gebrochenen Funktion (in welcher der Exponent der höchsten Potenz von x im Zähler kleiner ist, als der im Nenner) umformen. — Man ordnet zu dem Ende Zähler und Nenner nach fallenden Potenzen von x, dividirt dann auf die, in den Elementen gewöhnliche Weise mit dem Nenner in den Zähler, so lange bis der erste Rest kommt, der von einem niedrigern Grade als der Divisor ist.

So z. B. findet sich $$\frac{1+x}{1-x} = -1 + \frac{2}{1-x};$$

$$\frac{1-2x+3x^2-4x^3}{1-4x+x^2} = -4x-13+\frac{14-50x}{1-4x+x^2};$$

u. s. w. f.

Eine unächt gebrochene Funktion wird also integrirt, wenn man sie auf die vorstehende Weise in eine ganze und eine ächt gebrochene verwandelt, und dann (nach I. Bd. §. 150. B. 1.) jede der beiden letztern für sich integrirt.

II. Jede ächt gebrochene Funktion läßt sich allemal in eine Summe von ächt gebrochenen Funktionen zerlegen, welche entweder die Form

$$\frac{A}{px+q}, \quad \text{oder die Form} \quad \frac{A}{(px+q)^n}$$

haben, und welche einfache Partial-Brüche genannt werden. — Die Integrale dieser beiden letztern Funktionen sind aber nach den Nummern 14.) und 13.) des §. 6.) bereits gefunden; nämlich

1) $$\int \frac{A}{px+q} \cdot dx = \frac{A}{p} \cdot log(px+q);$$

2) $$\int \frac{A}{(px+q)^n} \cdot dx = \frac{A(px+q)^{1-n}}{p(1-n)} = \frac{-A}{p(n-1)(px+q)^{n-1}}.$$

Folglich kann man jede ächt gebrochene und deshalb (nach I.) auch jede unächt gebrochene Funktion integriren, so oft es gelingt, die erstere in die gedachten einfachen Partial-Brüche zu zerlegen.

§. 9.

Zerlegung der ächt gebrochenen Funktionen in ihre einfachen Partial-Brüche.

I. Hat in einer ächt gebrochenen Funktion $\frac{M_x}{N_x}$, der Nenner N_x den Faktor $px+q$ nur einmal, ist also $N_x = (px+q)\cdot R_x$, und setzt man

$$1) \qquad \frac{M_x}{N_x} = \frac{A}{px+q} + \frac{M'_x}{R_x},$$

so ist allemal

$$2) \quad A = \frac{(M)}{(R)} \quad \text{und dann} \quad 3) \quad M'_x = \frac{M_x - A\cdot R_x}{px+q},$$

wenn (M) und (R) die Werthe bedeuten, welche M_x und R_x annehmen, sobald in ihnen statt x der Werth von x gesetzt wird, welcher den Faktor $px+q$ der Null gleich macht, welcher also aus $px+q=0$ gefunden wird, und welcher $= -\frac{q}{p}$ ist.

Addirt man nämlich in 1.) die beiden Brüche zur Rechten, so erhält man aus der Vergleichung augenblicklich

$$M_x = A\cdot R_x + (px+q)\cdot M'_x.$$

Giebt man in dieser Gleichung, um M'_x fortzuschaffen, dem x einen solchen Werth, daß $px+q=0$ wird, so erhält man die Gleichung zur Bestimmung von A. Ist aber A gefunden, so giebt dieselbe Gleichung, indem man x in ihr unbestimmt läßt, sogleich M'_x dazu.

Enthielte aber R_x den Faktor $px+q$ noch einmal, so würde $(R)=0$, und die jetzige Form von A, nämlich $\frac{1}{0}$ würde anzeigen, daß jetzt eine solche Zerlegung nicht statt findet.

Uebrigens gilt diese Zerlegung 1.) auch dann noch, wenn $\frac{M_x}{N_x}$ eine unächt gebrochene Funktion ist, wie der so eben geführte Beweis deutlich sehen läßt. Die ganze Funktion, welche in $\frac{M_x}{N_x}$ steckt, steckt natürlich dann in dem zweiten Summanden $\frac{M'_x}{R_x}$.

Bei-

Beispiel 1. So findet sich $\frac{1-2x^2}{1-x^3} = \frac{1-2x^2}{(1-x)(1+x+x^2)}$, und man hat daher $M_x = 1-2x^2$, $N_x = 1-x^3$, $R_x = 1+x+x^2$; $-\frac{q}{p} = 1$; also $(M) = -1$, $(R) = 3$; folglich $A = -\frac{1}{3}$. Hernach wird $M_x - A \cdot R_x = \frac{4}{3} + \frac{1}{3}x - \frac{5}{3}x^2$ also $M'_x = \frac{\frac{4}{3}+\frac{1}{3}x-\frac{5}{3}x^2}{x-1} = -\frac{4}{3}-\frac{5}{3}x$; folglich hat man gefunden

$$\frac{1-2x^2}{1-x^3} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-1} - \frac{1}{3}\cdot\frac{4+5x}{1+x+x^2}.$$

Beispiel 2. Soll diese letztere ächt gebrochene Funktion $\frac{4+5x}{1+x+x^2}$ auf's Neue in Partial-Brüche zerlegt werden, so muß man zuvor den Nenner $1+x+x^2$ in seine beiden einfachen Faktoren zerlegen, welche bezüglich $x-\alpha$ und $x-\beta$ sind, wenn α und β die beiden Werthe von x vorstellen, welche ihn zu Null machen. Man findet aber aus $x^2+x+1=0$, sogleich $x = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i\cdot\sqrt{3}$, wo i die $\sqrt{-1}$ vorstellt. Also sind die beiden Faktoren von x^2+x+1 diese: $x+(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\cdot\sqrt{3})$ und $x+(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\cdot\sqrt{3})$.

Setzt man nun

$$\frac{4+5x}{1+x+x^2} = \frac{A}{x+(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\cdot\sqrt{3})} + \frac{M'_x}{x+(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\cdot\sqrt{3})},$$

so hat man jetzt $M_x = 4+5x$, $R_x = x+(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\cdot\sqrt{3})$,

$-\frac{q}{P} = -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\cdot\sqrt{3}$; daher $(M) = \frac{3}{2}-\frac{5}{2}i\cdot\sqrt{3}$, $(R) = -i\cdot\sqrt{3}$ und $A = \frac{(M)}{(R)} = \frac{-\frac{3}{2}+\frac{5}{2}i\cdot\sqrt{3}}{i\cdot\sqrt{3}} = \frac{5}{2}+\frac{3}{2\sqrt{3}}\cdot i = \frac{5}{2}+\frac{1}{2}i\cdot\sqrt{3}$. Und dann findet sich noch

$$M'_x = \frac{M_x - A\cdot R_x}{px+q} = \frac{(2+i\cdot\sqrt{3})+(\frac{5}{2}-\frac{1}{2}i\cdot\sqrt{3})x}{x+(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\cdot\sqrt{3})} = \frac{5}{2}-\frac{1}{2}i\cdot\sqrt{3}\ ^*),$$

so daß $\frac{4+5x}{1+x+x^2} = \frac{\frac{5}{2}+\frac{1}{2}i\cdot\sqrt{3}}{x+(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\cdot\sqrt{3})} + \frac{\frac{5}{2}-\frac{1}{2}i\cdot\sqrt{3}}{x+(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\cdot\sqrt{3})}$ gefunden ist.

Beispiel der Integration. Hat man aber nun in den vorstehenden Beispielen 1.) und 2.) die gebrochene Funktion $\frac{1-2x^2}{1-x^3}$ in ihre einfachen Faktoren zerlegt und

---

*) Daß man M'_x nach x constant und von A nur dadurch verschieden finden mußte, daß hier $-i$ steht, wo in A der Werth i oder $+i$ zu finden ist, konnte man à priori wissen, und man brauchte dann dasmal die Berechnung von M'_x gar nicht auszuführen.

$$\frac{1-2x^2}{1-x^3} = \tfrac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-1} - \frac{\frac{5}{6}+\frac{1}{6}i\cdot\sqrt{3}}{x+(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\cdot\sqrt{3})} - \frac{\frac{5}{6}-\frac{1}{6}i\cdot\sqrt{3}}{x+(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\cdot\sqrt{3})}$$

gefunden, so findet sich nun sogleich (nach der Formel 1. des Textes und nach I. Bd. §. 150. B. 1.)

$$\int\frac{1-2x^2}{1-x^3}\cdot dx = \tfrac{1}{3}log(x-1) - (\tfrac{5}{6}+\tfrac{1}{6}i\cdot\sqrt{3})\cdot log(x+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i\cdot\sqrt{3})$$
$$-(\tfrac{5}{6}-\tfrac{1}{6}i\cdot\sqrt{3})\cdot log(x+\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}i\cdot\sqrt{3}).$$

Dieses Resultat darf nun nur noch so umgeformt werden, daß sich die imaginäre Wurzel i heraushebt. Zu dem Ende schreibe man die beiden letzten, subtrahirten Glieder anders, nämlich so, daß die mit $\frac{5}{6}$ multiplicirten Glieder zusammengefaßt werden, und dann die mit i multiplicirten. Dieser subtrahirte Theil wird dann

$$= \tfrac{5}{6}log(1+x+x^2) + \tfrac{1}{6}i\cdot\sqrt{3}\cdot log\frac{x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\cdot\sqrt{3}}{x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\cdot\sqrt{3}}.$$

Dieser zweite Logarithme muß nun (nach I. Bd. §. 151.) in einen Bogen umgeformt werden. Die III.) des I. Bd. §. 151.) giebt aber für dieses 2te Glied der vorstehenden Summe, wenn im Logarithmanden Zähler und Nenner durch $x+\frac{1}{2}$ dividirt werden, und wenn man bemerkt, daß $i = -\frac{1}{i}$ ist,

$$-\tfrac{1}{3}\sqrt{3}\cdot\frac{1}{tg\,\frac{\sqrt{3}}{2x+1}} \quad \text{oder (nach I. Bd. §. 81.)} \quad -\tfrac{1}{3}\sqrt{3}\cdot\frac{1}{cotg\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}}}.$$

Man hat also zuletzt in ganz reellen Formen

$$\int\frac{1-2x^2}{1-x^3}\cdot dx = \tfrac{1}{3}log(x-1) - \tfrac{5}{6}log(1+x+x^2) + \tfrac{1}{3}\sqrt{3}\cdot\frac{1}{cotg\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}}};$$

wo man, wenn noch die Constante $-\frac{1}{3}\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}\pi$ addirt wird, statt $\frac{1}{3}\sqrt{3}\cdot\frac{1}{cotg}$ auch $-\frac{1}{3}\sqrt{3}\cdot\frac{1}{tg}$ schreiben kann. — Und in der That, wenn man den Ausdruck zur Rechten nach allem x differenziirt, so kommt die Funktion unter dem Integral-Zeichen zur Linken wieder heraus.

II. Hat der Nenner N_x der ächt gebrochenen Funktion $\frac{M_x}{N_x}$ den Faktor $px+q$ doppelt, ist also $N = (px+q)^2\cdot R_x$, so daß R_x denselben Faktor $px+q$ nicht mehr hat, so kann man setzen

$$1)\qquad \frac{M_x}{N_x} = \frac{A}{(px+q)^2} + \frac{B}{px+q} + \frac{M''_x}{R_x};$$

und dabei wird gefunden

2) $A = \frac{(M)}{(R)}$; 3) $M'_x = \frac{M_x - A \cdot R_x}{px+q}$;

4) $B = \frac{(M')}{(R)}$ und 5) $M''_x = \frac{M'_x - B \cdot R_x}{px+q}$.

Denn man hat

$$\frac{M_x}{N_x} = \frac{1}{px+q} \cdot \frac{M_x}{(px+q) \cdot R_x},$$

also (nach I.)

$$= \frac{1}{px+q} \cdot \left(\frac{A}{px+q} + \frac{M'_x}{R_x} \right),$$

wo A und M'_x (nach I.) aus den hiesigen Gleichungen 2.) und 3.) gefunden werden müssen. Dann aber zerlegt sich $\frac{M'_x}{(px+q) \cdot R_x}$ aufs Neue in die beiden Brüche $\frac{B}{px+q} + \frac{M''_x}{R_x}$, wo B und M''_x (nach I.) aus den beiden Gleichungen 4.) und 5.) sich ergeben.

III. Und hat der Nenner N_x den Faktor $px+q$ dreimal, so daß $N_x = (px+q)^3 \cdot R_x$ ist, so kann man

1) $$\frac{M_x}{N_x} = \frac{A}{(px+q)^3} + \frac{B}{(px+q)^2} + \frac{C}{px+q} + \frac{M'''_x}{R_x}$$

setzen, während A, B, C und M''' nach und nach durch folgende Rechnung gefunden werden, nämlich

2) $A = \frac{(M)}{(R)}$; 3) $M'_x = \frac{M_x - A \cdot R_x}{px+q}$;

4) $B = \frac{(M')}{(R)}$; 5) $M''_x = \frac{M'_x - B \cdot R_x}{px+q}$;

6) $C = \frac{(M'')}{(R)}$ und 7) $M'''_x = \frac{M''_x - C \cdot R_x}{px+q}$.

Dabei müssen die Divisionen zur Rechten immer aufgehen, weil M'_x, M''_x, M'''_x allemal ganze Funktionen von x sind.

IV. Man übersieht nun die Zerlegung von $\frac{M_x}{N_x}$ für den Fall, daß N_x den Faktor $(px+q)^n$ enthalten sollte, während n irgend eine ganze positive Zahl ist.

Anmerkung 1. Das Integriren der gebrochenen Funktionen hängt also vom Zerlegen derselben in ihre einfachen Par-

tial-Brüche, und letzteres wieder von dem Zerlegen einer ganzen Funktion von x in ihre einfachen Faktoren ab; während dieses letzterwähnte Geschäft wiederum von der Auflösung der höheren Gleichungen abhängig ist. — Nachstehende Beispiele mögen noch zur weiteren Uebung dienen.

Beispiel 1. Soll $\int \frac{3x^2}{1-x^2}\cdot dx$ gefunden werden, so zerlegt man zunächst $\frac{3x^2}{1-x^2}$ in $-3+3\cdot\frac{1}{1-x^2}$; dann letztere ächt gebrochene Funktion $\frac{1}{1-x^2}$ wieder in $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-x}$. Man hat daher

$$\frac{3x^2}{1-x^2}=-3+\tfrac{3}{2}\cdot\frac{1}{1+x}+\tfrac{3}{2}\cdot\frac{1}{1-x};$$

folglich findet sich, wenn man jetzt integrirt,

$$\int\frac{3x^2}{1-x^2}\cdot dx=-3x+\tfrac{3}{2}log(1+x)-\tfrac{3}{2}log(1-x)$$
$$=-3x+\tfrac{3}{2}log\frac{1+x}{1-x}.$$

Beispiel 2. Um $\int\frac{x^2}{(a+bx)^3}\cdot dx$ zu finden, zerlegt man

$$\frac{x^2}{(a+bx)^3}\text{ in }\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{1}{(a+bx)^3}-2\frac{a}{b^2}\cdot\frac{1}{(a+bx)^2}+\frac{1}{b^2}\cdot\frac{1}{a+bx}$$

und es wird daher das gesuchte Integral

$$=-\frac{a^2}{2b^3}\cdot\frac{1}{(a+bx)^2}+2\frac{a}{b^3}\cdot\frac{1}{a+bx}+\frac{1}{b^3}\cdot log(a+bx)^*).$$

Beispiel 3. Soll $\int\frac{5x^3+8x-20}{(x-4)^3(x^2-4x+8)}\cdot dx$ gefunden werden,

---

*) Solche Funktionen, wie $\frac{x^2}{(a+bx)^3}$ integriren sich leichter noch, wenn man $a+bx=z$ setzt, so daß $x=\frac{1}{b}(z-a)$ wird, also $\partial x_z=\frac{1}{b}$. Dann hat man

$$\int\frac{x^2}{(a+bx)^3}\cdot dx=\int\frac{1}{b^2}\,\frac{(z-a)^2}{z^3}\cdot\partial x_z\cdot dz=\frac{1}{b^3}\int\frac{z^2-2az+a^2}{z^3}\cdot dz$$
$$=\frac{1}{b^3}\left(\int\frac{1}{z}\cdot dz-2a\int\frac{1}{z^2}\cdot dz+a^2\int\frac{1}{z^3}\cdot dz\right).$$

Durch diese Substitution ist aber eigentlich nur die Zerlegung in die Partial-Brüche vereinfacht.

so zerlegt man vorher diese gebrochene Funktion in ihre Partial-Brüche. Solche findet sich dann

$$= \tfrac{83}{2} \cdot \frac{1}{(x-4)^3} + \tfrac{41}{4} \cdot \frac{1}{(x-4)^2} - \tfrac{45}{16} \cdot \frac{1}{x-4} + \tfrac{1}{16} \cdot \frac{45x-84}{x^2-4x+8}.$$

Der Nenner des letzten Bruches, x^2-4x+8 zerlegt sich ferner in die beiden Faktoren $x-2+2i$ und $x-2-2i$; der Bruch $\frac{45x-84}{x^2-4x+8}$ zerlegt sich daher auf's Neue in die beiden einfachen Partial-Brüche

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{45+3i}{x-2+2i} + \frac{45-3i}{x-2-2i}\right).$$

Das Integral dieses letztern Bruches $\frac{1}{16} \cdot \frac{45x-84}{x^2-4x+8} \cdot dx$ ist daher

$$+ \tfrac{1}{32}[(45+3i) \cdot log(x-2+2i) + (45-3i) \cdot log(x-2-2i)].$$

Faßt man aber diese beiden logarithmischen Glieder anders und zwar nach dem Beispiele der Integration zu §. 9. I.) zusammen, so wird dieses letztere

$$= \tfrac{45}{32} \cdot log(x^2-4x+8) + \tfrac{3}{32} i \cdot log \frac{x-2+2i}{x-2-2i}.$$

Dieser letztere Logarithme wird nun aber (nach §. 151. III.) in einen Bogen verwandelt und giebt

$$-\tfrac{3}{16} \frac{1}{tg} \frac{2}{x-2} = -\tfrac{3}{16} \frac{1}{cotg}(\tfrac{1}{2}x-1).$$

Man findet daher zuletzt

$$\int \frac{5x^3+8x-20}{(x-4)^3(x^2-4x+8)} \cdot dx = -\tfrac{83}{4} \cdot \frac{1}{(x-4)^2} - \tfrac{41}{4} \cdot \frac{1}{x-4}$$

$$-\tfrac{45}{16} log(x-4) + \tfrac{45}{32} log(x^2-4x+8) - \tfrac{3}{16} \frac{1}{cotg}(\tfrac{1}{2}x-1);$$

oder auch, indem man die beiden logarithmischen Glieder zusammenfaßt, und noch die Constante $\frac{3}{16} \cdot \frac{1}{2}\pi$ addirt, damit $\frac{1}{cotg}$ in $\frac{1}{tg}$ sich umwandle,

$$= \frac{81-41x}{4(x-4)^2} + \tfrac{45}{32} log \frac{x^2-4x+8}{x^2-8x+16} + \tfrac{3}{16} \frac{1}{tg}(\tfrac{1}{2}x-1).$$

Anmerkung 2. Wir würden hinsichtlich der Integration der gebrochenen Funktionen nichts mehr hinzuzufügen haben, wenn nicht bereits das Beispiel zu §. 9. I.) und nun wieder das eben vorstehende uns zeigten, daß die Form des Integrals, so oft die einfachen Faktoren des Nenners imaginär werden, unbequem wird, und daß der Theil desselben, welcher die Form

$A \cdot i \cdot log \frac{f+i\cdot\varphi}{f-i\cdot\varphi}$ hat, allemal erst (nach I. Bd. §. 151. III.) in

$-2A\cdot\frac{1}{tg}\frac{\varphi}{f}$ umgeformt werden muß. So wenig Schwierigkeit aber diese letztere Umformung auch gewähren mag, besonders wenn man sich ein für allemal das Schema

$$(\odot)\cdots\ A\cdot i\cdot log\frac{f+i\cdot\varphi}{f-i\cdot\varphi}=-A\cdot i\cdot log\frac{f-i\cdot\varphi}{f+i\cdot\varphi}=-2A\cdot\frac{1}{tg}\frac{\varphi}{f}$$

in das Gedächtniß prägt, so zieht man doch oft vor, die Zerlegung eines solchen Bruches wie $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$, wenn der Nenner x^2+px+q imaginäre einfache Faktoren hat, nicht weiter zu bewerkstelligen, sondern diesen Bruch direkt zu integriren.

Kommt aber im Nenner N_x einer gebrochenen Funktion $\frac{M_x}{N_x}$, derselbe doppelte Faktor x^2+px+q, mehrere Male vor, ist z. B. $N_x=(x^2+px+q)^3\cdot R_x$, so kann man die gebrochene Funktion $\frac{M_x}{N_x}$ auch sogleich so zerlegen, daß man erhält

$$(\mathfrak{C})\cdots\ \frac{M_x}{N_x}=$$

$$\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^3}+\frac{Cx+D}{(x^2+px+q)^2}+\frac{Ex+F}{x^2+px+q}+\frac{Z_x}{R_x};$$

und dann muß man diese doppelten Partial-Brüche ohne weitere Zerlegung integriren, wenn man die imaginären Formen und ihre Umformung in reelle Formen vermeiden will.

Sowohl dieses Zerlegen in doppelte Partial-Brüche, als auch die nochmalige direkte Integration der letztern (ohne sie auf's Neue in einfache Partial-Brüche zerlegen zu müssen) mögen nun die beiden nächsten Paragraphen noch nachweisen.

§. 10.

Von der Zerlegung einer gebrochenen Funktion in ihre doppelten Partial-Brüche.

I. Hat der Nenner N_x den Faktor x^2+px+q nur einmal, ist also $N_x=(x^2+px+q)\cdot R_x$, und sind die Werthe

von x, welche x^2+px+q der Null gleich machen, imaginär und durch $\alpha\pm\beta\cdot i$ ausgedrückt, so zerlegt sich allemal

$$1)\qquad \frac{M_x}{N_x} \text{ in } \frac{Ax+B}{x^2+px+q}+\frac{M'_x}{R_x};$$

und zwar werden A, B und M'_x auf folgende Art gefunden. Man setzt in M_x und R_x statt x den Werth $\alpha+\beta\cdot i$, und verwandelt die Werthe, welche M_x und R_x annehmen, in die gewöhnliche Rechnungsform, so daß man für diesen Werth von x,

$$2)\quad M_x=m+m_1\cdot i \qquad \text{und} \qquad 3)\quad R_x=r+r_1\cdot i$$

erhält. Hernach bestimmt man A und B aus den beiden Gleichungen

$$4)\qquad (r\alpha-r_1\beta)A+rB=m,$$

$$5)\qquad (r_1\alpha+r\beta)A+r_1B=m_1.$$

Sind aber hieraus A und B gefunden, so findet man zuletzt noch M'_x aus der Gleichung

$$6)\qquad M'_x=\frac{M-(Ax+B)\cdot R_x}{x^2+px+q}.$$

Es ist nämlich aus 1.), wenn man rechts die beiden Brüche addirt,

$$1')\qquad M_x=(Ax+B)\cdot R_x+(x^2+px+q)\cdot M'_x$$

Setzt man nun hier herein $\alpha+\beta i$ statt x, so wird $x^2+px+q=0$, also geht die Gleichung 1'.) über (wegen 2. und 3.) in

$$2')\qquad m+m_1\cdot i=(A\alpha+B+A\beta\cdot i)\cdot(r+r_1\cdot i).$$

Multiplicirt man aber hier zur Rechten die beiden Faktoren mit einander, so zerfällt diese Gleichung sogleich in die obigen 4.) und 5.) — Die Gleichung 6.) aber folgt unmittelbar aus 1'.).

Beispiel. Ist $\frac{x+1}{(x^2+x+1)(x^2+1)}$ gegeben, so hat man

$M_x=x+1$, $\alpha+\beta\cdot i=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\cdot\sqrt{3}$, also $\alpha=-\frac{1}{2}$, $\beta=\frac{1}{2}\sqrt{3}$,

$R_x=x^2+1$; $m=\frac{1}{2}$, $m_1=\frac{1}{2}\sqrt{3}$, $r=\frac{1}{2}$ und $r_1=-\frac{1}{2}\sqrt{3}$;

folglich ist $r\alpha-r_1\beta=\frac{1}{2}$, $r_1\alpha+r\beta=\frac{1}{2}\sqrt{3}$; und die Gleichungen 4.) und 5.) werden daher dasmal

$$A+B=1 \quad \text{und} \quad A-B=1,$$

woraus $A=1$ und $B=0$ hervorgeht. — Zuletzt kommt aus 6.)

$$M'_x=\frac{x+1-x\cdot(x^2+1)}{x^2+x+1}=-x+1;$$

und man hat daher gefunden

$$\frac{x+1}{(x^2+x+1)(x^2+1)} = \frac{x}{x^2+x+1} + \frac{-x+1}{x^2+1}.$$

II. Das vorstehende gilt auch dann noch, wenn $\frac{M_x}{N_x}$ eine unecht gebrochene Funktion seyn sollte.

Ist daher ein andermal

$$N_x = (x^2+px+q)^2 \cdot R_x,$$

so daß R_x denselben Faktor x^2+px+q nicht mehr enthält, so ist

$$1) \qquad \frac{M_x}{N_x} = \frac{1}{x^2+px+q} \cdot \frac{M_x}{(x^2+px+q)\cdot R_x}.$$

Wird nun der zweite Faktor $\frac{M}{(x^2+px+q)\cdot R_x}$ (genau nach I.) in die beiden Partial-Brüche I. 1.) zerlegt, so hat man (aus 1.)

$$2) \qquad \frac{M_x}{N_x} = \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^2} + \frac{M'_x}{(x^2+px+q)\cdot R_x},$$

wo A und B genau nach I. 2.) 3.) 4.) und 5.) gefunden worden sind. — Setzt man nun aber in I. 2.—5.) sowohl M'_x statt M_x, als auch A', B' statt A und B, und findet man dann M''_x in M'_x, A' und B' gerade so ausgedrückt, wie (in 6.) M'_x in M_x, A und B ausgedrückt steht, so hat man zuletzt

$$3) \qquad \frac{M_x}{N_x} = \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^2} + \frac{A'x+B'}{x^2+px+q} + \frac{M''_x}{R_x}.$$

III. Und so sieht man deutlich, wie die einzelnen doppelten Partial-Brüche gefunden werden, wenn N den Faktor x^2+px+q mehr als zweimal enthält. — Namentlich sieht sich die Form D.) in der Anmerkung 2. zu §. 9.) gerechtfertigt.

§. 11.

Integration der doppelten Partial-Brüche, ohne weitere Zerlegung derselben in einfache.

I. Soll $\frac{Ax+B}{x^2+px+q} \cdot dx$ integrirt werden, so erinnere man sich, daß man (§. 6. N. 21.) das Integral von $\frac{1}{x^2+px+q}$

bereits gefunden hat. Alles kommt daher nun darauf an, den Bruch $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$ dergestalt in zwei Brüche $\frac{Ax+E}{x^2+px+q}$ und $\frac{B-E}{x^2+px+q}$ zu zerlegen, daß das Integral des erstern leicht gefunden werden kann. Weil aber $\partial(x^2+px+q)_x = 2x+p$ ist, so hat man (nach §. 4. N. 4. und §. 5. N. 2.)

$$\int \frac{2x+p}{x^2+px+q} \cdot dx = log(x^2+px+q),$$

also auch, wenn man diese Gleichung mit irgend einer Constante H multiplicirt,

$$\int \frac{2Hx+Hp}{x^2+px+q} \cdot dx = H \cdot log(x^2+px+q).$$

Setzt man daher $2H = A$, also $H = \frac{1}{2}A$, so erhält man

1) $$\int \frac{Ax+\frac{1}{2}pA}{x^2+px+q} \cdot dx = \frac{1}{2}A \cdot log(x^2+px+q).$$

Auf diese Betrachtung fußend, zerlegt man also den zu integrirenden Bruch $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$ in die beiden

$$\frac{Ax+\frac{1}{2}pA}{x^2+px+q} + \frac{B-\frac{1}{2}pA}{x^2+px+q}$$

und hat dann

2) $$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} \cdot dx$$

$$= \frac{1}{2}A \cdot log(x^2+px+q) + (B-\tfrac{1}{2}pA) \cdot \int \frac{1}{x^2+px+q} \cdot dx;$$

also (nach §. 6. N. 21.)

(⊙) ... $$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} \cdot dx$$

$$= \frac{1}{2}A \cdot log(x^2+px+q) + \frac{2B-pA}{\sqrt{4q-p^2}} \cdot \frac{1}{tg} \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}.$$

Wenn man hier $\frac{b}{a}$ statt p, und $\frac{c}{a}$ statt q setzt, auch die

ganze Gleichung mit $\frac{1}{a}$ multiplicirt, endlich noch die Constante $\frac{1}{2}A \cdot log\, a$ addirt, so erhält man hieraus auch sogleich:

$$(\mathfrak{D}) \ldots \int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} \cdot dx$$
$$= \frac{A}{2a} \cdot log(ax^2+bx+c) + \frac{2aB-bA}{a \cdot \sqrt{4ac-b^2}} \cdot \frac{1}{tg} \frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}.$$

II. Soll aber $\int \frac{Px+Q}{(ax^2+bx+c)^n} \cdot dx$ gefunden werden, so sucht man dieses Integral auf das einfachere zurück zu führen, welches von derselben Form ist, welches aber im Nenner den Exponenten um eine Einheit kleiner hat. Zu dem Ende setzt man

$$\int \frac{Px+Q}{(ax^2+bx+c)^n} \cdot dx$$
$$= \frac{Gx+H}{(ax^2+bx+c)^{n-1}} + \int \frac{Q_1}{(ax^2+bx+c)^{n-1}} \cdot dx$$

differenziirt links und rechts und vergleicht, um die noch unbestimmt gelassenen Koefficienten G, H und Q_1 gehörig zu bestimmen; und man erhält auf diesem Wege

$$Q_1 = \frac{(2n-3)(2aQ-bP)}{(n-1)(4ac-b^2)},$$

$$G = \frac{2aQ-bP}{(n-1)(4ac-b^2)} \quad \text{und} \quad H = \frac{bQ-2cP}{(n-1)(4ac-b^2)};$$

so daß man zuletzt hat*)

*) Man übersieht dieses ganze Verfahren besser, wenn man vorher $x+\frac{b}{2a}=z$ setzt, und dadurch $\int \frac{Px+Q}{(ax^2+bx+c)^n} \cdot dx$ auf $\int \frac{P'z+Q'}{(az^2+p)^n} \cdot dz$ zurückführt. Dann kommt man von selbst darauf, daß sich dieser Bruch in zwei Brüche

$$\frac{P'z}{(az^2+p)^n} \cdot dz \quad \text{und} \quad \frac{Q'}{(az^2+p)^n} \cdot dz$$

zerlegt, und daß der erstere davon sich sogleich integrirt, wenn man

$$az^2+p=u, \quad \text{also} \quad 2az \cdot dz = du$$

nimmt. Wird zuletzt statt z wieder $x+\frac{b}{2a}$ gesetzt, so erhält man die Reduktions-Formel 1.) augenblicklich.

1) $$\int \frac{Px+Q}{(ax^2+bx+c)^n}\cdot dx$$
$$= \frac{1}{(n-1)(4ac-b^2)}\cdot\left[\frac{(2aQ-bP)x+(bQ-2cP)}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}\right.$$
$$\left.+(2n-3)(2aQ-bP)\int \frac{1}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}\cdot dx\right].$$

Setzt man nun hier $P=0$, $Q=1$, und $n-1$ statt n, so findet man hieraus

2) $$\int \frac{1}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}\cdot dx = \frac{1}{(n-2)(4ac-b^2)}$$
$$\times\left[\frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^{n-2}}+(2n-5)2a\int \frac{1}{(ax^2+bx+c)^{n-2}}\cdot dx\right].$$

Wird hier wieder $n-1$ statt n gesetzt, so führt sich die Integration von $\frac{1}{(ax^2+bx+c)^{n-2}}\cdot dx$ auf die Integration von $\frac{1}{(ax^2+bx+c)^{n-3}}\cdot dx$ zurück, u. s. f.; so daß man zuletzt auf das (im §. 6. N. 21. bereits gefundene) Integral $\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\cdot dx$ zurückgeführt wird, so oft, was hier vorausgesetzt werden mag, n eine positive ganze Zahl ist *).

---

*) Ist n eine gebrochene Zahl >1, so führen dieselben Formeln das Integral von $\frac{Px+Q}{(ax^2+bx+c)^n}\cdot dx$ zuletzt auf die Integration der Form $\frac{1}{(ax^2+bx+c)^\nu}\cdot dx$ zurück, wo aber $\nu<1$ ist. — So z. B. dienen die hiesigen Reduktions-Formeln 1.) und 2.), um

$$\int \frac{Px+Q}{(ax^2+bx+c)^2\cdot\sqrt{ax^2+bx+c}}\cdot dx$$

auf die Integration von $\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\cdot dx$ zurückzuführen, während diese letztere (im §. 6. N. 24.) bereits durchgeführt sich findet.

Beispiel. Es sey $\frac{3x^4-x+1}{(1+x^2)^3}\cdot dx$ zu integriren. — Man zerlege zuerst den Bruch in seine doppelten Partial-Brüche

$$\frac{Ax+B}{(1+x^2)^3}+\frac{A'x+B'}{(1+x^2)^2}+\frac{A''x+B''}{1+x^2}.$$

Nimmt man dazu den §. 10.) zu Hülfe, so hat man $x^2+px+q=x^2+1$, also $\alpha=0$, $\beta=1$; ferner $R_x=1$, also $r=1$, $r_I=0$; endlich $M_x=3x^4-x+1$, also $m=4$ und $m_I=-1$. — Die beiden Gleichungen zur Bestimmung von A und B (§. 10. NN. 4. 5.) geben daher jetzt, weil $r\alpha-r_I\beta=0$ und $r_I\alpha+r\beta=1$ wird, $B=4$ und $A=-1$, so daß der erste Partial-Bruch $=\frac{-x+4}{(1+x^2)^3}$ ist. Die Gleichung 6.) des §. 10.) giebt dann noch

$$M'_x=\frac{3x^4-x+1-(-x+4)}{x^2+1}=3x^2-3;$$

so daß zunächst gefunden ist

$$\frac{3x^4-x+1}{(1+x^2)^3}=\frac{-x+4}{(1+x^2)^3}+\frac{3x^2-3}{(1+x^2)^2}.$$

Wird nun dieser Werth von M'_x statt M_x, ferner A', B' statt A und B in die Gleichungen des §. 10.) substituirt, so erhält man auf's Neue $m=-6$, $m_I=0$; während r und r_I ihre Werthe behalten. Die Gleichungen (§. 10. NN. 4. u. 5.) geben nun $B'=-6$ und $A'=0$, so daß der zweite Partial-Bruch $=\frac{-6}{(1+x^2)^2}$ wird. Die Gleichung 6.) des §. 10.) giebt dann

$$M''_x=\frac{3x^2-3-(-6)}{x^2+1}=3.$$

Man hat also nun gefunden

$$\frac{3x^4-x+1}{(1+x^2)^3}=\frac{-x+4}{(1+x^2)^3}-\frac{6}{(1+x^2)^2}+\frac{3}{1+x^2}.$$

Und weil hier $R_x=1$ ist, so ist dieser dritte Bruch zu gleicher Zeit schon der gesuchte Partial-Bruch. — Wollte man aber das Verfahren des §. 10.) fortsetzen, so würde man auf's neue (indem M''_x statt M_x und A'', B'' statt A, B gesetzt werden) $m=3$, $m_I=0$; also $B''=3$ und $A''=0$ finden, während $M'''_x=0$ sich ergiebt. Der vierte Bruch wird daher $=0$.

Ist aber diese Zerlegung bewirkt, so kommen wir nun an die Integration dieser einzelnen Partial-Brüche. — Zunächst hat man (nach §. 11. II. 1.) wenn $n=3$, $P=-1$, $Q=4$, $a=c=1$, $b=0$ gesetzt wird,

$$\int\frac{-x+4}{(1+x^2)^3}\cdot dx=\frac{x+\frac{1}{4}}{(1+x^2)^2}+\int\frac{3}{(1+x^2)^2}\cdot dx.$$

Weil aber das obige $-\frac{6}{(1+x^2)^2}\cdot dx$ ebenfalls integrirt werden soll, so nimmt man es sogleich mit diesem letztern Integral zusammen und hat nun

$$\int\left(\frac{-x+4}{(1+x^2)^3}-\frac{6}{(1+x^2)^2}\right)\cdot dx=\frac{x+\frac{1}{4}}{(1+x^2)^2}+\int\frac{-3}{(1+x^2)^2}\cdot dx.$$

Wird nun (in §. 11. II. 1.) $n=2$, $P=0$, $Q=-3$, $a=c=1$, und $b=0$ gesetzt, so erhält man wieder

$$\int\frac{-3}{(1+x^2)^2}\cdot dx=\frac{-\frac{3}{2}x}{1+x^2}+\int\frac{-\frac{3}{2}}{1+x^2}\cdot dx.$$

Weil aber oben auch noch $\frac{3}{1+x^2}\cdot dx$ zu integriren steht, so hat man zuletzt

$$\int\frac{3x^4-x+1}{(1+x^2)^3}\cdot dx=\frac{x+\frac{1}{4}}{(1+x^2)^2}-\frac{\frac{3}{2}x}{1+x^2}+\int\frac{\frac{3}{2}}{1+x^2}\cdot dx,$$

$$\text{also}\quad=\frac{x+\frac{1}{4}}{(1+x^2)^2}-\frac{\frac{3}{2}x}{1+x^2}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{tg}x.$$

$$=\frac{-\frac{3}{2}x^3-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}}{(1+x^2)^2}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{tg}x\text{ *).}$$

Anmerkung. Ist

1) $N_x=(x-\alpha)^m\cdot R_x$,

so ist (nach I. Bd. §. 157. Anmerkung 2.)

$\partial^{m-\mu}N_\alpha=0$, $\partial^m N_\alpha=m!R_\alpha$ und $\partial^{m+\nu}N_\alpha=(m+\nu)^{mI-1}\partial^\nu R_\alpha$; also kann man R_α finden, ohne R_x selbst zu haben, indem man N_x m mal hinter einander nach x ableitet, dann α statt x setzt, und noch durch m! dividirt. Dies läßt sich bei der Zerlegung in Partial-Brüche, wobei man R_α immer braucht, zuweilen mit

---

*) Die Rechnungen des Textes vereinfachen sich, wenn man einen neuen Veränderlichen z dadurch einführt, daß man $x+\frac{b}{2a}=z$, also $x=z-\frac{b}{2a}$ und $\partial x_z=1$ setzt. Es wird dann $ax^2+bx+c=az^2+p$, wenn $\frac{4ac-b^2}{4a}=p$ gesetzt worden ist. Die zu integrirende Funktion verwandelt sich daher in eine andere von der Form $\frac{Pz+Q}{(az^2+p)^n}\cdot dz$, die zwar auf demselben Wege, aber in so fern einfacher integrirt wird, als der Koefficient von z^1 im Nenner, der Null gleich ist.

Vortheil anwenden, namentlich z. B. wenn bloß $N_x=(x-\alpha)\cdot R_x$ ist, wo man dann sogleich $\partial N_\alpha = R_\alpha$ findet.

Aber auch außerdem lassen sich diese Sätze (I. Bd. §. 157. Anmerkung 2.) zur Zerlegung in Partial-Brüche in Anwendung bringen. — Um die verschiedenen Formen, unter denen diese Anwendungen statt finden können, hervorzuheben, sey

$$2)\quad \frac{M_x}{N_x} \text{ in } \frac{A}{(x-\alpha)^3}+\frac{B}{(x-\alpha)^2}+\frac{C}{x-\alpha}+\frac{Z_x}{R_x}$$

zu zerlegen, wo also $N_x=(x-\alpha)^3\cdot R_x$ gedacht worden ist. Diese Gleichung giebt sogleich

$$3)\quad (x-\alpha)^3\cdot Z_x = M_x - AR_x - B(x-\alpha)R_x - C(x-\alpha)^2R_x.$$

Nimmt man nun von dieser Gleichung das erste, zweite Differential nach x, so erhält man (nach Anmerkung 2. zu §. 157. I. Bd.) für $x=\alpha$, außer

$$4)\quad 0 = M_\alpha - A\cdot R_\alpha,$$

welche aus der Gleichung 3.) selbst hervorgeht, noch

$$5)\quad 0 = \partial M_\alpha - A\cdot \partial R_\alpha - B\cdot R_\alpha,$$

$$6)\quad 0 = \partial^2 M_\alpha - A\cdot \partial^2 R_\alpha - B\cdot \partial R_\alpha - 2C\cdot R_\alpha;$$

woraus nun A, B, C gefunden werden können. Die Gleichung 3.) giebt dann Z_x dazu.

Dividirt man die Gleichung 3.) durch R_x, so erhält man

$$3')\quad (x-\alpha)^3\cdot\frac{Z_x}{R_x}=\frac{M_x}{R_x}-A-B(x-\alpha)-C(x-\alpha)^2.$$

Aus dieser Gleichung erhält man für $x=\alpha$ sogleich

$$4')\quad 0=\frac{M_\alpha}{R_\alpha}-A;$$

und wenn man die 3'.) nach x ableitet und dabei $x=\alpha$ setzt,

$$5')\quad 0=\partial\left(\frac{M_x}{R_x}\right)_\alpha - B.$$

Nimmt man aber von der Gleichung 3'.) sogleich links und rechts die zweiten Ableitungen nach x, für $x=\alpha$, so erhält man noch

$$6')\quad 0=\partial^2\left(\frac{M_x}{R_x}\right)_\alpha - 2C.$$

Diese Gleichungen 4′.), 5′.) und 6′.) geben nun wieder A, B und C, während die 3.) oder die 3′.) dann Z_x dazu zu liefern hat.

Dieselben Betrachtungen lassen sich auch bei der Zerlegung in doppelte Partial-Brüche in Anwendung bringen, weil der Nenner N_x dann die beiden Faktoren $(x-(\alpha+\beta i))^n$ und $(x-(\alpha-\beta i))^n$ hat; die eben gedachten Gleichungen daher alle doppelt erscheinen und deshalb auch eine doppelte Anzahl unbestimmter Koefficienten bestimmen.

Ist endlich $N_x = (px+q)^n \cdot R_x$,

so kann man $-\frac{q}{p} = \alpha$ setzen, und hat dann

$$N_x = (x-\alpha)^n \cdot p^n R_x;$$

und daher gilt das Vorstehende alles noch, nur daß $p^n R_x$ statt R_x zu stehen kommt.

Eben so kann man, wenn $N_x = (ax^2+bx+c)^n \cdot R_x$ seyn sollte, sogleich $\frac{b}{a} = p$, $\frac{c}{a} = q$ setzen, und man hat dann

$N_x = (x^2+px+q)^n \cdot a^n R_x$, so daß man die erstere Form immer auf diese letztere zurückführen kann, nur daß in der letztern Form, $a^n R_x$ der zweite Faktor von N_x ist, wenn man N_x als ein Produkt zweier Faktoren ansehen will, von welchem $(x^2+px+q)^n$ der erste Faktor ist.

§. 12.

Integration der irrationalen Funktionen.

I_a.) Enthält die zu integrirende Funktion bloß $a+bx$ unter dem Wurzel-Zeichen, und kommt bloß $(a+bx)^{\frac{m}{n}}$ allein vor, so setzt man

$$a+bx = z^n, \quad \text{also} \quad b \cdot \partial x_z = nz^{n-1},$$

und die neue Funktion (von z) wird rational.

Kommen aber $(a+bx)^{\frac{m}{n}}$ und $(a+bx)^{\frac{p}{q}}$ zugleich vor, so setzt man

$$a+bx=z^{nq}, \quad \text{also} \quad b\cdot dx=nqz^{nq-1}\cdot dz$$

und die neue Funktion (von z) wird rational.

Die rationalen Funktionen werden dann nach den vorhergehenden Paragraphen integrirt.

Beispiel 1. Ist z. B. $\int(3x^2-5x+8)\sqrt[3]{(5x+2)^2}\cdot dx=y$ zu finden, so setzt man $5x+2=z^3$; dann wird $\partial x_z=\frac{3z^2}{5}$, und $x=\frac{z^3-2}{5}$; ferner $3x^2-5x+8=\frac{1}{25}(3z^6-37z^3+262)$, $\sqrt[3]{(5x+2)^2}=z^2$; demnach findet sich (nach §. 4. N. 4.)

$$y=\tfrac{3}{125}\int(3z^{10}-37z^7+262z^4)\cdot dz=\tfrac{3}{125}(\tfrac{3}{11}z^{11}-\tfrac{37}{8}z^8+\tfrac{262}{5}z^5)$$
$$=\tfrac{3}{125}[\tfrac{3}{11}(5x+2)^3-\tfrac{37}{8}(5x+2)^2+\tfrac{262}{5}(5x+2)]\cdot\sqrt[3]{(5x+2)^2}.$$

Beispiel 2. Ist $\int\frac{1+\sqrt{x}-\sqrt[3]{x^2}}{1+\sqrt{x}}\cdot dx=y$ zu finden, so setzt man $x=z^6$, und hat dann $dx=6z^5\cdot dz$, $\sqrt{x}=z^3$, $\sqrt[3]{x}=z^2$, $\sqrt[3]{x^2}=z^4$; also

$$y=\int 6\frac{1+z^3-z^4}{1+z^2}z^5\cdot dz=6\int\frac{z^5+z^8-z^9}{1+z^2}\cdot dz.$$

Diese gebrochene rationale Funktion von z wird nun (nach §. 8.) integrirt, indem man (in so fern sie unächt gebrochen ist) die ganze Funktion herausdividirt, dann diese und die übrig bleibende ächt gebrochene Funktion, jede für sich integrirt. Man findet dann

$$y=6\int\left(-z^7+z^6+z^5-z^4+z^2-1+\frac{1}{1+z^2}\right)\cdot dz$$
$$=6\left(-\tfrac{1}{8}z^8+\tfrac{1}{7}z^7+\tfrac{1}{6}z^6-\tfrac{1}{5}z^5+\tfrac{1}{3}z^3-z+\frac{1}{tg}z\right)$$
$$=-\tfrac{3}{4}x\sqrt[3]{x}+\tfrac{6}{7}x\sqrt[6]{x}+x-\tfrac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}+2\sqrt{x}-6\sqrt[6]{x}+\frac{1}{tg}\sqrt[6]{x}.$$

Auf diesem Wege findet man namentlich sogleich noch folgende Resultate:

1) $$\int\frac{1}{\sqrt{a+bx}}\cdot dx=\frac{2}{b}\sqrt{a+bx};$$

2)

2) $$\int \frac{x}{\sqrt{a+bx}} \cdot dx = [\tfrac{1}{3}(a+bx)-a]\frac{2\sqrt{a+bx}}{b^2};$$

3) $$\int \frac{x^2}{\sqrt{a+bx}} \cdot dx = (\tfrac{8}{1\cdot 3}a^2 - \tfrac{4}{1\cdot 3}abx + \tfrac{1}{5}b^2x^2)\frac{2\sqrt{a+bx}}{b^3};$$

4) $$\int \frac{1}{x\sqrt{a+bx}} \cdot dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot log \frac{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}},$$

auch $$= \frac{2}{\sqrt{-a}} \cdot \frac{1}{tg} \frac{\sqrt{a+bx}}{\sqrt{-a}};$$

5) $$\int \frac{1}{(a+bx)^{\frac{3}{2}}} \cdot dx = -\frac{2}{b\sqrt{a+bx}};$$

6) $$\int \frac{x}{(a+bx)^{\frac{3}{2}}} \cdot dx = (2a+bx) \cdot \frac{2}{b^2\sqrt{a+bx}};$$

7) $$\int \frac{1}{x(a+bx)^{\frac{3}{2}}} \cdot dx = \frac{2}{a\sqrt{a+bx}} + \frac{1}{a}\int \frac{1}{x\sqrt{a+bx}} \cdot dx.$$

Diese letztere Formel ist, wie man sieht, eine Reduktions-Formel, welche dadurch unmittelbar gefunden wird, daß man

$$\frac{1}{x(a+bx)^{\frac{3}{2}}} \text{ in } \frac{1}{a}\left(\frac{a+bx}{x(a+bx)^{\frac{3}{2}}} - \frac{bx}{x(a+bx)^{\frac{3}{2}}}\right),$$

d. h. in $$\frac{1:a}{x\sqrt{a+bx}} - \frac{b:a}{(a+bx)^{\frac{3}{2}}}$$ verwandelt.

Da $\sqrt{a+bx} = \frac{a+bx}{\sqrt{a+bx}}$ und $x\sqrt{a+bx} = \frac{ax+bx^2}{\sqrt{a+bx}}$ ist, so können die Integrale dieser beiden Funktionen $\sqrt{a+bx}$ und $x\sqrt{a+bx}$ aus den Resultaten 1.—3.) zusammengesetzt werden.

I$_b$.) Enthält die zu integrirende Funktion eine oder mehrere Wurzeln aus $\frac{a+bx}{p+qx}$, — z. B. $\left(\frac{a+bx}{p+qx}\right)^{\frac{m}{n}}$; oder $\left(\frac{a+bx}{p+qx}\right)^{\frac{m}{n}}$ und noch $\left(\frac{a+bx}{p+qx}\right)^{\frac{\mu}{\nu}}$, — so wird sie dadurch rational gemacht, daß man im erstern Falle

$$\frac{a+bx}{p+qx} = z^n,$$

im andern Falle dagegen

$$\frac{a+bx}{p+qx} = z^{nv}$$

setzt.

Soll z. B. $\int \frac{x \cdot \sqrt[3]{(1+x)^2} \cdot \sqrt[3]{(1-x)}}{\sqrt{1+x} \cdot \sqrt[3]{(1-x)^2} - \sqrt[3]{(1+x)} \cdot \sqrt[6]{(1-x)^5}} \cdot dx = y$ ge-

funden werden, so kann man zuerst Zähler und Nenner durch $\sqrt{(1-x)} \cdot \sqrt[3]{(1-x)^2}$ wegdividiren, und man erhält

$$y = \int \frac{x \sqrt[3]{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}}{\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}} - \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} \cdot dx.$$

Nun setzt man $\frac{1+x}{1-x} = z^6$, also daß $x = \frac{z^6-1}{z^6+1}$ und $\partial x_z = \frac{12z^5}{(z^6+1)^2}$ wird. Dann erhält man

$$y = 12 \int \frac{z^{12}+z^{11}+z^{10}+z^9+z^8+z^7}{(z^6+1)^3} \cdot dz,$$

so daß nur noch diese ächt gebrochene Funktion zu integriren bleibt. Diese muß aber vorher in ihre Parzial-Brüche, und deshalb muß noch früher der Nenner z^6+1 in seine Faktoren zerlegt werden. Zu letzterem Behufe sucht man die sechs Werthe von z, welche $z^6+1=0$ machen, und welche $= \sqrt[6]{-1}$ d. h. (nach I. Bd. §. 86.) $= cos\frac{2n+1}{6}\pi + i \cdot sin\frac{2n+1}{6}\pi$ sind, wenn statt n nach und nach 0, −1, +1, −2, +2 und −3 gesetzt wird. Zieht man jeden dieser sechs Werthe von z ab, so hat man die sechs einfachen Faktoren von z^6+1; und multiplicirt man immer die zwei Faktoren mit einander, welche ein reelles Produkt geben, so erhält man die drei reellen doppelten Faktoren von z^6+1, nämlich

$$(z^2 - 2z \cdot cos\tfrac{1}{6}\pi + 1)(z^2+1)(z^2 + 2z \cdot cos\tfrac{1}{6}\pi + 1)^*).$$

---

*) Man konnte diese Faktoren auch bekommen, wenn man daran dachte, daß $\frac{u^3+1}{u+1} = u^2-u+1$ ist; denn dann wußte man, daß $\frac{z_6+1}{z^2+1} = z^4-z^2+1$ ist, und konnte u^2-u+1 oder z^4-z^2+1 auf's Neue zerlegen.

Der Nenner $(z^6+1)^3$ der zu integrirenden gebrochenen Funktion ist daher, wenn $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ statt $\cos\frac{1}{6}\pi$ gesetzt wird, $=(z^2+1)^3(z^2+z\sqrt{3}+1)^3(z^2-z\sqrt{3}+1)^3$. — Die gebrochene Funktion selbst wird nun (nach §. 10.) in neun Parzial-Brüche zerlegt, und dann werden diese Parzial-Brüche sämtlich (nach §. 11.) integrirt; und ganz zuletzt wird statt z wiederum sein Werth in x, nämlich $\sqrt[6]{\frac{1+x}{1-x}}$ substituirt.

I$_c$.) Man kann nun auch Funktionen integriren, welche $(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}$, $(a+bx^n)^{\frac{r}{s}}$ etc. etc. oder $\left(\frac{a+bx^n}{p+qx^n}\right)^{\frac{\mu}{\nu}}$, $\left(\frac{a+bx^n}{p+qx^n}\right)^{\frac{r}{s}}$ etc. etc. enthalten, sobald solche nur auch den Faktor x^{n-1} noch haben; weil man dann solche sogleich auf die vorhergehenden Fälle zurückführt, sobald $x^n=z$ gesetzt wird. (Vgl. die Note zu §. 6.)

II. Kommt in einer zu integrirenden Funktion die Quadrat-Wurzel $\sqrt{ax^2+bx+c}$ ein oder mehreremale und außer ihr, keine andere Wurzel mehr vor, so macht man diese Funktion auf drei verschiedene Arten rational.

1) Einmal setzt man $\sqrt{ax^2+bx+c}=x\sqrt{a}+z$, erhält dann $bx+c=2xz\sqrt{a}+z^2$, also $x=\frac{z^2-c}{b-2z\sqrt{a}}$ und $dx=\frac{-2z^2\sqrt{a}+2bz-2c\sqrt{a}}{(b-2z\sqrt{a})^2}\cdot dz$; und die zu integrirende irrationale Funktion reducirt sich nach §. 4. N. 4.) auf eine rationale von z, welche nach den §§. 7.—11.) integrirt werden kann. Dies Verfahren wird man in der Regel dann anwenden, wenn a positiv ist*).

---

*) Man würde hier wohl thun, vorher $\sqrt{a}\cdot\sqrt{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}}$ statt $\sqrt{ax^2+bx+c}$ zu schreiben, damit, indem $\frac{b}{a}=p$ und $\frac{c}{a}=q$ gesetzt wird, bloß $\sqrt{x^2+px+q}$ vorkommt. Dann setzt man natürlich bloß $\sqrt{x^2+px+q}=x+z$, und die Rechnungen machen sich bequemer.

2) Hernach kann man auch $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{c}+xz$ setzen. Man erhält dann $ax^2+bx = 2xz\sqrt{c}+x^2z^2$, kann durch x wegdividiren, und erhält wiederum x und dx in z und dz ohne Wurzel. — Dies Verfahren wird man in der Regel dann anwenden, wenn c positiv ist *).

3) Endlich kann man ax^2+bx+c in die Faktoren $a(x-\alpha)(x-\beta)$ zerlegen (wo α und β die beiden Werthe von x sind, welche ax^2+bx+c der Null gleich machen, und dann setzt man $\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-\alpha)z$. — Daraus folgt, wenn man quadrirt und durch $x-\alpha$ dividirt, $a(x-\beta) = (x-\alpha)z^2$; also werden x und dx in z und dz wiederum ohne Wurzel ausgedrückt, und dies letztere (da auch jedesmal $\sqrt{ax^2+bx+c}$ in z ohne Wurzel ausgedrückt erscheint) bewirkt, daß die neue zu integrirende Funktion in z, rational wird, und daher nach den §§. 7.—11.) integrirt werden kann. — Dies Verfahren kann man gleich bequem anwenden, es mag a positiv oder negativ seyn, wenn nur α und β reell sind.

Man integrire nun danach das einfachste aller hieher gehörigen Beispiele, nämlich $\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\cdot dx$ oder $\frac{1}{\sqrt{-ax^2+bx+c}}\cdot dx$, und sehe zu, ob jedesmal das Resultat N. 24.) oder N. 20.) des §. 6.) sich ergiebt (indem nämlich daselbst a mit c vertauscht wird), oder ob doch ein Resultat kommt, welches von jenem nur um eine Constante verschieden ist.

Vor allen diesen Rechnungen kann man aber allemal erst $x+\frac{b}{2a} = z$ setzen, damit die $\sqrt{ax^2+bx+c}$ in $\sqrt{az^2+p}$ übergehe, welche letztere in so fern einfacher ist, als der Koefficient von z^1 in ihr der Null gleich ist.

III. Kämen in einer Funktion, die integrirt werden soll,

---

*) Man würde aber vorher lieber $\sqrt{c}\cdot\sqrt{\left(\frac{a}{c}x^2+\frac{b}{c}x+1\right)}$ statt $\sqrt{ax^2+bx+c}$ schreiben, damit bloß $\sqrt{px^2+qx+1}$ vorkäme, um nachher $\sqrt{px^2+qx+1} = 1+xz$ setzen zu können. Dadurch würde vermieden, daß in den Rechnungen nicht immer $\sqrt{c}$ mit fortgeschleppt würde.

die beiden Wurzeln $\sqrt{a+bx}$ und $\sqrt{p+qx}$ vor, welche verschiedene Radikanden vom ersten Grade haben, so würde man $\sqrt{a+bx} = z\sqrt{p+qx}$ setzen, hätte dann $a+bx = z^2(p+qx)$, also $x = \frac{pz^2-a}{b-qz^2}$ und $dx = \frac{2(bp-aq)z}{(b-qz^2)^2}\cdot dz$. Es werden also x und dx rational in z und dz ausgedrückt; dagegen kommt statt $\sqrt{a+bx}$ jetzt $z\sqrt{p+qx}$, so daß $\sqrt{p+qx}$ mehreremale vorkommen kann. Setzt man aber statt x seinen Werth in z, so erhält man $\sqrt{p+qx} = \frac{\sqrt{bp-aq}}{\sqrt{b-qz^2}}$; und so sieht sich also die Integration des jetzigen Falles, weil in der nun zu integrirenden Funktion, $\sqrt{b-qz^2}$ vorkommt, auf den Fall II.) zurückgeführt. — Hinsichtlich des Falles, wo $(a+bx)^{\frac{m}{n}}$ und $(p+qx)^{\frac{\mu}{\nu}}$ vorkommen, s. §. 14.).

IV. Enthält aber die zu integrirende Funktion zwei solche Quadrat-Wurzeln wie $\sqrt{a+bx+cx^2}$ und $\sqrt{p+qx+rx^2}$ mit verschiedenen Radikanden vom zweiten Grade, so ist sie in seltenen Fällen nur rational zu machen (d. h. das Integral dieser Funktion wird dann nur höchst selten auf die Integration einer rationalen Funktion von z zurückgeführt werden können).

Ist in's Besondere

$$\sqrt{a+bx+cx^2}\cdot\sqrt{p+qx+rx^2} = \sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4},$$

oder ist

$$\frac{\sqrt{a+bx+cx^2}}{\sqrt{p+qx+rx^2}} = \frac{a+bx+cx^2}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4}}$$

zu integriren, so sind dies zwei besondere Fälle des allgemeinern Problems, wo

1) $$\frac{f_x}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4}}\cdot dx$$

integrirt werden soll, während f_x eine gegebene algebraische ra-

tionale (ganze oder gebrochene) Funktion von x vorstellt. — Mit diesem Integral hat man sich unter dem Namen der elliptischen Transcendenten vielfältig beschäftigt, weil man sowohl bei Bestimmung der elliptischen Bogen, als auch an mehreren Stellen der Mechanik des Himmels und sonst noch, darauf zurück kommt. Deshalb mögen hier noch einige Worte darüber stehen.

Man hat zuerst $x = \frac{p+qy}{1+y}$ gesetzt, p und q vorläufig unbestimmt gelassen, dann aber p und q so bestimmt, daß die nach §. 4.) N. 4.) statt findende Integration das Integral von 1.) auf das Integral von

$$2) \qquad \frac{P_y}{\sqrt{\alpha+\beta y^2+\gamma y^4}} \cdot dy$$

zurückbringt, wo P_y irgend eine bekannte algebraische rationale ganze oder gebrochene Funktion von y ist, welche eben deshalb allemal in der Form $\frac{S+Ty}{U+Vy}$, und deshalb wiederum in der Form

$$\frac{SU-TVy^2}{U^2-V^2y^2} + \frac{TU-SV}{U^2-V^2y^2} \cdot y$$

geschrieben werden kann, wo S, T, U, V bloß y^2 und nicht y selbst enthalten. Dadurch zerlegt sich aber die Funktion 2.) in zwei Funktionen, deren letztere integrirt werden kann, wenn man $y^2 = z$ setzt, also daß bloß noch eine Funktion von y^2, nämlich

$$3) \qquad \frac{Q}{\sqrt{\alpha+\beta y^2+\gamma y^4}} \cdot dy$$

nach y zu integriren bleibt, wo Q bloß y^2 enthält, und nicht y selbst.

Nun findet man zwei Reduktions-Formeln, durch welche einmal $\int \frac{y^{2m}}{\sqrt{\alpha+\beta y^2+\gamma y^4}} \cdot dy$ auf die Integrale

$\int \frac{y^{2m-2}}{\sqrt{\alpha+\beta y^2+\gamma y^4}} \cdot dy$ und $\int \frac{y^{2m-1}}{\sqrt{\alpha+\beta y^2+\gamma y^4}} \cdot dy$

und dann noch $\int \frac{1}{(y^2+a)^n \cdot \sqrt{\alpha+\beta y^2+\gamma y^4}} \cdot dy$ auf zwei diesem ganz analoge Integrale zurückgebracht sich sehen, in denen jedoch der Exponent n immer kleiner wird.

Dadurch aber reducirt sich das Integral 3.), es mag Q eine ganze oder eine gebrochene Funktion von y^2 seyn, allemal auf eines der drei Integrale

4) $\int \frac{1}{\sqrt{\alpha+\beta y^2+\gamma y^4}} \cdot dy;$ $\int \frac{y^2}{\sqrt{\alpha+\beta y^2+\gamma y^4}} \cdot dy$

und $\int \frac{1}{(y^2+a) \cdot \sqrt{\alpha+\beta y^2+\gamma y^4}} \cdot dy,$

welche in endlicher (geschlossener) Form nicht gefunden werden können und welche nun noch näher behandelt werden müssen, bei welchen jedoch der Nenner leicht noch die Form $\sqrt{(1-p^2y^2)(1-q^2y^2)}$ annehmen kann, indem man $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ als einen constanten Faktor herausetzt.

Macht man nun $py = \sin\varphi$, so reduciren sich die drei Integrale 4.) auf

5) $\int \frac{A+B \cdot \sin\varphi^2}{C+D \cdot \sin\varphi^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-e^2 \cdot \sin\varphi^2}} \cdot d\varphi;$

und alle, in dieser Form 5.) steckenden Integrale belegt Legendre mit dem Namen der elliptischen Transcendenten.

Mit diesen elliptischen Transcendenten haben sich aber vorzüglich Euler, Lagrange, Legendre und in der neuesten Zeit Abel und Jacobi beschäftigt. — Alle diese Arbeiten sind reich an analytischen Ideen, an neuen Methoden und Hülfsmitteln, und sind daher zum Studium sehr zu empfehlen. — Für unsere hiesigen Zwecke glauben wir aber genug gesagt zu haben.

Auf das hier in Rede stehende Integral, also auf die elliptischen Transcendenten, lassen sich noch zurückführen die Integrale von

$$P_x \cdot \frac{\sqrt{a+bx+cx^2}}{\sqrt{a'+b'x+c'x^2}} \cdot dx, \quad \frac{P_x}{\sqrt{\alpha+\beta x^2+\gamma x^4+\delta x^6}} \cdot dx, \quad \frac{P_x}{\sqrt[4]{\alpha+\beta x^2+\gamma x^4}} \cdot dx,$$

$$P_x \cdot \sqrt[4]{\alpha+\beta x^2+\gamma x^4} \cdot dx, \quad P_x \cdot (\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3)^{\pm\frac{1}{3}} \cdot dx,$$

$$\frac{P_x}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\gamma x^4+\beta x^5+\alpha x^6}} \cdot dx, \quad \frac{P_x}{\sqrt{\beta+\gamma x^2+\delta x^4+\gamma x^6+\beta x^8}} \cdot dx,$$

u. d. gl. m., wo P_x eine rationale Funktion von x ist.

V. Von der Integration noch anderer irrationalen Funktionen in endlicher Form läßt sich im Allgemeinen fast gar nichts sagen, während die Grenzen dieses Werkes uns verbieten in die Betrachtung einzelner Fälle, die manchmal fast nur einzelne Beispiele genannt werden können, noch mehr einzugehen. Wir werden jedoch im §. 14.) einen hieher gehörigen Fall noch näher betrachten.

§. 13.

Reduktionsformeln für die Integration von Funktionen, welche $\sqrt{a+bx+cx^2}$ enthalten.

In vielen Fällen ist es vortheilhafter, statt direkt zu integriren, das gesuchte Integral mittelst Reduktionsformeln auf ein schon bekanntes zurückzuführen. — Namentlich sind für den Fall §. 12. II.) nachstehende Formeln bequem, nämlich

1) $$\int \frac{x}{\sqrt{a+bx+cx^2}} \cdot dx \; *)$$

$$= \frac{1}{c}\sqrt{a+bx+cx^2} - \frac{b}{2c}\int \frac{1}{\sqrt{a+bx+cx^2}} \cdot dx;$$

---

*) Differenziirt man nämlich $\sqrt{a+bx+cx^2}$, so erhält man

$$\partial(\sqrt{a+bx+cx^2})_x = \frac{\frac{1}{2}b}{\sqrt{a+bx+cx^2}} + \frac{cx}{\sqrt{a+bx+cx^2}};$$

und diese Gleichung giebt die obige 1.); wenn man links und rechts die Integrale nach x nimmt.

2) $$\int \frac{x^2}{\sqrt{a+bx+cx^2}} \cdot dx \;^*)$$

$$= \frac{2cx-3b}{4c^2}\sqrt{a+bx+cx^2} + \left(\frac{3b^2}{8c^2} - \frac{a}{2c}\right)\int \frac{1}{\sqrt{a+bx+cx^2}} \cdot dx;$$

3) $$\int \frac{x^m}{\sqrt{a+bx+cx^2}} \cdot dx \;^{**}) = \frac{1}{mc} x^{m-1}\sqrt{a+bx+cx^2}$$

$$- \frac{(m-\frac{1}{2})b}{mc}\int \frac{x^{m-1}}{\sqrt{a+bx+cx^2}} \cdot dx$$

$$- \frac{(m-1)a}{mc}\int \frac{x^{m-2}}{\sqrt{a+bx+cx^2}} \cdot dx.$$

Mittelst dieser Formeln wird das Integral von

$$\frac{p+qx+rx^2+sx^3+\cdots}{\sqrt{a+bx+cx^2}} \cdot dx$$

und auch von

$$(p+qx+rx^2+\cdots)\sqrt{a+bx+cx^2} \cdot dx$$

(in so fern letzteres in $\frac{(p+qx+rx^2+\cdots)(a+bx+cx^2)}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$

sich verwandeln läßt) auf

$$\int \frac{1}{\sqrt{a+bx+cx^2}} \cdot dx$$

zurückgeführt.

Ferner findet man noch

---

*) Differenziirt man $x \cdot \sqrt{a+bx+cx^2}$, so erhält man

$$\partial(x \cdot \sqrt{a+bx+cx^2})_x = \frac{a+\frac{3}{2}bx+2cx^2}{\sqrt{a+bx+cx^2}}.$$

Schreibt man hier den Bruch zur Rechten als die Summe dreier Brüche, nimmt man links und rechts die Integrale und setzt man auch statt $\int \frac{x}{\sqrt{a+bx+cx^2}} \cdot dx$ seinen Werth aus 1.), so erhält man sogleich die 2.).

**) Diese Formel erhält man, wenn $x^{m-1}\sqrt{a+bx+cx^2}$ differenziirt, und dabei auf analoge Weise verfahren wird.

4) $$\int \frac{1}{x\cdot\sqrt{a+bx+cx^2}}\cdot dx$$ *)

$$= \frac{1}{\sqrt{a}}\cdot log\ \frac{2a+bx-2\sqrt{a}\cdot\sqrt{a+bx+cx^2}}{x}$$

auch $$= \frac{1}{\sqrt{-a}}\cdot\frac{1}{tg}\ \frac{a+\frac{1}{2}bx}{\sqrt{(-a)}\cdot\sqrt{a+bx+cx^2}}\cdot$$

Ueberhaupt kann man dadurch, daß man $\frac{1}{x}=z$ setzt, die Integration von $\frac{p+qx+rx^2+\cdots}{x\sqrt{a+bx+cx^2}}$ und auch von $\frac{(p+qx+rx^2\cdots)\sqrt{a+bx+cx^2}}{x}$ auf das Integral

$\int \frac{1}{\sqrt{a+bx+cx^2}}\cdot dx$ in den N.N. 20.) und 24.) des §. 6.) zurückführen, wenn man die vorstehenden Reduktions-Formeln zu Hülfe nimmt.

§. 14.

Integration des irrationalen Binomiums $x^{m-1}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}.dx$ oder $(ay+b)^{\frac{\mu}{\nu}}(py+q)^{\frac{m}{n}}.dy.$

Wir wollen noch die Integration der Funktion von der Form

⊙) $$x^{m-1}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}\cdot dx$$

(die man auch auf die Form $(\alpha y+\beta)^{\frac{\mu}{\nu}}(\gamma y+\delta)^{\frac{\pi}{\varrho}}\cdot dy$ zurück-

---

*) Man findet dies, wenn man $\frac{1}{x}=z$ setzt, so daß $dx=-\frac{1}{z^2}\cdot dz$ wird. Dadurch reducirt sich nämlich das in Rede stehende Integral sogleich auf die N.N. 20.) oder 24.) des §. 6.).

führen kann) näher betrachten, wobei wir m und n positiv oder negativ ganz voraussetzen *).

I. Zunächst setze man $a+bx^n=z^q$; man erhält dann $x^n=\frac{z^q-a}{b}$, also $x^m=b^{-\frac{m}{n}}\cdot(z^q-a)^{\frac{m}{n}}$, und

$$x^{m-1}\cdot dx=\frac{q}{n}b^{-\frac{m}{n}}\cdot(z^q-a)^{\frac{m}{n}-1}\cdot z^{q-1}\cdot dz,$$

und die gegebene Funktion ⊙.) geht dadurch in diese:

$$\text{(}\mathbb{C}\text{)}\qquad \frac{q}{n}b^{-\frac{m}{n}}\cdot z^{p+q-1}(z^q-a)^{\frac{m}{n}-1}\cdot dz$$

über. — Trifft sich's nun zufällig, daß $\frac{m}{n}$ eine positive oder

---

*) Wäre zu integriren $x^{\frac{1}{2}}(a+bx^{\frac{1}{2}})^{\frac{p}{q}}\cdot dx$, so würde man $x=z^6$ setzen, so daß $x^{\frac{1}{3}}=z^2$, $x^{\frac{1}{2}}=z^3$ und $dx=6z^5\cdot dz$ würde. Dann würde man erhalten (nach §. 4. N. 4.) $\int x^{\frac{1}{3}}(a+bx^{\frac{1}{2}})^{\frac{p}{q}}\cdot dx=6\int z^7(a+bx^3)^{\frac{p}{q}}\cdot dz$, und diese letztere Funktion wäre in der obigen $x^{m-1}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}\cdot dx$ enthalten.

Und wäre $x^{m-1}(a+bx^{-n})^{\frac{p}{q}}\cdot dx$ zu integriren, so würde man $x=\frac{1}{z}$ setzen, so daß $dx=-\frac{1}{z^2}\cdot dz$, und $x^{-n}=z^n$, $x^{m-1}=z^{-m+1}$ wird. Dann hat man $\int x^{m-1}(a+bx^{-n})^{\frac{p}{q}}\cdot dx=-\int z^{-m-\frac{np}{q}-1}(b+az^n)^{\frac{p}{q}}\cdot dz$, weshalb man oben n positiv voraussetzen konnte und doch auch den Fall mit behandelt hätte, in welchem n negativ seyn sollte.

Und hätte man

$$x^{m-1}(ax^r+bx^n)^{\frac{p}{q}}\cdot dx$$

zu integriren, so würde man solcher Funktion die Form

$$x^{m+\frac{pr}{q}-1}(a+bx^{n-r})^{\frac{p}{q}}\cdot dx$$

geben, um sie in die obige Form eingehen gemacht zu haben.

negative ganze Zahl ist, so ist diese letztere Funktion rational *), und kann nach den vorhergehenden Paragraphen integrirt werden.

Ist z. B. $\int x^9 \cdot (a+bx^3)^{\frac{p}{q}} \cdot dx$ zu finden, so ist hier $m=9$, $n=3$, also $\frac{m}{n}$ eine positive ganze Zahl (3). Die Funktion (C.) wird nun

$$\frac{q}{3b^3} z^{p+q-1}(z^q-a)^2 \cdot dz$$

und kann ohne Weiteres integrirt werden.

II. Ein andermal kann man

$x^{m-1} \cdot (a+bx^n)^{\frac{p}{q}} \cdot dx$ auch so schreiben:

$$x^{m+\frac{np}{q}-1} \cdot (ax^{-n}+b)^{\frac{p}{q}} \cdot dx;$$

dann aber $ax^{-n}+b=z^q$ setzen, oder, mit andern Worten in der Form (C.) $-n$ statt n, ferner a und b statt b und a, endlich $m+\frac{np}{q}$ statt m; und man hat

$$\int x^{m-1} \cdot (a+bx^n)^{\frac{p}{q}} \cdot dx = -\frac{q}{na} \int z^{p+q-1} \left(\frac{z^q-b}{a}\right)^{-\frac{m}{n}-\frac{p}{q}-1} \cdot dz.$$

Trifft es sich also zufällig, daß $\frac{m}{n}+\frac{p}{q}$ eine positive oder negative ganze Zahl ist, so hat man durch diese Substitution die zu integrirende irrationale Funktion in eine rationale umgewandelt.

Ist z. B. $\int x^4(a+bx^3)^{\frac{1}{3}} \cdot dx$ zu integriren, so hat man $m=5$,

---

*) Ein besonderer Fall ist es, wenn $m=n$ ist; es findet sich dann

$$\int x^{n-1}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}} \cdot dx = \frac{q}{nb} \int z^{p+q-1} \cdot dz$$

$$= \frac{qz^{p+q}}{nb(p+q)}$$

$$= \frac{q}{nb(p+q)}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}+1}.$$

$n=3$, $p=1$, $q=3$; also $\frac{m}{n}+\frac{p}{q}=2$; folglich, wenn $ax^{-3}+b=z^3$ gesetzt wird,

$$\int x^4(a+bx^3)^{\frac{1}{3}}\cdot dx=-a^2\int\frac{z^3}{(z^3-b)^3}\cdot dz,$$

welche letztere Funktion in Partial-Brüche zerlegt, und dann integrirt wird.

III. Und wiederum versucht man es und setzt, wenn $x^{m-1}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}\cdot dx$ integrirt werden soll, $x^n=y$; und man hat $x^m=y^{\frac{m}{n}}$, $mx^{m-1}\cdot dx=\frac{m}{n}y^{\frac{m}{n}-1}\cdot dy$.

Dadurch erhält man

$$\int x^{m-1}(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}.dx=\frac{1}{n}\int y^{\frac{m}{n}-1}\cdot(a+by)^{\frac{p}{q}}\cdot dy.$$

Dieses Integral zur Rechten läßt sich nun auf andere Integrale zurückführen von derselben Form, in welchen aber nach und nach der Exponent von y, oder der Exponent von $a+by$, oder alle beide immer einfacher und einfacher, also zuletzt entweder $+1$ oder -1, oder doch eine ächte gebrochene Zahl wird, die positiv oder negativ aber absolut <1 ist. Dieses letztere Integral ist dann entweder schon früher gefunden oder sonst noch einer Behandlung fähig.

Weil aber dieses Integral nach y in dem nachstehenden etwas allgemeineren, nämlich in

$$\int(ay+b)^m\cdot(py+q)^n\cdot dy$$

enthalten ist, wenn man sich m und n hier beliebig positiv oder negativ, ganz oder gebrochen denkt, so wollen wir die gedachten Reduktionsformeln für das letztere hinstellen. Man findet nämlich

$$1)\quad \int(ay+b)^m(py+q)^n\cdot dy=\frac{(ax+b)^m(py+q)^{n+1}}{(n+1)p}$$
$$-\frac{ma}{(n+1)p}\int(ay+b)^{m-1}(py+q)^{n+1}\cdot dy;$$

$$2)\quad \int (ay+b)^m (py+q)^n \cdot dy = \frac{(ay+b)^{m+1}(py+q)^n}{(m+1)a} - \frac{np}{(m+1)a} \int (ay+b)^{m+1}(py+q)^{n-1} \cdot dy;$$

$$3)\quad \int (ay+b)^m (py+q)^n \cdot dy = \frac{(ay+b)^m (py+q)^{n+1}}{(m+n+1)p} - \frac{m(aq-bp)}{(m+n+1)p} \int (ay+b)^{m-1}(py+q)^n \cdot dy;$$

$$4)\quad \int (ay+b)^m (py+q)^n \cdot dy = \frac{(ay+b)^{m+1}(py+q)^n}{(m+n+1)a} - \frac{n(bp-aq)}{(m+n+1)a} \int (ay+b)^m (py+q)^{n-1} \cdot dy;$$

$$5)\quad \int (ay+b)^m (py+q)^n \cdot dy = \frac{(ay+b)^{m+1}(py+q)^{n+1}}{(m+1)(aq-bp)} - \frac{(m+n+2)p}{(m+1)(aq-bp)} \int (ay+b)^{m+1}(py+q)^n \cdot dy;$$

$$6)\quad \int (ay+b)^m (py+q)^n \cdot dy = \frac{(ay+b)^{m+1}(py+q)^{n+1}}{(n+1)(bp-aq)} - \frac{(m+n+2)a}{(n+1)(bp-aq)} \int (ay+b)^m (py+q)^{n+1} \cdot dy.$$

Die 1.) und 2.) bekommt man durch unmittelbares theilweises Integriren, d. h. unmittelbar durch Anwendung der Formel §. 4. N. 3.), indem man daselbst abwechselnd $(ay+b)^m$ oder $(py+q)^n$ statt ψ setzt (so wie y statt x). — Nun kann man aber die Funktion $(ay+b)^{m-1}(py+q)^{n+1}$ zerlegen in $(py+q)\cdot(ay+b)^{m-1}(py+q)^n$ und dann in

$$\left[\frac{p}{a}(ay+b)+q-\frac{bp}{a}\right]\cdot(ay+b)^{m-1}(py+q)^n,$$

also in

$$\frac{p}{a}(ay+b)^m(py+q)^n + \frac{aq-bp}{a}(ay+b)^{m-1}(py+q)^n,$$

so daß das Integral der Funktion $(ay+b)^{m-1}(py+q)^{n+1}\cdot dx$ gleich ist der Summe der Integrale aus den beiden letztern Funktionen. Substituirt man dies in die 1.), so erhält man die 3.), also auch die 4.) (in so fern die 4.) aus der 3.) hervorgeht, wenn man m mit n, a mit p, und b mit q vertauscht).

Setzt man endlich in die 3.) jetzt $m+1$ statt m, und findet man dann

das zur Rechten entstehende Integral durch das zur Linken ausgedrückt, so hat man die 5.), also auch die 6.) (in so fern nämlich die 2.), 4.), 6.) aus den 1.), 3.), 5.) hervorgehen, wenn man m mit n, a mit p, und b mit q vertauscht.

Cauchy leitet diese Reduktions-Formeln alle durch ein und dasselbe Verfahren ab, nämlich dadurch daß er die Formel

$$\int u \cdot dv = uv - \int v \cdot du$$

in dieser Form hinstellt:

$$\int uv \cdot d(log\, v) = uv - \int uv \cdot d(log\, u),$$

und nun statt u und v solche Potenzen je zweier der drei Ausdrücke $ay+b$, $py+q$, $\frac{ay+b}{py+q}$ setzt, daß $\int uv \cdot d(log\, v)$ allemal das verlangte $\int (ay+b)^m (py+q)^n \cdot dy$ wird.

Die Formel 1.) wird man anwenden, wenn m positiv, n negativ ist; die 2.) dagegen, wenn m negativ, n aber positiv ist. — Die 3.) und 4.) werden abwechselnd mit Erfolg angewandt, wenn m und n beide positiv sind. — Und die Formeln 5.) und 6.) sind eben so abwechselnd anzuwenden, wenn m und n beide negativ seyn sollten. — Dann erhält man nämlich nach und nach immer absolut niedrigere, positive oder negative Exponenten, bis man, wenn m und n ganze Zahlen sind, auf Null-Exponenten, oder doch auf -1 oder $+1$ als Exponent stößt; — oder, wenn m oder n gebrochen ist, auf Exponenten, welche positiv oder negativ sind, dagegen absolut zwischen 0 und 1 liegen. Diese letztern Integrale können dann oft mittelst unendlicher Reihen gefunden werden.

IV. Setzt man in diesen Reduktions-Formeln $y = z^v$ also $dy = vz^{v-1}dz$, so wie $p = 1$ und $q = 0$, so gehen sie in unmittelbar brauchbare Reduktions-Formeln für $z^\mu (az^v + b)^n \cdot dz$ über, d. h. für die Form ⊙.), mit welcher wir diesen Paragraphen eröffnet haben. Wir wollen auch von diesen noch die brauchbarsten hersetzen. Sie sind:

1) $$\int x^{m-1}(a+bx^n)^p \cdot dx$$
$$= \frac{x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1}}{b(pn+m)} - \frac{a(m-n)}{b(pn+m)} \int x^{m-n-1}(a+bx^n)^p \cdot dx;$$

2) $\int x^{m-1}(a+bx^n)^p \cdot dx$

$$= \frac{x^m(a+bx^n)^p}{pn+m} - \frac{pna}{pn+m}\int x^{m-1}(a+bx^n)^{p-1} \cdot dx;$$

3) $\int x^{-m-1}(a+bx^n)^p \cdot dx$

$$= -\frac{x^{-m}(a+bx^n)^{p+1}}{am} - \frac{b(m-n-np)}{am}\int x^{-m+n-1}(a+bx^n)^p \cdot dx;$$

4) $\int x^{m-1}(a+bx^n)^{-p} \cdot dx$

$$= \frac{x^m(a+bx^n)^{-p+1}}{(p-1)na} - \frac{m+n-np}{(p-1)na}\int x^{m-1}(a+bx^n)^{-p+1} \cdot dx.$$

So oft aber in allen diesen Formeln (in III. und IV.) der Nenner Null wird, so oft sind sie nicht mehr brauchbar. In der Regel sind dies aber gerade die einfacheren Fälle, in denen eine unmittelbare Integration möglich, eine Reduktion also unnöthig ist *).

Beispiel 1. Es sey $\int \frac{x^{m-1}}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx$ zu integriren, wenn m eine positive ganze Zahl ist. — Die Formel IV. 1.) giebt sogleich für $a=1$, $b=-1$, $n=2$, $p=-\frac{1}{2}$, und wenn man $m+1$ statt m setzt

$$(\text{ⓐ}) \cdots \int \frac{x^m}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx = -\frac{x^{m-1}\sqrt{1-x^2}}{m} + \frac{m-1}{m}\int \frac{x^{m-2}}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx.$$

Setzt man hier statt m nach und nach 3, 5, 7, etc. etc., so erhält man

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx = -\tfrac{1}{3}x^2\sqrt{1-x^2} + \tfrac{2}{3}\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx;$$

$$\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx = -\tfrac{1}{5}x^4\sqrt{1-x^2} + \tfrac{4}{5}\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx;$$

$$\int \frac{x^7}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx = -\tfrac{1}{7}x^6\sqrt{1-x^2} + \tfrac{6}{7}\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx;$$

u. s. w. f.

Sub-

*) Daß man diese Reduktions-Formeln 1.—4.) auch unmittelbar aus $\int u \cdot dv = uv - \int v \cdot du$ ableiten könne, wenn man noch ähnliche Hülfsmittel anwendet, wie in III.) sie gebraucht worden sind, versteht sich von selbst.

Subſtituirt man dieſe Werthe von oben in die unteren Gleichungen, ſo ergiebt ſich zuletzt noch, wegen

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx = -\sqrt{1-x^2};$$

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx = -\left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{1\cdot 3}\right)\sqrt{1-x^2};$$

$$\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx = -\left(\frac{1}{5}x^4 + \frac{4}{3\cdot 5}x^2 + \frac{2\cdot 4}{1\cdot 3\cdot 5}\right)\sqrt{1-x^2};$$

$$\int \frac{x^7}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx = -\left(\frac{1}{7}x^6 + \frac{6}{5\cdot 7}x^4 + \frac{4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}x^2 + \frac{2\cdot 4\cdot 6}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}\right)\sqrt{1-x^2};$$

u. ſ. w. f.

Setzt man aber in die obige Reduktions-Formel ☉.) ſtatt m die geraden Werthe 2, 4, 6, 8, etc. etc., ſo erhält man ganz auf analoge Weiſe, wegen

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx = \frac{1}{sin}x, \text{ ſogleich noch}$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx = -\tfrac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{sin}x;$$

$$\int \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx = -\left(\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2\cdot 4}x\right)\sqrt{1-x^2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{sin}x;$$

$$\int \frac{x^6}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx = -\left(\frac{1}{6}x^5 + \frac{5}{4\cdot 6}x^3 + \frac{3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x\right)\sqrt{1-x^2} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{sin}x;$$

u. ſ. w. f.

Beiſpiel 2. Soll $\int \frac{x^{-m}}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx$ gefunden werden, ſo ſetze man in der Formel IV. 3.) $a=1$, $b=-1$, $n=2$ und $m-1$ ſtatt m, und man erhält

$$(\varphi)\cdots \quad \int \frac{1}{x^m\sqrt{1-x^2}} \cdot dx = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{(m-1)x^{m-1}} + \frac{m-2}{m-1}\int \frac{dx}{x^{m-2}\sqrt{1-x^2}}.$$

Dadurch führt ſich das gegebene Integral auf $\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} \cdot dx$ zurück, welches letztere alſo gefunden werden muß. Setzt man aber $\sqrt{1-x^2}=z$, ſo wird $-\frac{x\cdot dx}{\sqrt{1-x^2}} = dz$, alſo $\frac{dx}{x\cdot\sqrt{1-x^2}} = -\frac{dz}{x^2} = -\frac{dz}{1-z^2}$, ſo daß man hat

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} \cdot dx = -\int \frac{1}{1-z^2} \cdot dz = -\tfrac{1}{2} log \frac{1+z}{1-z} = -\tfrac{1}{2} log \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}};$$

oder

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} \cdot dx = -log \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

Setzt man nun in Q.) statt m zunächst 3, 5, 7, etc., so erhält man

$$\int \frac{1}{x^3\sqrt{1-x^2}} \cdot dx = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{2x^2} + \tfrac{1}{2} log \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x};$$

$$\int \frac{1}{x^5\sqrt{1-x^2}} \cdot dx = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{4x^4} + \tfrac{3}{4} \int \frac{1}{x^3\sqrt{1-x^2}} \cdot dx;$$

$$\int \frac{1}{x^7\sqrt{1-x^2}} \cdot dx = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{6x^6} + \tfrac{5}{6} \int \frac{1}{x^5\sqrt{1-x^2}} \cdot dx;$$

u. s. w. f.

Setzt man aber in Q.) statt m zunächst 2, 4, 6, etc. etc., so erhält man

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}} \cdot dx = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x};$$

$$\int \frac{1}{x^4\sqrt{1-x^2}} \cdot dx = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{3x^3} + \tfrac{2}{3} \int \frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}} \cdot dx;$$

$$\int \frac{1}{x^6\sqrt{1-x^2}} \cdot dx = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{5x^5} + \tfrac{4}{5} \int \frac{1}{x^4\sqrt{1-x^2}} \cdot dx;$$

u. s. w. f.

Beispiel 3. Soll $\int \frac{x^q}{\sqrt{2cx-x^2}} \cdot dx$ gefunden werden, so schreibe man solches zunächst so: $\int x^{q-\frac{1}{2}} \cdot (2c-x)^{-\frac{1}{2}} \cdot dx$; dann findet die Formel IV. 1.) sogleich ihre Anwendung, indem man $a = 2c$, $b = -1$, $n = 1$, $m = q + \frac{1}{2}$ und $p = -\frac{1}{2}$ setzt. Man erhält

$$\int x^{q-\frac{1}{2}} \cdot (2c-x)^{-\frac{1}{2}} \cdot dx = -\frac{x^{q-\frac{1}{2}}(2c-x)^{\frac{1}{2}}}{q} + \frac{2c(q-\frac{1}{2})}{q} \int x^{q-\frac{3}{2}} (2c-x)^{-\frac{1}{2}} \cdot dx;$$

oder

$$\int \frac{x^q}{\sqrt{2cx-x^2}} \cdot dx = -\frac{1}{q} x^{q-1} \sqrt{2cx-x^2} + \frac{2q-1}{q} c \int \frac{x^{q-1}}{\sqrt{2cx-x^2}} \cdot dx,$$

welche Reduktions-Formel so lange angewandt werden kann, bis der Exponent von x im Zähler entweder 0 oder doch < 1 ist.

Beispiel 4. Soll $\int \frac{1}{(z^2+\beta^2)^m} \cdot dz$ oder $\int (z^2+\beta^2)^{-m} \cdot dz$ gefun-

den werden, so giebt die Formel IV. 4.) (indem man daselbst z statt x, und $m=1$, $n=2$, $p=m$, $a=\beta^2$, $b=1$ setzt)

$$\int(z^2+\beta^2)^{-m}\cdot dz=\frac{z(z^2+\beta^2)^{-m+1}}{(2m-2)\beta^2}+\frac{2m-3}{(2m-2)\beta^2}\int(z^2+\beta^2)^{-m+1}\cdot dz,$$

d. h.

$$\int\frac{1}{(z^2+\beta^2)^m}\cdot dz=\frac{z}{(2m-2)\beta^2(z^2+\beta^2)^{m-1}}+\frac{2m-3}{(2m-2)\beta^2}\int\frac{1}{(z^2+\beta^2)^{m-1}}\cdot dz.$$

Ist nun m eine positive ganze Zahl, so ziehen sich alle diese Integrale zuletzt auf $\int\frac{1}{z^2+\beta^2}\cdot dz$ zurück, welches $=\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{tg}\frac{z}{\beta}$ ist (nach §. 6. N. 19.).

Integration der transcendenten Funktionen.

§. 15.

Integration einiger logarithmischen Funktionen.

Ist nämlich zu integriren $P_x\cdot(log\,x)^n\cdot dx$, so integrire man theilweise, d. h. man wende die Formel §. 4.) N. 3.) an, indem man statt des dortigen ψ entweder P_x oder $\frac{1}{x}(log\,x)^n$ setzt *), in welchem letztern Falle dann $x\cdot P_x$ statt φ (ebendaselbst) gesetzt werden muß.

Jene Formel giebt dann

1) $$\int P_x\cdot(log\,x)^n\cdot dx$$
$$=(log\,x)^n\int P_x\cdot dx-n\int(log\,x)^{n-1}(\int P_x\cdot dx)\frac{1}{x}\cdot dx;$$

2) $$\int P_x\cdot(log\,x)^n\cdot dx$$
$$=\frac{(log\,x)^{n+1}x\cdot P_x}{n+1}-\frac{1}{n+1}\int(log\,x)^{n+1}\partial(xP_x)_x\cdot dx.$$

Die erstere dieser Gleichungen ist eine brauchbare Reduktions-Formel, wenn n positiv ist, die andere, wenn n negativ. Man kann jede wiederholt anwenden, um endlich den Logarithmen ganz wegzubekommen, oder (im andern Falle, wo n nega-

*) Ist nämlich $\psi=\frac{1}{x}(log\,x)^n$, so ist $\int\psi\cdot dx=\frac{1}{n+1}(log\,x)^{n+1}$.

tiv ist) auf $\int \frac{R_x}{log\, x} \cdot dx$ geführt zu werden, oder endlich um unter dem $\int$ Zeichen $log\, x$ in einer gebrochenen Potenz zu haben, deren Exponent kleiner als 1 ist.

Beispiel 1. Ist z. B. $\int x^2 \cdot (log\, x)^3 \cdot dx$ zu finden, so giebt die 1.) zunächst

$$\int x^2 \cdot (log\, x)^3 \cdot dx = \tfrac{1}{3} x^3 \cdot (log\, x)^3 - \int x^2 \cdot (log\, x)^2 \cdot dx,$$
$$\int x^2 \cdot (log\, x)^2 \cdot dx = \tfrac{1}{3} x^3 \cdot (log\, x)^2 - \tfrac{2}{3} \int x^2 \cdot (log\, x) \cdot dx,$$
$$\int x^2 \cdot (log\, x) \cdot dx = \tfrac{1}{3} x^3 \cdot (log\, x) - \tfrac{1}{3} \int x^2 \cdot dx.$$

Also wird, wenn man diese Werthe in einander substituirt,

$$\int x^2 \cdot (log\, x)^3 \cdot dx = \tfrac{1}{3} x^3 \cdot (log\, x)^3 - \tfrac{1}{3} x^3 \cdot (log\, x)^2 + \tfrac{2}{9} x^3 \cdot (log\, x) - \tfrac{2}{27} x^3$$
$$= \tfrac{1}{3} x^3 [(log\, x)^3 - (log\, x)^2 + \tfrac{2}{3} log\, x - \tfrac{2}{9}].$$

Beispiel 2. Behandelt man $\int x^m \cdot (log\, x)^{-\frac{1}{2}} \cdot dx$ nach derselben Formel 1.), so erhält man

$$\int \frac{x^m}{\sqrt{log\, x}} \cdot dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \left(\frac{1}{(log\, x)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2(m+1)(log\, x)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1 \cdot 3}{4(m+1)^2 (log\, x)^{\frac{5}{2}}} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{8(m+1)^3 \cdot (log\, x)^{\frac{7}{2}}} + \cdots \right),$$

wo dasselbe Verfahren ohne Ende fort angewandt werden kann, so daß man eine unendliche Reihe von Gliedern erhält *).

Beispiel 3. Ist $\int \frac{x^2}{(log\, x)^3} \cdot dx$ zu finden, so giebt die Formel 2.) wiederholt angewandt

$$\int \frac{x^2}{(log\, x)^3} \cdot dx = -\frac{x^3}{2(log\, x)^2} + \tfrac{3}{2} \int \frac{x^2}{(log\, x)^2} \cdot dx,$$
$$\int \frac{x^2}{(log\, x)^2} \cdot dx = -\frac{x^3}{log\, x} + 3 \int \frac{x^2}{log\, x} \cdot dx.$$

Also wird

$$\int \frac{x^2}{(log\, x)^3} \cdot dx = -\frac{x^3}{2(log\, x)^2} - \tfrac{3}{2} \frac{x^3}{log\, x} + \tfrac{9}{2} \int \frac{x^2}{log\, x} \cdot dx.$$

---

*) Wird in einem solchen Falle, wo man eine unendliche Reihe als Integral gefunden hat, die Constante C, welche immer noch addirt werden muß, um das allgemeine Integral zu haben, einer bestimmten Anwendung gemäß gefunden, soll z. B. der Werth des Integrals für $x = a$ ein bestimmter A oder der Null gleich seyn, so wird diese Constante C dann selbst durch eine unendliche Reihe bestimmt. Dann muß man aber Grenzen der Fehler wissen, die man begehen kann; außerdem ist die Anwendung unendlicher Reihen, namentlich in einem solchen Falle, immer eine sehr mißliche Sache. — Wir werden später auf diesen Gegenstand zurückkommen.

Dieses letztere Integral $\int \frac{x^2}{log\, x} \cdot dx$ läßt sich nach derselben Formel nicht weiter mehr reduciren.

Anmerkung. Die Funktion $\frac{x^m}{log\, x} \cdot dx$, auf welche sich die Integration von $\frac{x^m}{(log\, x)^n} \cdot dx$ zurückzieht, so oft n eine positive ganze Zahl ist, soll weiter unten bei der Integration mittelst unendlicher Reihen, noch einmal betrachtet werden. Setzt man $x^{m+1} = z$, so hat man $x^m \cdot dx = \frac{1}{m+1} \cdot dz$, $(m+1) log\, x = log\, z$, und man erhält

$$\int \frac{x^m}{log\, x} \cdot dx = \int \frac{1}{log\, z} \cdot dz.$$

Und setzt man hier wieder $z = e^u$, so daß $dz = e^u \cdot du$ wird, so findet sich noch

$$\int \frac{x^m}{log\, x} \cdot dx = \int \frac{1}{log\, z} \cdot dz = \int \frac{e^u}{u} \cdot du.$$

Dieses Beispiel ist übrigens unter dem Namen des Integral-Logarithmens bekannt.

So schwierig und in endlicher Form unmöglich aber $\frac{1}{log\, z} \cdot dz$ zu integriren ist, so leicht integrirt sich $log\, z \cdot dz$, indem man in der Formel (§. 4. N. 3.), welche $\int \varphi_z \cdot \psi_z \cdot dz$ liefert, $\psi = 1$, also $\int \psi \cdot dz = z$ setzt. Man erhält dann sogleich

$$\int log\, z \cdot dz = z \cdot log\, z - z = z(-1 + log\, z).$$

Dasselbe geht auch aus der im Texte vorstehenden Formel 1.) hervor, wenn man $n = 1$ setzt.

§. 16.

Fortsetzung der Integration transcendenter Funktionen. — Integration einiger Exponential-Funktionen.

I. Zunächst hat man (nach §. 5. N. 3.)

1) $$\int a^x \cdot dx = \frac{a^x}{log\, a}.$$

Hernach kann man die Funktion $P \cdot dx$ integriren, so oft P eine algebraische Funktion von a^x ist. Setzt man nämlich $a^x = u$, so hat man $a^x \cdot dx \cdot log\, a = du$, also $dx = \frac{du}{u \cdot log\, a}$ und P geht in P_u über; so daß man hat

2) $$\int P \cdot dx = \frac{1}{log\, a} \cdot \int \frac{P_u}{u} \cdot du.$$

So oft daher das letztere Integral gefunden werden kann, so oft läßt sich auch das erstere finden.

Beispiel. So würde man z. B. erhalten

$$\int \frac{a^x}{\sqrt{1 - a^{2x}}} \cdot dx = \frac{1}{log\, a} \int \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \cdot du = \frac{1}{log\, a} \cdot \frac{1}{sin}(a^x).$$

II. Ist dann $a^x x^n \cdot dx$ zu integriren, so integrirt man wieder theilweise, d. h. man wendet die Formel §. 4. N. 3.) an, indem man entweder $a^x = \psi_x$, oder $x^n = \psi_x$ setzt. Man erhält dann sogleich, weil im erstern Falle $\int \psi_x \cdot dx = \frac{a^x}{log\, a}$, im andern Falle dagegen $\int \psi_x \cdot dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ ist,

1) $$\int a^x x^n \cdot dx = \frac{a^x x^n}{log\, a} - \frac{n}{log\, a} \int a^x x^{n-1} \cdot dx;$$

2) $$\int a^x x^n \cdot dx = \frac{a^x x^{n+1}}{n+1} - \frac{log\, a}{n+1} \int a^x x^{n+1} \cdot dx.$$

Die 1.) dient als Reduktions-Formel, wenn n positiv, die 2.) dagegen leistet dasselbe, wenn n negativ ist.

Beispiel 1. So findet man nach und nach, wenn die Formel 1.) wiederholt angewandt wird,

$$\int a^x x^3 \cdot dx = \frac{a^x}{log\, a}\left(x^3 - \frac{3}{log\, a}x^2 + \frac{6}{(log\, a)^2}x - \frac{6}{(log\, a)^3}\right);$$

und wenn n eine positive ganze Zahl ist

$$\int a^x x^n \cdot dx = \frac{a^x}{log\, a} \times \left\{x^n - \frac{n}{log\, a}x^{n-1} + \frac{n^{2I-1}}{(log\, a)^2}x^{n-2} - \frac{n^{3I-1}}{(log\, a)^3}x^{n-3} + \cdots + (-1)^n \cdot \frac{n!}{(log\, a)^n}\right\}.$$

Beispiel 2. Die Formel 2.), wenn sie wiederholt angewandt wird, giebt ferner

$$\int \frac{a^x}{x^3} \cdot dx = -\frac{a^x}{2x^2} - \frac{a^x log\, a}{2x} + \frac{(log\, a)^2}{2}\int \frac{a^x}{x} \cdot dx,$$

wo wegen $a^x = e^x \cdot log\, a$, das Integral von $\frac{a^x}{x} \cdot dx$ sich auf das Integral von $\frac{e^x}{x} \cdot dx$ zurückführt, auf welches in der Anmerkung zu §. 15.) der sogenannte Integral-Logarithme zurückgeführt wird.

Ist aber n abermals eine positive ganze Zahl, so findet man, (durch wiederholte Anwendung der Formel 2.)

$$\int \frac{a^x}{x^n} \cdot dx = -a^x \times \left\{\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{log\, a}{(n-1)^{2I-1}x^{n-2}} + \frac{(log\, a)^2}{(n-1)^{3I-I}x^{n-3}} + \cdots + \frac{(log\, a)^{n-2}}{(n-1)^{n-1I-1}x}\right\} + \frac{(log\, a)^{n-1}}{(n-1)!}\int \frac{a^x}{x} \cdot dx.$$

Beispiel 3. Ist n eine positive oder negative gebrochene Zahl, so kann man beide Formeln 1.) und 2.) ohne Ende fort anwenden, so daß man jedesmal eine unendliche Reihe bekommt. So z. B. giebt die Formel 1.) wiederholt angewandt

$$\int \frac{a^x}{\sqrt{x}} \cdot dx = \frac{a^x}{log\, a \cdot \sqrt{x}}\left(1 + \frac{1}{2x \cdot log\, a} + \frac{1 \cdot 3}{4x^2 \cdot (log\, a)^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{8x^3 \cdot (log\, a)^3} + \cdots\right)$$

Wo aber die Reihe abgebrochen wird, da kommt immer noch ein Integral als Ergänzungs-Glied hinzu, welches jedoch weggelassen werden kann, so oft in einer Anwendung, wenn die Constante für diese Anwendung bestimmt ist, für den bestimmten Werth von x der Werth dieses (Ergänzungs-) Integrals als klein genug nachgewiesen werden kann.

Wollte man auf dasselbe Beispiel die Formel 2.) wiederholt anwenden, so erhielte man

$$\int \frac{a^x}{\sqrt{x}} \cdot dx = 2a^x\sqrt{x}\left(1 - \frac{2x\log a}{1\cdot 3} + \frac{4x^2(\log a)^2}{1\cdot 3\cdot 5} - \frac{8x^3(\log a)^3}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7} + \ldots.\right),$$

wo jedoch hinsichtlich des Ergänzungs-Integrals dieselbe Bemerkung gemacht werden muß, wie kurz vorher.

III. Ist $(P_x \cdot a^x) \cdot dx$ zu integriren, wo P_x irgend eine rationale ganze oder gebrochene Funktion von x vorstellt, so kann man statt a^x, die ihr gleiche unendliche Reihe setzen und man erhält

$$\int P_x \cdot a^x \cdot dx = \int P_x \cdot dx + \frac{\log a}{1}\int xP_x \cdot dx + \frac{(\log a)^2}{2!}\int x^2 P_x \cdot dx + \frac{(\log a)^3}{3!}\int x^3 P_x \cdot dx + \frac{(\log a)^4}{4!}\int x^4 P_x \cdot dx + \cdots,$$

so daß das gesuchte Integral auf diese Integrale der rationalen algebraischen Funktionen zur Rechten zurückgebracht sich sieht. — Freilich muß man in den Anwendungen, wenn die Constante dem Falle der Anwendung gemäß bestimmt ist, erst untersuchen, ob diese für $\int P_x \cdot a^x \cdot dx$ erhaltene unendliche Reihe, für den bestimmten Werth von x auch wirklich convergent ist.

Beispiel 1. Auf diesem Wege findet sich

$$\int (x^n a^x) \cdot dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{x^{n+2}\log a}{1\cdot(n+2)} + \frac{x^{n+3}(\log a)^2}{2!(n+3)} + \frac{x^{n+4}(\log a)^3}{3!(n+4)} + \ldots.$$

Sollte aber n negativ ganz seyn, z. B. $n = -r$, so würde eines dieser Glieder die Form $\frac{x^0 (\log a)^r}{r!\,0}$ annehmen. Dasselbe Glied ist aber das Integral von dem Gliede $\frac{x^{-1}\cdot(\log a)^r}{r!}$ und giebt daher, unmittelbar integrirt, $\frac{(\log a)^r}{r!}\log x$, welches also an die Stelle von $\frac{x^0\cdot(\log a)^r}{r!\,0}$ gesetzt werden muß.

Beispiel 2. Man wendet diese Integration durch unendliche Reihen auch auf das Integral von $\frac{a^x}{x}\cdot dx$, auf welches sich der Integral-Logarithme $\int \frac{1}{\log z}\cdot dz$ (nach Anmerkung zu §. 15.) zurückzieht, an. Man hat dann

$$\int \frac{a^x}{x} \cdot dx = log\, x + \frac{x \cdot log\, a}{1} + \tfrac{1}{2}\frac{x^2 (log\, a)^2}{2!} + \tfrac{1}{3}\frac{x^3 (log\, a)^3}{3!} + \tfrac{1}{4}\frac{x^4 (log\, a)^4}{4!} + \cdots,$$

welches, wenn man $a^x = z$ setzt, übergeht in

$$\int \frac{1}{log\, z} \cdot dz = log(log\, z) + \frac{log\, z}{1} + \tfrac{1}{2}\frac{(log\, z)^2}{2!} + \tfrac{1}{3}\frac{(log\, z)^3}{3!} + \tfrac{1}{4}\frac{(log\, z)^4}{4!} + \cdots.$$

IV. Man versucht auch zuweilen eine Funktion, in welcher e^x (oder a^x d. h. $e^x \cdot log\, a$) vorkommt, dadurch zu integriren, daß man das Integral $= e^x \cdot z$ setzt, und z noch zu bestimmen sucht. — Hat man z. B. $\int \frac{e^x x}{(1+x)^2} \cdot dx = e^x \cdot z$ gesetzt, und differenziirt man links und rechts, so ergiebt sich zur Bestimmung von z die Gleichung $\frac{x}{(1+x)^2} = \partial z_x + z$. — Kann man nun aus letzterer Gleichung z finden (und wie z aus einer solchen Gleichung gefunden wird, lehrt ein späteres Kapitel), findet man namentlich (sey es auch nur durch Versuche), daß dieser letztern Gleichung durch $z = \frac{1}{1+x}$ (welche $\partial z_x = -\frac{1}{(1+x)^2}$ liefert) genügt wird, so hat man

$$\int \frac{e^x x}{(1+x)^2} \cdot dx = \frac{e^x}{1+x}$$

gefunden *).

§. 17.

Weitere Fortsetzung der Integration transcendenter Funktionen. — Integration trigonometrischer Funktionen.

Zu den Exponential-Funktionen gehören auch die trigonometrischen, in so fern *sin* x und *cos* x nichts anders als die Exponential-Funktionen $\frac{1}{2i}(e^{xi} - e^{-xi})$ und $\frac{1}{2}(e^{xi} + e^{-xi})$

*) Häufig kommt man auf diesem Wege nicht anders zum Ziele, als daß man durch Versuche der Gleichung in z zu genügen sucht, in so fern nämlich die systematische Auflösung derselben Gleichung die Kenntniß des hier gesuchten Integrals wiederum voraussetzt.

sind. Gewöhnlich aber behandelt man sie von den Exponential-Funktionen ganz unabhängig, und auch wir wollen es hier so halten.

I. Zuerst hat man die trigonometrischen Integrale des §. 5. NN. 5.—12). — Außerdem findet man aber leicht noch nach dem Verfahren des §. 6.) aus den Formeln des §. 5) die nachstehenden:

1) $$\int sin(pz+q)\cdot dz = -\frac{1}{p}\cdot cos(pz+q);$$

2) $$\int cos(pz+q)\cdot dz = \frac{1}{p}\cdot sin(pz+q);$$

3) $$\int \frac{1}{cos(pz+q)^2}\cdot dz = \frac{1}{p}\cdot tg(pz+q);$$

4) $$\int \frac{1}{sin(pz+q)^2}\cdot dz = -\frac{1}{p}\cdot cotg(pz+q);$$

5) $$\int \frac{sin(pz+q)}{cos(pz+q)^2}\cdot dz = \frac{1}{p}\cdot sec(pz+q) = \frac{1}{p\cdot cos(pz+q)};$$

6) $$\int \frac{cos(pz+q}{sin(pz+q)^2}\cdot dz$$
$$= -\frac{1}{p}\cdot cosec(pz+q) = -\frac{1}{p\cdot sin(pz+q)}.$$

II. Da (nach I. Bd. §§. 71. und 72.)

$$sin(px+q)\cdot sin(p'x+q')$$
$$= \tfrac{1}{2}cos((p-p')x+q-q') - \tfrac{1}{2}cos((p+p')x+q+q')$$
$$cos(px+q)\cdot cos(p'x+q')$$
$$= \tfrac{1}{2}cos((p-p')x+q-q') + \tfrac{1}{2}cos((p+p')x+q+q')$$
$$sin(px+q)\cdot cos(p'x+q')$$
$$= \tfrac{1}{2}sin((p+p')x+q+q') + \tfrac{1}{2}sin((p-p')x+q-q')$$

ist, so kann man mittelst der vorstehenden Formeln diese drei Produkte zur Linken sogleich integriren.

So ist z. B., weil $sin(-3x) = -sin\,3x$ ist,

$$\int sin\,4x\cdot cos\,7x\cdot dx = \tfrac{1}{2}\int sin\,11x\cdot dx - \tfrac{1}{2}\int sin\,3x\cdot dx$$
$$= -\tfrac{1}{11}cos\,11x + \tfrac{1}{6}cos\,3x;$$
$$\int (cos\,x\cdot cos\,2x)dx = \tfrac{1}{6}sin\,3x + \tfrac{1}{2}sin\,x,$$
$$\int (sin\,x\cdot sin\,2x)\cdot dx = \tfrac{1}{2}sin\,x - \tfrac{1}{6}sin\,3x.$$

Soll also $\int(sin(px+q))^2 \cdot dx$ gefunden werden, so nimmt man die Formel $(sin(px+q))^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}cos\,2(px+q)$ und hat sogleich

7) $$\int(sin(px+q))^2 \cdot dx = \tfrac{1}{2}x - \frac{1}{4p} \cdot sin\,2(px+q).$$

Eben so findet sich

8) $$\int(cos(px+q))^2 \cdot dx = \tfrac{1}{2}x + \frac{1}{4p} \cdot sin\,2(px+q).$$

III. Ganze positive Potenzen von $sin\,x$ und $cos\,x$ (und dann auch von $sin(px+q)$ und $cos(px+q)$) können dadurch integrirt werden, daß man sie in Kosinus und Sinus von Vielfachen der Bogen umwandelt. Für die Potenzen der Kosinus hat man die Formel

1) $$2^{n-1} \cdot (cos\,x)^n = cos\,nx + n_1 \cdot cos(n-2)x + n_2 \cdot cos(n-4)x + n_3 \cdot cos(n-6)x + n_4 \cdot cos(n-8)x + \cdots,$$

wenn man, im Falle n ungerade ist, bei dem mit $cos\,x$ afficirten Gliede abbricht, dagegen, so oft n gerade ist, bei dem Gliede $cos\,0x$ oder 1 aufhört, dessen Koefficienten aber nur zur Hälfte nimmt *), während n_1, n_2, n_3, etc. etc. die Binomial-Koefficienten der n^{ten} Potenz eines Binomiums vorstellen, so daß z. B. $n_4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$ gedacht ist.

Für $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, etc. etc. erhält man hieraus:

$$cos\,x = cos\,x;$$
$$2(cos\,x)^2 = cos\,2x + 1;$$
$$4(cos\,x)^3 = cos\,3x + 3cos\,x;$$

---

*) Man erhält diese Formel, wenn man von $2cos\,x = e^{xi} + e^{-xi}$ I. Bd. §. 70. V. VI.) ausgeht, diese Gleichung zur n^{ten} Potenz erhebt, rechts den binomischen Lehrsatz anwendet, und in dieser Entwickelungs-Reihe immer diejenigen zwei Glieder zusammenfaßt, welche vom ersten und letzten Gliede gleich weit abstehen, welche also auch gleiche (Binomial-) Koefficienten haben. Diese zwei Glieder lassen sich nämlich immer in die Form $n_a[e^{(n-2a)i} + e^{-(n-2a)i}]$ zusammenfassen und geben dann $2n_a \cdot cos(n-2a)$, wiederum nach I. Bd. §. 70. V. VI.).

$$8(\cos x)^4 = \cos 4x + 4\cos 2x + 3;$$
$$16(\cos x)^5 = \cos 5x + 5\cos 3x + 10\cos x;$$
$$32(\cos x)^6 = \cos 6x + 6\cos 4x + 15\cos 2x + 10;$$
$$64(\cos x)^7 = \cos 7x + 7\cos 5x + 21\cos 3x + 35\cos x;$$

u. s. w. f.

Für die Potenzen der Sinus aber hat man die Formeln

2) wenn n ungerade ist

$$2^{r-1}i^{n-1}\cdot(\sin x)^n =$$
$$\sin nx - n_1 \sin(n-2)x + n_2 \sin(n-4)x - n_3 \sin(n-6)x + \cdots;$$

3) wenn n gerade

$$2^{n-1}i^n\cdot(\sin x)^n =$$
$$\cos nx - n_1\cos(n-2)x + n_2\cos(n-4)x - n_3\cos(n-6)x + \cdots;$$

sobald man nur zur Rechten keine negativen Bogen zuläßt, sondern die Reihe abbricht, so wie der letzte positive Bogen erschienen ist, während i die $\sqrt{-1}$ vorstellt, so daß für $n = 2\mu+1$, $i^{n-1} = i^{2\mu} = (-1)^\mu = \mp 1$, dagegen für $n = 2\mu$ $i^n = i^{2\mu} = (-1)^\mu = \mp 1$ wird. In der Formel 3.) darf man noch überdies von dem letzten Gliede nur die Hälfte nehmen *), wie die Entwickelung der Formel lehrt. —

Für $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, etc. etc. erhält man hieraus in's Besondere

$$\sin x = +\sin x;$$
$$2(\sin x)^2 = -\cos 2x + 1;$$
$$4(\sin x)^3 = -\sin 3x + 3\sin x;$$
$$8(\sin x)^4 = +\cos 4x - 4\cos 2x + 3;$$

---

*) Diese beiden Formeln 2.) und 3.) erhält man ganz auf dieselbe Weise wie die 1.) — Man geht nämlich von der Gleichung $2i\cdot\sin x = e^{xi} - e^{-xi}$ aus, erhebt solche zur n^{ten} Potenz, wendet zur Rechten den binomischen Lehrsatz an, und kann dann jedesmal das Paar von Gliedern, welche gleich weit vom ersten und letzten Gliede abstehen, zusammenfassen. Solches Paar giebt einen Sinus, wenn n ungerade, einen Kosinus dagegen, wenn n gerade ist. Und ist n gerade, so giebt es jedesmal noch ein mittleres Glied, welches keinen Gefährten findet, so daß es als die Hälfte seines Doppelten dasteht.

$16(\sin x)^5 = +\sin 5x - 5\sin 3x + 10\sin x;$
$32(\sin x)^6 = -\cos 6x + 6\cos 4x - 15\cos 2x + 10;$
$64(\sin x)^7 = -\sin 7x + 7\sin 5x - 21\sin 3x + 35\sin x;$
u. s. w. f.

Ist also z. B. zu integriren $(\cos x)^4 \cdot dx$, so hat man

$$\int(\cos x)^4 \cdot dx = \tfrac{1}{8}\int\cos 4x \cdot dx + \int\tfrac{1}{2}\cos 2x \cdot dx + \int\tfrac{3}{8}\cdot dx$$
$$= \tfrac{1}{32}\sin 4x + \tfrac{1}{4}\sin 2x + \tfrac{3}{8}x.$$

Ist aber zu integriren $(\sin x)^3 \cdot dx$, so findet sich

$$\int(\sin x)^3 \cdot dx = -\tfrac{1}{4}\int\sin 3x \cdot dx + \tfrac{3}{4}\int\sin x \cdot dx$$
$$= +\tfrac{1}{12}\cos 3x - \tfrac{3}{4}\cos x.$$

IV. Soll das Produkt $\sin x^m \cdot \cos x^n \cdot dx$ integrirt werden so stehen verschiedene Wege offen.

A. Setzt man nämlich $\sin x = z$, so hat man $\cos x = \sqrt{1-z^2} = (1-z^2)^{\frac{1}{2}}$ und $\cos x \cdot dx = dz$, also $dx = (1-z^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot dz$; folglich wird

1) $$\int \sin x^m \cos x^n \cdot dx = \int z^m \cdot (1-z^2)^{\frac{n-1}{2}} \cdot dz.$$

Hätte man aber $\cos x = u$ gesetzt, so daß $-\sin x \cdot dx = du$, $\sin x = (1-u^2)^{\frac{1}{2}}$ und $dx = -(1-u^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot du$ geworden wäre, so würde man erhalten haben

2) $$\int \sin x^m \cos x^n \cdot dx = -\int u^n (1-u^2)^{\frac{m-1}{2}} \cdot du.$$

Jedes dieser beiden Integrale zur Rechten in 1.) und 2.) gehört nun zu denen, welche wir im §. 14.) bereits behandelt haben. — Sind aber m und n positive oder negative ganze Zahlen, und ist n ungerade, so ist das Integral in 1.) zur Rechten rational und kann ohne Weiteres integrirt werden; ist dagegen m ungerade, so wird das Integral in 2.) zur Rechten rational und sogleich (nach §§. 7.—11.) gefunden. — Sind aber m und n beide gerade Zahlen (positiv oder negativ), so führen die Reduktions-Formeln des §. 14. IV.), wenn solche wiederholt angewandt werden, das Integral sogleich auf $\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$ oder

$\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$ zurück, welche bezüglich $\frac{1}{sin} z$ oder x und $-\frac{1}{cos} u$ oder $-x$ sind. —

B. Statt jedoch so zu verfahren, bildet man sich lieber dieselben Reduktions-Formeln direkt in Form von trigonometrischen, wie folgt:

Da nämlich $\partial(sin\, x)_x = cos\, x$, und $\partial(cos\, x)_x = -sin\, x$, ist, so hat man sogleich:

$$1) \qquad \int sin\, x^m cos\, x \cdot dx = \frac{sin\, x^{m+1}}{m+1};$$

$$2) \qquad \int cos\, x^n sin\, x \cdot dx = -\frac{cos\, x^{n+1}}{n+1}.$$

Man setze daher in der Formel des §. 5.) N. 3.), nämlich in

$$\int \varphi\psi \cdot dx = \varphi \cdot \int \psi \cdot dx - \int (\partial\varphi_x \int \psi \cdot dx) \cdot dx,$$

statt ψ abwechselnd $cos\, x^n sin\, x$ und $sin\, x^m cos\, x$. Im erstern Falle erhält man dann

$$\int sin\, x^m cos\, x^n \cdot dx$$

$$= -\frac{sin\, x^{m-1} cos\, x^{n+1}}{n+1} + \frac{m-1}{n+1} \int sin\, x^{m-2} cos\, x^{n+2} \cdot dx.$$

Setzt man aber unter dem Integral-Zeichen zur Rechten

$cos\, x^n \cdot (1 - sin\, x^2)$ d. h. $cos\, x^n - cos\, x^n sin\, x^2$

statt $cos\, x^{n+2}$; zerlegt man ferner dasselbe Integral zur Rechten danach in zwei Integrale, so ist eines davon genau wieder das zur Linken. Bringt man nun dieses Glied links herüber und faßt man dann die beiden Integrale links in ein einziges zusammen, so erhält man

$$3) \quad \int sin\, x^m cos\, x^n \cdot dx$$

$$= -\frac{sin\, x^{m-1} cos\, x^{n+1}}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} \int sin\, x^{m-2} cos\, x^n \cdot dx.$$

Im andern Falle erhält man dagegen durch ganz analoge Behandlung

4) $\int sin\, x^m cos\, x^n \cdot dx$

$$= \frac{sin\, x^{m+1} cos\, x^{n-1}}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int sin\, x^m cos\, x^{n-2} \cdot dx.$$

Mittelst dieser Formel 3.) kann man, wenn m eine ganze Zahl und positiv ist, durch wiederholte Anwendung derselben das Integral von $sin\, x^m cos\, x^n \cdot dx$ auf das Integral von $sin\, x \cdot cos\, x^n \cdot dx$ in N. 2.), oder auf $\int cos\, x^n \cdot dx$ zurückführen, je nachdem m ungerade oder gerade ist; während das letztere, wenn n positiv und ganz ist, vermöge wiederholter Anwendung der Formel 4.) sich wiederum auf $\int cos\, x \cdot dx$ oder $\int 1 \cdot dx$ zurückführen läßt, je nachdem n ungerade oder gerade ist.

Ist aber m negativ, so muß man die Formel 3.) umkehren, d. h. das Integral zur Rechten in das zur Linken ausdrücken, wenn man eine brauchbare Reduktions-Formel haben will. Dasselbe muß mit der Formel 4.) geschehen, im Falle man für n negativ eine brauchbare Reduktions-Formel haben will. Man erhält dann, wenn in 3.) zu gleicher Zeit $m+2$ statt m, in 4.) dagegen $n+2$ statt n gesetzt wird, noch diese beiden andern Formeln, nämlich

5) $\int sin\, x^m cos\, x^n \cdot dx$

$$= \frac{sin\, x^{m+1} cos\, x^{n+1}}{m+1} + \frac{m+n+2}{m+1} \int sin\, x^{m+2} cos\, x^n \cdot dx.$$

6) $\int sin\, x^m cos\, x^n \cdot dx$

$$= -\frac{sin\, x^{m+1} cos\, x^{n+1}}{n+1} + \frac{m+n+2}{n+1} \int sin\, x^m cos\, x^{n+2} \cdot dx.$$

Wendet man diese Formeln wiederholt an, im Falle m oder n negativ und ganz seyn sollten, so stößt man zuletzt auf die Integrale von $\frac{cos\, x}{sin\, x} \cdot dx$, $\frac{sin\, x}{cos\, x} \cdot dx$, $\frac{1}{sin\, x} \cdot dx$, $\frac{1}{cos\, x} \cdot dx$ und $\frac{1}{sin\, x \cdot cos\, x} \cdot dx$. — Man findet aber dann noch leicht

$$7)\quad \int cotg\, x \cdot dx = \int \frac{cos\, x}{sin\, x} \cdot dx = log\, sin\, x;$$

$$8)\quad \int tg\, x \cdot dx = \int \frac{sin\, x}{cos\, x} \cdot dx = -log\, cos\, x;$$

$$9)\quad \int cosec\, x \cdot dx = \int \frac{1}{sin\, x} \cdot dx = log\, tg\, \tfrac{1}{2}x;$$

$$10)\quad \int sec\, x \cdot dx = \int \frac{1}{cos\, x} \cdot dx = log\, tg\, \tfrac{1}{2}(\tfrac{\pi}{2} + x);$$

und

$$11)\quad \int \frac{dx}{sin\, x \cdot cos\, x} = log\, tg\, x\ ^{*}).$$

Als besondere in obigen Reduktions-Formeln enthaltene Fälle mag man auch noch hervorheben:

$$12)\quad \int tg\, x^m \cdot dx = \frac{tg\, x^{m-1}}{m-1} - \int tg\, x^{m-2} \cdot dx;$$

$$13)\quad \int cotg\, x^m \cdot dx = -\frac{cotg\, x^{m-1}}{m-1} - \int cotg\, x^{m-2} \cdot dx\ ^{**}).$$

Wäre

---

*) Man erhält N. 7.), wenn man $sin\, x = z$, N. 8.) dagegen, wenn man $cos\, x = z$ setzt und §. 4. N. 4.) anwendet. — Die N. 9.) geht hervor, wenn man $cos\, x = z$ setzt; denn dann wird $-sin\, x \cdot dx = dz$ und $\frac{dx}{sin\, x} = -\frac{dz}{sin\, x^2} = -\frac{dz}{1-z^2} = \frac{dz}{z^2-1} = \frac{\frac{1}{2}dz}{z-1} - \frac{\frac{1}{2}dz}{z+1}$. Deshalb wird $\int \frac{1}{sin\, x} \cdot dx = \frac{1}{2} log \frac{z-1}{z+1}$ oder auch, wenn man die Constante $\frac{1}{2} log\, (-1)$ addirt, $= \frac{1}{2} log \frac{1-z}{1+z} = log \sqrt{\frac{1-cos\, x}{1+cos\, x}} = log\, tg\, \frac{1}{2}x$. — Die N. 10.) erhält man aus N. 9.), wenn man $\frac{1}{2}\pi - x = z$ setzt; oder direkt, wenn man $sin\, x = z$ setzt. — Die 11.) endlich geht aus der N. 9.) hervor, wenn man bemerkt, daß $sin\, x \cdot cos\, x = \frac{1}{2} sin\, z$ ist, wenn $2x = z$ gesetzt wird.

**) Zuweilen bekommt man ein Integral auf sich selber reducirt. So z. B. giebt §. 4.) N. 3.), wenn man $\psi = cos\, x$ setzt, unmittelbar

$$\int sin\, x \cdot cos\, x \cdot dx = sin\, x^2 - \int sin\, x \cdot cos\, x \cdot dx.$$

Bringt man nun das Integral rechts auf die linke Seite, so erhält man sogleich

$$\int sin\, x \cdot cos\, x \cdot dx = \tfrac{1}{2} sin\, x^2;$$

Wäre $\frac{1}{\sin x^2 \cdot \cos x^2} \cdot dx$ zu integriren, so würde man vorher vielleicht lieber mit $\sin x^2 + \cos x^2$ (also mit 1) multipliciren, und dadurch das gesuchte Integral in $\int \frac{1}{\cos x^2} \cdot dx + \int \frac{1}{\sin x^2} \cdot dx$ verwandeln, so daß man sogleich erhielte

$$\int \frac{1}{\sin x^2 \cdot \cos x^2} \cdot dx = tg\, x - cotg\, x.$$

V. Durch theilweise Integration d. h. durch Anwendung der Formel (§. 4. N. 3.) und zwar indem man $\psi = 1$, also $\int \psi \cdot dx = x$ setzt, findet man sogleich noch die trigonometrischen Integrale

1) $$\int \frac{1}{\sin} x \cdot dx = x \cdot \frac{1}{\sin} x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx$$

$$= x \cdot \frac{1}{\sin} x + \sqrt{1-x^2};$$

2) $$\int \frac{1}{\cos} x \cdot dx = x \cdot \frac{1}{\cos} x - \sqrt{1-x^2};$$

3) $$\int \frac{1}{tg} x \cdot dx = x \cdot \frac{1}{tg} x - \log \sqrt{1+x^2};$$

4) $$\int \frac{1}{cotg} x \cdot dx = x \cdot \frac{1}{cotg} x + \log \sqrt{1+x^2};$$

u. s. w. f.

VI. Integrirt man, z. B. $e^{ax} \cdot \cos bx$ oder $e^{ax} \cdot \sin bx$, zweimal theilweise, indem man in der Formel §. 4. N. 3.) zuerst den einen Faktor, das anderemal den andern Faktor statt ψ setzt, so erhält man jedesmal zwei Formeln, welche die beiden gesuchten Integrale enthalten, und aus welchen sie auf algebraischem Wege vollends gefunden werden. So ergiebt sich

1) $$\int e^{ax} \cos bx \cdot dx = \frac{a \cdot \cos bx + b \cdot \sin bx}{a^2 + b^2} \cdot e^{ax};$$

2) $$\int e^{ax} \sin bx \cdot dx = \frac{a \cdot \sin bx - b \cdot \cos bx}{a^2 + b^2} \cdot e^{ax}.$$

---

ein Resultat, welches man auch erhalten haben würde, wenn $\sin x = z$ gesetzt worden wäre.

Dieselben Resultate würde man aber auch sogleich bekommen, wenn man statt *sin* bx, *cos* bx ihre Exponential-Ausdrücke setzen wollte.

VII. Im Allgemeinen kann man bei jeder zu integrirenden trigonometrischen Funktion von x, so wie dies bisher schon öfter geschehen ist, irgend einen Sinus, Kosinus, irgend eine Tangente etc. etc. von x, einem neuen Veränderlichen z gleich setzen, und häufig wird dadurch das Integral auf ein irrationales, zuweilen auch auf ein rationales zurückgeführt, welches nach den vorhergehenden Paragraphen gefunden werden kann. — Auf diesem Wege findet sich z. B. indem man $sin\,x = z$ oder $cos\,x = y$ setzt,

$$\int \frac{1}{a+b\cdot cos\,x}\cdot dx = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\cdot log\,\frac{b+a\cdot cos\,x+\sqrt{b^2-a^2}\cdot sin\,x}{a+b\cdot cos\,x}$$

$$\text{auch} = \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\cdot\frac{1}{cos}\left(\frac{b+a\cdot cos\,x}{a+b\cdot cos\,x}\right)\text{*).}$$

§. 18.

Integration durch unendliche Reihen.

Wenn aber alle Versuche zur Integration einer gegebenen Funktion in endlicher (geschlossener) Form mißlingen, so sucht man das Integral mittelst unendlicher Reihen ausgedrückt zu erhalten.

I. Dazu kann man zunächst die allgemeine Integrations-Formel des §. 2.) gebrauchen.

II. Um aber bequemere Reihen zu bekommen, sucht man lieber die gegebene Funktion vor ihrer Integration in unendliche Reihen zu verwandeln, und integrirt dann jedes Glied dieser Reihe.

---

*) Auf dieses Integral kann man wieder $\int \frac{1}{p+q\cdot sin\,x^2}\cdot dx$ zurückführen, indem man $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}cos\,2x$ statt $sin\,x^2$ schreibt, und dann $2x = y$ setzt.

Beispiel 1. So findet sich, wenn $\int \frac{1}{a+x} \cdot dx$ gesucht wird,

$$\frac{1}{a+x} = \frac{1}{a} - \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} - \frac{x^3}{a^4} + \frac{x^4}{a^5} - \frac{x^5}{a^6} + \cdots;$$

folglich, wenn man integrirt,

α) $$\int \frac{1}{a+x} \cdot dx = \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} + \cdots.$$

Ordnet man aber die Reihe für $\frac{1}{a+x}$ nach fallenden Potenzen von x, nämlich

$$\frac{1}{a+x} = \frac{1}{x+a} = \frac{1}{x} - \frac{a}{x^2} + \frac{a^2}{x^3} - \frac{a^3}{x^4} + \cdots,$$

so erhält man noch

β) $$\int \frac{1}{a+x} \cdot dx = log\, x + \frac{a}{x} - \frac{a^2}{2x^2} + \frac{a^3}{3x^3} - \frac{a^4}{4x^4} + \cdots$$ *),

---

*) Kann man $\int \frac{1}{a+x} \cdot dx = log\,(a+x)$ finden, so hat man für dasselbe Integral zwei Ausdrücke, nämlich $log\,(a+x)$ und eine der beiden unendlichen Reihen α.) oder β.) oben, welche nur um eine Constante verschieden seyn können. Bestimmt man nachgehends in dem einen die Constante C so, daß beide für irgend einen bestimmten Werth von x einander gleich werden, so hat man eine für jedes x richtige Gleichung. So findet sich also zunächst

$$log\,(a+x) = C + \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} + \cdots$$

und für $x = 0$ noch

$$log\, a = C;$$

also

1′) $$log\,(a+x) = log\, a + \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} + \cdots.$$

Wollte man aber die Reihe β.) dazu verwenden, so hätte man anfänglich

(♂)··· $$log\,(a+x) = C + log\, x + \frac{a}{x} - \frac{a^2}{2x^2} + \frac{a^3}{3x^3} - \frac{a^4}{4x^4} + \cdots$$

und für $x = 1$

$$log\,(1+a) = C + a - \tfrac{1}{2}a^2 + \tfrac{1}{3}a^3 - \tfrac{1}{4}a^4 + \cdots$$

d. h. $C = 0$, weil die zur Rechten von C folgende, nach Potenzen von a geordnete Reihe genau $log\,(1+a)$ ist. Also hat man

2′) $$log\,(a+x) = log\, x + \frac{a}{x} - \frac{a^2}{2x^2} + \frac{a^3}{3x^3} - \frac{a^4}{4x^4} + \cdots.$$

Man kann auch, um die Constante C zu bestimmen, zuvor in der Gleichung ♂.) $log\, x$ auf beiden Seiten subtrahiren, und man erhält

und während das erstere Integral (α.) für sehr kleine Werthe von x schnell convergirt, ist dies bei dem zweiten (β.) für sehr große Werthe von x der Fall.

Beispiel 2. So findet sich, wenn $\int \frac{a}{a^2+x^2} \cdot dx$ gesucht wird,

$$\frac{a}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} - \frac{x^2}{a^3} + \frac{x^4}{a^5} - \frac{x^6}{a^7} + \frac{x^8}{a^9} - \cdots;$$

also, wenn man integrirt,

α) $$\int \frac{a}{a^2+x^2} \cdot dx = \frac{x}{a} - \frac{x^3}{3a^3} + \frac{x^5}{5a^5} - \frac{x^7}{7a^7} + \cdots.$$

Ordnet man aber die Reihe für $\frac{a}{a^2+x^2}$ nach fallenden Potenzen von x, so hat man

$$\frac{a}{a^2+x^2} = \frac{a}{x^2+a^2} = \frac{a}{x^2} - \frac{a^3}{x^4} + \frac{a^5}{x^6} - \frac{a^7}{x^8} + \cdots;$$

folglich wird abermals

β) $$\int \frac{a}{a^2+x^2} \cdot dx = -\frac{a}{x} + \frac{a^3}{3x^3} - \frac{a^5}{5x^5} + \frac{a^7}{7x^7} - \cdots *).$$

$$log\left(1+\frac{a}{x}\right) = C + \frac{a}{x} - \frac{a^2}{2x^2} + \frac{a^3}{3x^3} - \cdots.$$

Setzt man dann x unendlich groß, so erhält man

$$0 = C.$$

*) Weiß man, daß $\int \frac{a}{a^2+x^2} \cdot dx = \frac{1}{tg} \frac{x}{a}$ ist, so hat man wieder aus α.)

$$\frac{1}{tg} \frac{x}{a} = C + \frac{x}{a} - \frac{x^3}{3a^3} + \frac{x^5}{5a^5} - \frac{x^7}{7a^7} + \cdots,$$

während hieraus für $x = 0$, $\frac{1}{tg} 0 = C$ hervorgeht, so daß $C = 0$ genommen werden kann, wenn man den kleinsten Bogen haben will. Also ist

3′) $$\frac{1}{tg} \frac{x}{a} = \frac{x}{a} - \frac{x^3}{3a^3} + \frac{x^5}{5a^5} - \frac{x^7}{7a^7} + \cdots.$$

Nimmt man die Reihe β.), so erhält man zunächst

$$\frac{1}{tg} \frac{x}{a} = C - \frac{a}{x} + \frac{a^3}{3x^3} - \frac{a^5}{5x^5} + \frac{a^7}{7x^7} - \cdots.$$

Nimmt man nun hier x unendlich-groß, so hat man rechts bloß C, während links der Bogen steht, dessen Tangente unendlich-groß wird, der also $= \frac{1}{2}\pi$ ist, wenn man den kleinsten dieser Bogen nimmt. Also ist:

4′) $$\frac{1}{tg} \frac{x}{a} = \frac{1}{2}\pi - \frac{a}{x} + \frac{a^3}{3x^3} - \frac{a^5}{5x^5} + \frac{a^7}{7x^7} - \cdots.$$

Beispiel 3. Je nachdem man $\frac{x^m}{a^n+x^n}$ nach steigenden oder nach fallenden Potenzen von x entwickelt, hat man

$$\int \frac{x^m}{a^n+x^n}\cdot dx = \frac{x^{m+1}}{(m+1)a^n} - \frac{x^{m+n+1}}{(m+n+1)a^{2n}} + \frac{x^{m+2n+1}}{(m+2n+1)a^{3n}} - \cdots$$

und auch

$$\int \frac{x^m}{a^n+x^n}\cdot dx = -\frac{1}{(n-m-1)x^{n-m-1}} + \frac{a^n}{(2n-m-1)x^{2n-m-1}} - \frac{a^{2n}}{(3n-m-1)x^{3n-m-1}} + \cdots.$$

Beispiel 4. Das im §. 14.) behandelte Integral, nämlich $\int x^{m-1}\cdot(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}\cdot dx$ läßt sich natürlich, da $(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$ nach dem binomischen Lehrsatze sogleich in eine nach steigenden oder fallenden Potenzen von x (je nachdem man $a+bx^n$ oder bx^n+a schreibt) fortlaufende Reihe geordnet werden kann, augenblicklich in Form von unendlichen Reihen finden. Man hat

$$\int x^{m-1}\cdot(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}\cdot dx = a^{\frac{p}{q}}\cdot\left[\frac{x^m}{m} + \frac{pbx^{m+n}}{qa(m+n)} + \frac{p(p-q)b^2x^{m+2n}}{2!q^2a^2(m+2n)} + \frac{p(p-q)(p-2q)x^{m+3n}}{3!q^3a^3(m+3n)} + \cdots\right],$$

oder auch

$$\int x^{m-1}\cdot(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}\cdot dx = b^{\frac{p}{q}}\cdot\left[\frac{qx^{m+\frac{pn}{q}}}{mq+np} + \frac{apqx^{m+\frac{(p-q)n}{q}}}{bq(mq+np-nq)} + \frac{p(p-q)a^2qx^{m+\frac{(p-2q)n}{q}}}{2!b^2q^2(mq+np-2nq)} + \cdots\right].$$

Beispiel 5. Man erhält ferner nach dem binomischen Lehrsatze (als einen besonderen Fall des vorhergehenden Beispiels)

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1+\tfrac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}x^4+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}x^6+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}x^8+\ldots;$$

folglich hat man

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot dx = x+\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{3}x^3+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\tfrac{1}{5}x^5+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\tfrac{1}{7}x^7+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\cdot\tfrac{1}{9}x^9+\cdots.$$

Und weil dasselbe Integral auch $= \frac{1}{sin}x$ ist, so findet sich $\frac{1}{sin}x$ durch eine unendliche, nach Potenzen von x fortlaufende Reihe ausgedrückt.

Beispiel 6. Eben so findet man sogleich

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\cdot dx = log\,x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2x^2} - \frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{1}{4x^4} - \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{1}{6x^6} - \cdots.$$

Diese Reihe convergirt schnell, wenn x ziemlich groß ist; will man aber haben, daß die für dieses Integral zu findende Reihe dann schnell convergire, wenn x von 1 nur wenig verschieden, also wenn $x-1$ sehr klein ist, so setze man $x-1=u$, so daß $x=1+u$, $x^2-1=2u+u^2$ wird, ordne $(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}$ d. h. $(2u+u^2)^{-\frac{1}{2}}$ nach dem binomischen Lehrsatze nach steigenden Potenzen von u, und integrire dann. Dies giebt

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \cdot dx = \left(1-\frac{1}{2\cdot 3}\cdot\frac{u}{2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}\cdot\frac{u^2}{4}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}\cdot\frac{u^3}{8}+\ldots\right)\sqrt{2u},$$

wo statt u noch $x-1$ gesetzt werden muß.

III. Da es aber überhaupt nur darauf ankommt, die zu integrirende Funktion in eine Reihe integrirbarer Glieder zu verwandeln, so wird man nicht in allen Fällen gerade nach Potenzen von x, oder nach Potenzen von $\frac{1}{x}$ ordnen, sondern nur in integrirbare Glieder und mit dem Vorbedacht, daß man im Endresultate Reihen bekommt, welche für den besonderen Zweck, den man gerade sich gegeben hat, bequem berechenbar sind.

Wollte man also z. B. $\frac{\sqrt{1-e^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\cdot dx$ integriren (welches Integral zu den elliptischen Transcendenten gehört), und wollte man das Integral haben für den Fall, daß e sehr klein ist, so würde man $\sqrt{1-e^2x^2}$ nach steigenden Potenzen von e ordnen (mittelst des binomischen Lehrsatzes) und dann die einzelnen Glieder, welche von der Form $\frac{x^{2m}}{\sqrt{1-x^2}}\cdot e^{2m}$ sind, nach dem Verfahren des §. 14.) Beispiel 1.) integriren. Man erhält dann

$$1)\ \int \frac{\sqrt{1-e^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\cdot dx = \frac{1}{sin}x+\tfrac{1}{2}e^2\left(\tfrac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}-\tfrac{1}{2}\frac{1}{sin}x\right)$$
$$+\frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}e^4\left[\left(\frac{1}{4}x^3+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x\right)\sqrt{1-x^2}-\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{1}{sin}x\right]$$
$$+\frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}e^6\left[\left(\frac{1}{6}x^5+\frac{1\cdot 3}{4\cdot 6}x^3+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x\right)\sqrt{1-x^2}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{1}{sin}x\right]$$
$$+\ \text{etc. etc. etc.}$$

Soll aber dasselbe Integral gefunden werden für den Fall, daß e von der 1 nur sehr wenig verschieden ist, also daß $1-e$ sehr klein ist, so kann man $\frac{1-e}{e}=n$ setzen, so daß n sehr klein ist, die gegebene Funktion in $\frac{\sqrt{e}\cdot\sqrt{1-ex}}{\sqrt{1-x}}\sqrt{+\frac{n}{1+x}}$ umformen, dann hiervon mittelst des binomi-

schen Lehrsatzes den zweiten Faktor nach Potenzen des sehr kleinen n ordnen, und man bekommt lauter Glieder von der Form

$$(\mathfrak{C})\cdots \qquad \frac{\sqrt{1-ex}}{(1+x)^{\mu}\sqrt{1-x}}\cdot n^{\mu}$$

zu integriren.

Und hätte man $\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(a+x)}}\cdot dx$ zu integriren, so würde man $\frac{1}{\sqrt{a+x}} = (a+x)^{-\frac{1}{2}}$ nach Potenzen von x entwickeln, und dann lauter Glieder von der Form $B\frac{x^{\mu}}{\sqrt{1-x^2}}\cdot dx$ zu integriren haben.

Sollte aber $\frac{1}{\sqrt{(2cx-x^2)(b-x)}}\cdot dx$ integrirt werden, so könnte man $\frac{1}{\sqrt{b-x}}$ oder $(b-x)^{-\frac{1}{2}}$ nach Potenzen von x entwickeln, und man hätte dann lauter Glieder von der Form

$$B\frac{x^{\mu}}{\sqrt{2cx-x^2}}\cdot dx$$

zu integriren, was nach den Beispielen zu §. 14.) geschieht.

Diese Beispiele gehören übrigens alle zu den elliptischen Transcendenten.

IV. Hat man aber eine Reihe von Gliedern zu integriren, welche sich auf diese Form bringen läßt, nämlich

$$(\odot)\cdots \quad (A_0+A_1U_x+A_2U_x^2+A_3U_x^3+A_4U_x^4+\cdots)V_x\cdot dx,$$

so sehe man zu, ob sich nicht $\frac{V_x}{1-aU_x}\cdot dx$ werde in endlicher Form integriren lassen, verwandle dann dieses Integral in eine Reihe, die nach ganzen Potenzen von a fortläuft, und setze zuletzt in dieser Reihe statt der Potenzen a^0, a^1, a^2, a^3, a^4 etc. etc. bezüglich die Koefficienten A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 etc. etc. und man hat das Integral der Reihe ⊙.).

Es ist nämlich das Integral der Reihe ⊙.) offenbar

$$= A_0\int 1\cdot V\cdot dx + A_1\int UV\cdot dx + A_2\int U^2V\cdot dx + A_3\int U^3V\cdot dx + \cdots.$$

Dagegen ist, wenn man statt $\frac{1}{1-aU}$ die ihr gleiche nach Potenzen von a geordnete Reihe setzt, offenbar auch

$$\int \frac{V}{1-aU}\cdot dx = \int V\cdot dx + a\int UV\cdot dx + a^2\int U^2V\cdot dx + a^3\int U^3V\cdot dx + \ldots;$$

und daraus fällt das Gesagte in die Augen.

Wollte man also die Reihe integriren, auf welche man in dem Beispiele zu III.) gestoßen ist, nämlich

$$\left(A_0 + A_1\frac{n}{1+x} + A_2\frac{n^2}{(1+x)^2} + A_3\frac{n^3}{(1+x)^3} + \ldots\right)\frac{\sqrt{1-ex}}{\sqrt{1-x}}\cdot dx,$$

so dürfte man nur statt U jetzt $n(1+x)^{-1}$, und statt V jetzt $\frac{\sqrt{1-ex}}{\sqrt{1-x}}$ setzen, und es käme dann alles nur darauf an, die Funktion

$$\frac{\sqrt{1-ex}}{\sqrt{1-x}(1-a(1+x)^{-1})} \text{ d. h. } \frac{\sqrt{1-ex}}{\sqrt{1-x}} + \frac{a}{1-a+x}\cdot\frac{\sqrt{1-ex}}{\sqrt{1-x}}$$

zu integriren, welche Integration nach §. 12.) III.) durchgesetzt werden kann.

Zweites Kapitel.

Eigenschaften der besonderen und bestimmten Integrale. Der Taylor'sche und der Maclaurin'sche Lehrsatz mit dem Ergänzungs-Gliede.

§. 19.

I. Zu jeder für $\int X_x \cdot dx$ gefundenen Funktion ψ_x muß noch eine willkührliche Constante C addirt werden, wenn man einen Ausdruck haben will, welcher alle Integrale in sich schließt. In den Anwendungen muß man dann unter allen diesen verschiedenen, durch $\psi_x + C$ ausgedrückten Integralen dasjenige heraussuchen, welches noch einer, dem besonderen Falle der Anwendung eigenthümlichen Bedingung genügt; d. h. mit andern Worten, in jeder besonderen Anwendung muß diese willkührliche Constante noch näher und dieser Anwendung gemäß bestimmt werden.

Man bestimmt aber diese Constante C jedesmal dadurch, daß man, wenn y das gesuchte besondere Integral vorstellt, zu irgend einem Werth a von x, den zugehörigen Werth A von y kennt. Es ist nämlich dann, außer

1) $y = \psi_x + C$, auch noch 2) $A = \psi_a + C$;

und diese letztere Gleichung giebt C, so daß, wenn man diesen Werth von C in die erstere Gleichung $y = \psi_x + C$ substituirt, das gesuchte besondere Integral das nachstehende wird, nämlich:

3) $$y = \psi_x - \psi_a + A,$$

welche Form umgekehrt sogleich wieder zu $x = a$ auch $y = A$ liefert.

Da nämlich die Constante C von x unabhängig ist, so behält sie für jeden andern Werth von x denselben Werth, den sie bei irgend einem Werthe a von x gehabt hat. Jedoch gilt dies letztere nur so lange, als nicht die Stetigkeit der Funktionen X oder y unterbrochen wird. Wird nämlich z. B. $X = \frac{1}{0}$, sowohl für $x = \alpha$, als auch für $x = \beta$ (wenn etwa $X = \frac{f_x}{(x-\alpha)(x-\beta)}$ seyn sollte), tritt aber dieser Fall für keinen der Werthe von x zwischen α und β ein; und liegt endlich a zwischen α und β, — so wird die Constante C für alle Werthe von x zwischen α und β, denselben Werth behalten, den sie für $x = a$ gehabt hat; es ist aber vorauszusetzen, daß, während y derselben Aufgabe d. h. demselben Falle der Anwendung entspricht, die Constante C einen andern Werth annehmen werde, so oft man y für Werthe von x haben will, welche außerhalb dieser durch α und β begrenzten stetigen Reihe der Werthe von x liegen sollten; und zwar einen andern Werth für die reellen Werthe von x, welche dem α vorangehen, und vielleicht wiederum einen andern Werth für die reellen Werthe von x, welche dem β folgen (wenn $\alpha < \beta$ vorausgesetzt worden ist). — Wir werden auf diesen wichtigen Punkt, auf welchen in der Regel zu wenig oder gar nicht aufmerksam gemacht wird, hier nicht weiter eingehen, und verweisen nur noch auf das Beispiel in der Anmerkung 2.) zu §. 27.), im nächsten Kapitel.

Es ist das allgemeine Integral y von $x^m \cdot dx$ offenbar ausgedrückt durch

$$y = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C;$$

soll aber $y = A$ werden für $x = a$, so erhält man

$$y = \frac{x^{m+1} - a^{m+1}}{m+1} + A.$$

Und soll y für $x = a$ der Null gleich werden, so hat man

$$y = \frac{x^{m+1} - a^{m+1}}{m+1}.$$

II. Wird in einem allgemeinen Integrale die Constante C der Bedingung gemäß bestimmt, daß der Werth desselben, wenn $x = a$ gesetzt wird, der Null gleich werden soll, so sagt man: „das Integral fange mit $x = a$ an," oder auch „es sey von $x = a$ bis $x = x$ genommen," oder endlich „es sey zwischen den Grenzen $x = a$ und $x = x$ genommen."

Ein so genommenes Integral ist allemal ein besonderes (vergl. §. 3.).

Soll also von $x^m \cdot dx$ das mit $x = a$ anfangende Integral genommen werden, so erhält man solches

$$= \frac{x^{m+1} - a^{m+1}}{m+1}.$$

Man wird aber ein solches Integral nur für alle diejenigen Werthe von x gelten lassen, welche dem a stetig und so lange vorangehen, oder stetig und so lange folgen, bis man zu einem Werthe von x gelangt, für welche die Stetigkeit der Werthe von ψ_x oder X_x unterbrochen wird, weil von da ab die Constante einen andern Werth annehmen kann (nach I.).

III. Wird in einem solchen besonderen Integrale $\int X_x \cdot dx$, welches mit $x = a$ anfängt, statt x noch ein bestimmter Werth b gesetzt, so nimmt das Integral einen völlig bestimmten Werth an, und hört auf eine Funktion von x zu seyn. Dieser bestimmte Werth heißt ein bestimmtes Integral, und man sagt von selbigem: „es höre mit $x = b$ auf," oder auch „es sey von $x = a$ bis $x = b$ genommen;" oder endlich „es sey zwischen den Grenz-Werthen a und b von x, genommen."

Dieser Werth b wird im Allgemeinen größer wie a gedacht, kann aber auch $< a$ seyn. Dagegen muß er unter den, dem a stetig anliegenden Werthen von x sich befinden, innerhalb welcher die Constante C einen und denselben Werth be-

hält, weil außerdem der Werth des bestimmten Integrals ein unrichtiger seyn könnte.

IV. Ist aber φ_x irgend ein besonderes Integral von $X_x \cdot dx$, so ist

1) $\varphi_x + C$ das allgemeine,
2) $\varphi_x - \varphi_a$ das mit $x = a$ anfangende,
3) $\varphi_b - \varphi_a$ das zwischen den Grenzen $x = a$ und $x = b$ genommene Integral.

Diese verschiedenen Integrale und Werthe bezeichnen wir aber der Reihe nach durch

1) $\int X \cdot dx$; 2) $\int_{x \div a} X \cdot dx$ oder $\int_a^x X \cdot dx$ und 3) $\int_{b \div a} X \cdot dx$ oder $\int_a^b X \cdot dx$.

Bei diesem letztern, zwischen a und b genommenen Integral von X nach x, setzen wir also namentlich voraus, daß X selbst für keinen der, zwischen a und b liegenden Werthe von x, und auch nicht für $x = a$ oder $x = b$, die Form $\frac{1}{0}$ annehme.

Anmerkung. Zur geschichtlichen Erläuterung dieser Benennungs-Arten dienen folgende Betrachtungen: Ist nämlich $\int y \cdot dx = \varphi_x$, also $\partial \varphi_x = y$, so ist der, zu dem unendlich-kleinen Zuwachse dx von x gehörige unendlich-kleine Zuwachs $d\varphi$ von φ, allemal ausgedrückt durch $y \cdot dx$ d. h. durch $y_x \cdot dx$. — Geht man also von dem Werthe φ_a aus, und denkt man sich die Werthe von x, von a an nach und nach um die unendlich-kleinen Stücke dx wachsend, so ist der nächste Werth von φ_x offenbar $= \varphi_a + y_a \cdot dx$, der nun folgende Werth von φ_x offenbar $= \varphi_a + y_a \cdot dx + y_{a+dx} \cdot dx$; u. s. w. f. — Zuletzt sey $y = b$ geworden, so ist der jetzige Werth von φ_x nämlich φ_b, offenbar

$$= \varphi_a + y_a \cdot dx + y_{a+dx} \cdot dx + y_{a+2dx} \cdot dx + y_{a+3dx} \cdot dx + y_{a+4dx} \cdot dx + \cdots + y_{b-2dx} \cdot dx + y_{b-dx} \cdot dx.$$

Also ist $\varphi_b - \varphi_a$ offenbar die Summe aller unendlich-vielen unendlich-kleinen Zuwachse $y \cdot dx$, welche φ_a nach und nach erlitten hat, um endlich bis zu φ_b anzuwachsen *). — So erklärt es sich, warum man das Summenzeichen $\int$ zur Bezeichnung eines Integrals gewählt hat; und da b auch ganz beliebig seyn, mithin selbst durch das unbestimmte x ersetzt werden kann, so sind ferner hierdurch auch die obigen Redens-Arten erläutert, sobald man statt des Wortes „Integral" das gleichbedeutende „Summe von Differentialien" gesetzt sich denkt. Der nächste Paragraph soll aber diesen wichtigen Satz, auf welchen hier hingedeutet ist, streng wissenschaftlich entwickeln.

§. 20.

Ist $a < b$, und wird die Differenz $b - a$ in unendlich-viele gleiche Theile getheilt gedacht und jeder Theil durch dx bezeichnet; und soll die Summe der unendlich-vielen Produkte $y_x \cdot dx$ gefunden werden für alle die unendlich-vielen von a bis b hin stetig neben einander liegenden d. h. um dieses unendlich-kleine dx von einander verschiedenen Werthe von x, — so ist solche Summe allemal

$$= \int_{b \div a} y \cdot dx \quad \text{oder} \quad = \int_a^b y \cdot dx,$$

d. h. $= \varphi_b - \varphi_a$, wenn $\int y \cdot dx = \varphi_x$ sich findet; sobald nur y für alle Werthe von x zwischen a und b bestimmte Werthe hat, und namentlich nicht die Form $\frac{1}{0}$ annimmt **).

---

*) Daß diese Zuwachse auch zum Theil oder alle negativ seyn können, versteht sich von selbst.

**) Derselbe Satz steht für ganze (rationale) Funktionen von x bereits im I. Bd. §. 111.) entwickelt.

Denn es ist

$$\partial\varphi_x = y_x,\ \partial^2\varphi_x = \partial y_x,\ \partial^3\varphi_x = \partial^2 y_x \text{ etc. etc.;}$$

folglich, nach dem Taylor'schen Lehrsatze

$$\text{I.}\quad \varphi_{x+h} - \varphi_x = y_x \cdot h + \partial y_x \cdot \frac{h^2}{2!} + \partial^2 y_x \cdot \frac{h^3}{3!} + \cdots.$$

Denkt man sich nun hier $h = dx = \frac{b-a}{n}$, indem man unter n eine ganze, aber unendlich-große Zahl versteht; — setzt man in die vorstehende Gleichung nach und nach a, a+h, a+2h, a+3h, a+4h .... zuletzt a+(n−1)h d. h. b−h statt x und addirt man alle daraus hervorgehenden Gleichungen, so erhält man, wenn zur Rechten dx statt h geschrieben wird

$$\text{II.}\quad \varphi_b - \varphi_a = \Sigma y_{a+c.dx} \cdot dx + \Sigma \partial y_{a+c.dx} \cdot \frac{dx^2}{2!} + \Sigma \partial^2 y_{a+c.dx} \cdot \frac{dx^3}{3!} + \cdots,$$

wo das Summen-Zeichen Σ sich über alle die Glieder erstreckt, welche aus dem, hinter demselben stehenden Ausdrucke hervorgehen, wenn man statt c nach und nach 0, 1, 2, 3, 4 und alle ganzen Zahlen bis zuletzt n−1, setzt. Da nun in dieser Reihe zur Rechten jedes folgende Glied gegen das vorhergegende unendlich-klein ist, so bleibt bloß (nach I. Bd. §§. 50. und 159.)

$$\text{III.}\quad \begin{cases} \varphi_b - \varphi_a = \Sigma y_{a+c.dx} \cdot dx \\ \text{oder} \\ \int_{b\div a} y \cdot dx = \Sigma y_{a+c.dx} \cdot dx \end{cases}$$

wo $y_{a+c\ dx}$ alle stetig neben einander liegenden Werthe von y_x vorstellt, welche zwischen y_a und y_b liegen, unter der Voraussetzung jedoch, daß keiner derselben die Form $\frac{1}{0}$ (oder *log* 0, oder sonst eine im Kalkul unzulässige Form) annimmt, sondern jeder derselben bestimmt und nicht unendlich-groß ist.

Anmerkung. Setzt man in der Gleichung III.) noch ∂y_x, $\partial^2 y_x$ etc. etc. statt y, so erhält man, in so fern $\int \partial y_x \cdot dx = y$, $\int \partial^2 y_x \cdot dx = \partial y_x$ etc. etc. ist,

IV. $$y_b - y_a = \Sigma \partial y_{a+c\cdot dx} \cdot dx;$$

V. $$\partial y_b - \partial y_a = \Sigma \partial^2 y_{a+c\cdot dx} \cdot dx;$$

u. s. w. f. — Und alle diese Gleichungen sind vollkommen genau, so lange man dx unendlich-klein sich denkt.

§. 21.

Man kann sich auch der Formel I.) des §. 20.), und des analogen Verfahrens bedienen, um Näherungs-Werthe eines bestimmten Integrals $\int_{b\div a} y \cdot dx$ zu berechnen, wenn es nicht möglich ist $\int y \cdot dx$ selbst, als Funktion von x, für die Rechnung bequem herzustellen.

Setzt man nämlich in der Formel I.) des §. 20.) statt h nicht das unendlich-kleine dx, sondern nur das sehr kleine $\varepsilon = \frac{b-a}{n}$, so daß n nicht unendlich-groß, sondern nur sehr groß ist, so erhält man, wenn man wiederum nach und nach a, $a+\varepsilon$, $a+2\varepsilon$, $a+3\varepsilon$, $\cdots$ $a+(n-1)\varepsilon$ oder $b-\varepsilon$ statt x setzt, und dann alle Gleichungen addirt,

1) $$\int_{b\div a} y \cdot dx = \varepsilon \cdot \Sigma y_{a+c\cdot\varepsilon} + \frac{\varepsilon^2}{2!} \cdot \Sigma \partial y_{a+c\cdot\varepsilon} + \frac{\varepsilon^3}{3!} \cdot \Sigma \partial^2 y_{a+c\cdot\varepsilon} + \cdots.$$

Läßt man nun hier ε^2, ε^3 etc. etc. außer Acht, so hat man näherungsweise:

I. $$\int_{b\div a} y \cdot dx = \varepsilon \cdot \Sigma y_{a+c\cdot\varepsilon},$$

wo man statt c nach und nach 0, 1, 2, 3 $\cdots$ bis $n-1$ setzen und alle diese n verschiedenen Werthe von y summiren muß, während $\varepsilon = \frac{b-a}{n}$ ist.

Setzt man nun in I.) statt y nach einander ∂y_x und $\partial^2 y_x$, so erhält man, ebenfalls genähert,

2) $y_b - y_a = \varepsilon \cdot \Sigma \partial y_{a+c.\varepsilon}$ und $\partial y_b - \partial y_a = \varepsilon \cdot \Sigma \partial^2 y_{a+c.\varepsilon}$.

Dadurch kann man aber das mit ε^2 afficirte Glied in 1.) auf $\frac{1}{2}\varepsilon(y_b - y_a)$ reduciren, so wie das mit ε^3 afficirte Glied in 1.) auf $\frac{1}{6}\varepsilon^2(\partial y_b - \partial y_a)$. Substituirt man nun diese Werthe in 1.), und läßt man dann wieder alle mit ε^2 und den höhern Potenzen von ε afficirten Glieder außer Acht, so hat man eine zweite Näherungs-Formel, nämlich

II. $\int_{b\div a} y \cdot dx = \varepsilon \cdot [\Sigma y_{a+c.\varepsilon} + \frac{1}{2}(y_b - y_a)]$.

Setzt man hier wieder ∂y_x und $\partial^2 y_x$ statt y, so giebt dies:

3) $y_b - y_a = \varepsilon \cdot [\Sigma \partial y_{a+c.\varepsilon} + \frac{1}{2}(\partial y_b - \partial y_a)]$,

4) $\partial y_b - \partial y_a = \varepsilon \cdot [\Sigma \partial^2 y_{a+c.\varepsilon} + \frac{1}{2}(\partial^2 y_b - \partial^2 y_a)]$.

Eliminirt man aber jetzt aus den Gleichungen 1.), 3.) und 4.) sowohl $\Sigma \partial y_{a+c.\varepsilon}$ als auch $\Sigma \partial^2 y_{a+c.\varepsilon}$, so ergiebt sich, wenn erst die mit ε^3 und den höhern Potenzen von ε afficirten Glieder weggelassen werden, eine dritte Näherung, nämlich

III. $\int_{b\div a} y \cdot dx = \varepsilon \cdot [\Sigma y_{a+c.\varepsilon} + \frac{1}{2}(y_b - y_a)] - \frac{1}{12}\varepsilon^2(\partial y_b - \partial y_a)$;

oder, weil dem c nach und nach alle Werthe 0, 1, 2, 3 ⋯ n − 1 gegeben werden müssen,

III. $\int_{b\div a} y \cdot dx = \varepsilon \cdot [\frac{1}{2}y_a + y_{a+\varepsilon} + y_{a+2\varepsilon} + y_{a+3\varepsilon} + \cdots + y_{b-\varepsilon} + \frac{1}{2}y_b] - \frac{1}{12}\varepsilon^2(\partial y_b - \partial y_a)$,

wo vorausgesetzt wird, daß y und ∂y_x für alle zwischen a und b liegende Werthe von x, bestimmte (und auch nicht unendlichgroße) Werthe haben.

Nach diesen Näherungs-Formeln kann man nun bestimmte Integrale berechnen, wenn man die allgemeinen nicht hat. Sie sind desto genauer, je größer n, je kleiner also $\varepsilon = \frac{b-a}{n}$ genommen wird, und je weniger rasch die Werthe von y_x in den Zwischenräumen wachsen oder abnehmen.

Gebraucht man die II.), so ist es nicht einmal nöthig, daß man y_x hat, wenn nur die n + 1 Werthe von y_x, nämlich y_a, $y_{a+\varepsilon}$, $y_{a+2\varepsilon}$, $y_{a+3\varepsilon}$, ⋯ y_b bekannt sind.

An-

Anmerkung. Man kann auch in der Gleichung I.) des §. 20.) nach und nach statt h die verschiedenen Werthe

$$\varepsilon,\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3,\ \varepsilon_4,\ \cdots$$

und zu gleicher Zeit statt x nach und nach bezüglich die Werthe $a,\ a+\varepsilon,\ a+\varepsilon+\varepsilon_1,\ a+\varepsilon+\varepsilon_1+\varepsilon_2,\ \cdots$ setzen, (während man $\varepsilon+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_n = b-a$ nimmt) und zuletzt alle Gleichungen addiren. Man erhält dann wiederum genähert

$$\int_{b\div a} y\cdot dx = \varepsilon\cdot y_a + \varepsilon_1\cdot y_{a+\varepsilon} + \varepsilon_2\cdot y_{a+\varepsilon+\varepsilon_1} + \cdots + \varepsilon_n\cdot y_{b-\varepsilon_n}.$$

Dieses Verfahren würde dann vortheilhaft werden können, wenn die Werthe von y einzelne Stellen haben, an denen sie bedeutend rascher abnehmen und wachsen, als an andern, weil man an diesen Stellen die Werthe der verschiedenen ε um so kleiner nehmen kann, wodurch eine größere Genauigkeit erreicht wird.

§. 22.

Nimmt man in den Integrations-Formeln des §. 4.) die mit $x = a$ anfangenden Integrale, so nehmen sie die nachstehende Form an, nämlich

1) $\int_{x\div a} A\cdot\varphi_x\cdot dx = A\cdot\int_{x\div a}\varphi\cdot dx;$

2) $\int_{x\div a}(\varphi_x \pm \psi_x)\cdot dx = \int_{x\div a}\varphi_x\cdot dx \pm \int_{x\div a}\psi_x\cdot dx;$

3) $\int_{x\div a}(\varphi_x\cdot\psi_x).dx = \varphi_x\int_{x\div a}\psi_x\cdot dx - \int_{x\div a}(\partial\varphi_x\int_{x\div a}\psi\cdot dx)\cdot dx.$

Nimmt man aber in dieser dritten Formel statt $\int\psi\cdot dx$ nicht das mit $x = a$ anfangende Integral, sondern irgend ein anderes besonderes Integral, welches durch π_x bezeichnet seyn mag, so nimmt diese dritte Formel folgende Form an:

I. $\int_{x\div a}(\varphi_x\cdot\psi_x)\cdot dx = (\varphi_x\cdot\pi_x - \varphi_a\cdot\pi_a) - \int_{x\div a}(\pi_x\cdot\partial\varphi_x)\cdot dx,$

wo $\pi_x = \int\psi\cdot dx$ ist.

Fängt in der Gleichung 4.) des §. 4.), nämlich in

$$\int\varphi\cdot dx = \int(\varphi\cdot\partial x_z)\cdot dz,$$

das Integral nach z mit $z = a$ an, so muß das Integral nach x, mit $x = \alpha$ anfangen, wenn α der für $z = a$ hervorgehende Werth von x ist. Man hat also

II. $\int_{x\div\alpha}\varphi_x\cdot dx = \int_{z\div a}(\varphi\cdot\partial x_z)\cdot dz,$

sobald nur zwischen α und a dieselbe Gleichung statt findet, welche zwischen x und z vorausgesetzt worden ist.

Und hört das Integral nach z mit $z = b$ auf, so muß das Integral nach x mit $x = \beta$ aufhören, wenn zwischen β und b dieselbe Gleichung statt findet, die zwischen x und z statt hat. Man hat also

III. $$\int_{\beta \div \alpha} \varphi_x \cdot dx = \int_{b \div a} (\varphi \cdot \partial x_z) \cdot dz,$$

sobald nur α und a, eben so auch β und b zusammengehörige Werthe von x und z sind, welche der zwischen x und z vorausgesetzten Gleichung genügen.

Anmerkung. Als besondere Fälle der Anwendung dieser letztern Formel III.) heben wir hervor:

1) $$\int_{\beta \div \alpha} \varphi_x \cdot dx = -\int_{\alpha \div \beta} \varphi_z \cdot dz = -\int_{\alpha \div \beta} \varphi_x \cdot dx,$$

2) $$\int_{\beta \div \alpha} \varphi_x \cdot dx = \int_{(\beta+\gamma) \div (\alpha+\gamma)} \varphi_{z-\gamma} \cdot dz = \int_{(\beta+\gamma) \div (\alpha+\gamma)} \varphi_{x-\gamma} \cdot dx,$$

wo γ beliebig constant positiv oder negativ ist;

3) $$\int_{\beta \div \alpha} \varphi_x \cdot dx = \frac{1}{\gamma} \int_{\beta\gamma \div \alpha\gamma} \varphi_{z:\gamma} \cdot dz = \frac{1}{\gamma} \int_{\beta\gamma \div \alpha\gamma} \varphi_{x:\gamma} \cdot dx,$$

wo γ ebenfalls beliebig constant ist, so daß auch $\frac{1}{\gamma}$ statt γ gesetzt werden kann, in welchem letzteren Falle die Formel 3.) so aussieht

4) $$\int_{\beta \div \alpha} \varphi_x \cdot dx = \gamma \cdot \int_{\frac{\beta}{\gamma} \div \frac{\alpha}{\gamma}} \varphi_{\gamma x} \cdot dx.$$

Es ergiebt sich die 1.) für $x = -z$, $\partial x_z = -1$; die 2.) für $x = z - \gamma$, $\partial x_z = 1$; die 3.) für $x = \frac{z}{\gamma}$, $\partial x_z = \frac{1}{\gamma}$; die 4.) dagegen für $x = \gamma z$. — Daß endlich am weitesten zur Rechten statt z wieder der Buchstabe x geschrieben werden kann, versteht sich von selbst, da es einerlei ist, ob man eine Funktion von z hat, und statt z die Grenz-Werthe schreibt, oder ob man statt z zuerst x schreibt und dann statt x dieselben Grenz-Werthe setzt.

§. 23.

Ist f eine Funktion von x und y, so ist allemal, wenn b, a, β und α von x und y ganz unabhängig (constant) sind,

I. $$\partial\left(\int_{b\div a} f\cdot dy\right)_x = \int_{b\div a}(\partial f_x)\cdot dy;$$

II. $$\int_{\beta\div\alpha}\left(\int_{b\div a} f\cdot dy\right)\cdot dx = \int_{b\div a}\left(\int_{\beta\div\alpha} f\cdot dx\right)\cdot dy;$$

d. h. „es ist einerlei, in welcher Ordnung man integrirt oder „differenziirt, sobald nur die Grenzen der Integrale nach denje„nigen Veränderlichen constant sind, nach welchen das fernere „Differenziiren oder Integriren geschehen soll, und die Funktion „f zwischen den Grenz-Werthen von x und y ihre Stetigkeit „nicht unterbricht, also nie $= \frac{1}{0}$ wird".

Sind jedoch die Grenzen b und a selbst noch z. B. Funktionen von x, so gilt keine dieser Formeln. — Statt der I.) bekommt man aber dann die folgende:

III. $$\partial\left(\int_{b\div a} f\cdot dy\right)_x = \int_{b\div a}(\partial f_x)\cdot dy + (f_b\cdot \partial b_x - f_a\cdot \partial a_x).$$

Diese Formeln werden auf nachstehende Art erwiesen. — Es sey nämlich

1) $$\int_{b\div a} f\cdot dy = \psi,$$

so ist, wenn man hier $x+h$ statt x schreibt,

2) $$\int_{b\div a} f_{x+h}\cdot dy = \psi_{x+h},$$

so lange b und a nach x constant sind; dagegen wird, wenn b und a selbst noch Funktionen von x seyn sollten, durch dieselbe Subst itution von $x+h$ statt x,

3) $$\int_{b_{x+h}\div a_{x+h}} f_{x+h}\cdot dy = \psi_{x+h}.$$

Entwickelt man nun in 2.) und in 3.) die Ausdrücke links und rechts (mittelst des Taylor'schen oder, besser noch, mittelst des Maclaurin'schen Lehrsatzes) in, nach ganzen Potenzen von h fortlaufende Reihen und nimmt man links und rechts bloß die mit h^1 afficirten Glieder, so erhält man sogleich die Formeln I.) und III.).

Die II.) bedarf keines Beweises, sobald man sich nach §. 20.) das Integral als eine Summe von Differentialien denkt; denn es ist ja ein unbestrittenes Princip der Addition, daß man die zu addirenden Theile in ganz beliebiger Ordnung addiren könne.

Anmerkung. Man sieht zugleich, daß die letztere Behauptung unrichtig seyn würde, wenn b und a selbst noch Funktionen von x wären, daß daher die Formel II.) nur dann wahr ist, wenn man b und a ganz unabhängig von x, und eben so β und α ganz unabhängig von y voraussetzt.

Eben so sieht man, daß die, Behufs des Beweises vorausgesetzten Gleichungen die Bedingung einschließen, daß f für kein Paar der zusammengehörigen Werthe von x und y, innerhalb der Grenz-Werthe derselben ihre Stetigkeit unterbricht, also auch nicht $= \frac{1}{0}$ wird *).

§. 24.

Außerdem sind noch folgende Sätze wichtig.

I. Ein bestimmtes Integral zwischen den Grenzen a und

---

*) Gauß gründet auf diesen Umstand einen Beweis des Satzes, daß jede höhere Gleichung $F_x = 0$ einen Wurzel-Werth x von der Form $p + q \cdot i$ oder $r \cdot \cos\varphi + r \cdot \sin\varphi \cdot i$ habe, sobald man unter i die $\sqrt{-1}$ versteht. Er substituirt nämlich in $F_x = 0$ statt x diese Form $r \cdot \cos\varphi + r \cdot \sin\varphi \cdot i$ und zerfällt dadurch die Gleichung $F_x = 0$ in zwei Gleichungen

$$f_{r,\varphi} = 0 \quad \text{und} \quad \varkappa_{r,\varphi} = 0.$$

Um nun zu beweisen, daß es reelle Werthe von r und φ giebt, welche letzteren beiden Gleichungen genügen, wählt er eine Funktion von der Form

$$\frac{\varkappa_{r,\varphi}}{(f^2 + \varkappa^2)^2} \cdot dr \cdot d\varphi,$$

welche sich nach r und nach φ integriren läßt, und integrirt nun nach r zwischen 0 und R, wo R groß genug und positiv gewählt ist, nach φ aber zwischen 0 und 360°; und zwar einmal zuerst nach r und dann nach φ, hernach aber zuerst nach φ und dann nach r. Da er nun das zweite Mal nicht dasselbe heraus bekommt, was das erste Mal, so schließt er, daß der Nenner $f^2 + \varkappa^2$ innerhalb der Grenz-Werthe 0 und R von r, und innerhalb der Grenz-Werthe 0 und 360° von φ, der Null gleich werde, daß es also zwischen 0 und R einen Werth von r, und zwischen 0 und 360° einen Werth von φ gebe, welche $f^2 + \varkappa^2 = 0$, welche also auch einzeln $f = 0$ und $\varkappa = 0$ machen. W. Z. E. W. (Man vgl. Commentat. Gotting. recent. Vol. III.).

b wird auch gefunden, wenn man zwischen a und b beliebig viel beliebige Zwischen-Werthe, z. B. c, c′ und c″ sich denkt, nun dasselbe Integral zwischen den Grenzen a und c, dann zwischen c und c′, hernach zwischen c′ und c″, endlich aber zwischen c″ und b nimmt, und zuletzt alle diese Resultate addirt.

Denn, ist φ_x irgend eines der besonderen Integrale, so sind diese nach und nach berechneten bestimmten Integrale bezüglich $\varphi_c - \varphi_a$; $\varphi_{c'} - \varphi_c$; $\varphi_{c''} - \varphi_{c'}$ und $\varphi_b - \varphi_{c''}$. — Addirt man aber diese Werthe, so erhält man augenfällig $\varphi_b - \varphi_a$.

II. Wenn f_x eine solche Funktion von x ist, daß man

$$f_x = f_{-x}$$

hat, so ist allemal, wie auch sonst die Funktion f_x seyn mag,

$$\int_{-a}^{+a} f_x \cdot dx = 2 \int_0^a f_x \cdot dx \text{ *).}$$

Also ist z. B.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} \cdot dx = 2 \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} \cdot dx.$$

Denn es findet der Voraussetzung zu Folge, jeder der von $x = -a$ bis zu $x = 0$ hervorgehenden Werthe von f_x, in der Reihe der Werthe von f_x von $x = +a$ bis zu $x = 0$ hin, seinen Gleichen; daher folgt das Behauptete aus §. 20.) ohne Weiteres.

III. Wenn dagegen f_x eine solche Funktion von x ist, daß man

$$f_{-x} = -f_x$$

hat, so hat man aus demselben Satze (§. 20.), wie auch übrigens f_x seyn mag,

$$\int_{-a}^{+a} f_x \cdot dx = 0;$$

Danach ist z. B.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} \cdot dx = 0.$$

IV. Ferner ist allemal

1) $$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{x \pm a} \cdot dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_x \cdot dx;$$

---

*) Wir wechseln mit den gleichbedeutenden Zeichen $\int_{b \div a} f \cdot dx$ und $\int_a^b f \cdot dx$ ab, wie es uns im Druck bequem erscheint.

2) $$\int_0^\infty f_{ax} \cdot dx = \frac{1}{a} \int_0^\infty f_x \cdot dx,$$

wenn unter f_{ax} das verstanden wird, was aus f_x hervorgeht, sobald ax statt x gesetzt wird.

Denn solches geht aus dem Satze des §. 22. III) hervor, wenn man $x \pm a = z$, oder $ax = z$ setzt.

V. Wenn in dem Integral

$$\int_a^b \varphi\psi \cdot dx$$

der Faktor ψ für alle Werthe von x zwischen a und b immer positiv bleibt, und φ_g, φ_k bezüglich den größten und kleinsten Werth vorstellen, welchen φ für alle Werthe von x zwischen a und b annehmen kann, so ist allemal

$$\int_a^b \varphi\psi \cdot dx < \varphi_g \cdot \int_a^b \psi \cdot dx \quad \text{und} \quad > \varphi_k \cdot \int_a^b \psi \cdot dx \text{ *).}$$

Denn es ist nach der Voraussetzung für jeden Werth von c, der zwischen a und b liegt,

$$\varphi_c \cdot \psi_c < \varphi_g \cdot \psi_c \quad \text{und} \quad \varphi_c \cdot \psi_c > \varphi_k \cdot \psi_c;$$

und deshalb folgt die Wahrheit der Behauptung unmittelbar aus §. 20.).

§. 25.

Nun ist man auch in den Stand gesetzt, bei dem Taylor'schen und Maclaurin'schen Lehrsatze die Grenzen zu bestimmen, zwischen denen die Summe aller übrigen Glieder liegen muß, wenn die Reihen bei irgend einem Gliede abgebrochen werden und reelle Werthe haben.

Man findet nämlich in diesem Falle

I. $$f_x = f_0 + \partial f_0 \cdot x + \partial^2 f_0 \cdot \frac{x^2}{2!} + \cdots$$

$$+ \partial^{n-1} f_0 \cdot \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + [\partial^n f_x]_{\vartheta x} \cdot \frac{x^n}{n!},$$

wenn f_0, ∂f_0, $\partial^2 f_0$, etc. etc. die Werthe von f_x, ∂f_x, $\partial^2 f_x$, etc. etc. für $x = 0$ vorstellen, während $[\partial^n f_x]_{\vartheta x}$ einen Werth

*) Derselbe Satz ist für (rationale) ganze Funktionen von x bereits im I. Bd. §. 111.) zu finden.

bedeutet, welcher zwischen dem größten und kleinsten Werthe von $\partial^n f_x$, die von $x = 0$ an für alle stetig wachsenden Werthe von x, bis zu $x = x$ hin sich ergeben, liegt; so daß also $[\partial^n f_x]_{\vartheta x}$ das vorstellt, was aus $\partial^n f_x$ wird, wenn man ϑx statt x setzt, während ϑ zwischen 0 und 1 liegt, übrigens völlig unbekannt ist.

Ferner findet man

$$\text{II.}\quad f_{x+h} = f_x + \partial f_x \cdot h + \partial^2 f_x \cdot \frac{h^2}{2!} + \partial^3 f_x \cdot \frac{h^3}{3!} + \cdots + \partial^{n-1} f_x \cdot \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} + [\partial^n f_x]_{x+\vartheta h} \cdot \frac{h^n}{n!},$$

wo $[\partial^n f_x]_{x+\vartheta h}$ einen der Werthe bedeutet, welcher für $\partial^n f_x$ erhalten werden, wenn man statt x alle Werthe zwischen x und $x+h$ setzt, so daß also wieder $[\partial^n f_x]_{x+\vartheta h}$ den Werth vorstellt, welchen $\partial^n f_x$ annimmt, wenn man $x+\vartheta h$ statt x setzt, während ϑ zwischen 0 und 1 liegt, übrigens unbekannt bleibt *).

Um dies zu finden, nehme man von dem allgemeinern Maclaurin'schen Lehrsatze (I. Bd. §. 156.) nur die n ersten Glieder, bezeichne die Summe aller übrigen Glieder durch E_x und suche nun aus dieser Gleichung E_x zu finden. Differenziirt man aber die so erhaltene Gleichung, nämlich

$$1)\quad E_x = f_x - f_\alpha - \partial f_\alpha (x-\alpha) - \partial^2 f_\alpha \frac{(x-\alpha)^2}{2!} \cdots - \partial^{n-1} f_\alpha \cdot \frac{(x-\alpha)^{n-1}}{(n-1)!}$$

n mal hinter einander nach x. so erhält man nach und nach ∂E_x, $\partial^2 E_x$, $\partial^3 E_x \cdots$, zuletzt $\partial^{n-1} E_x$, alle so daß diese Ableitungen, wie E_x selbst, für $x = \alpha$ der Null gleich werden. Und ganz zuletzt findet sich

$$2)\quad \partial^n E_x = \partial^n f_x.$$

Integrirt man also $\partial^n f_x$ n mal hinter einander und so, daß jedes neue Integral mit $x = \alpha$ anfängt, so bekommt man nach und nach wieder $\partial^{n-1} E_x$, $\partial^{n-2} E_x$, u. s. w. f. und zuletzt E_x. — Man kann aber diese Integration auf zweifache Weise vornehmen; das eine Mal wird man genau

---

*) Derselbe Satz ist im I. Bd. §. 111.) für ganze Funktionen von x, und für den besondern und einfachsten Fall, wo $n = 1$ ist, bereits entwikkelt zu finden.

zur Gleichung 1.) zurückgeführt werden, von welcher man ausgegangen ist; das andere Mal muß man suchen einen zweiten neuen Ausdruck für E_x zu erhalten.

Nun ist aber, wenn man theilweise integrirt,

3) $$\int(1\cdot\int\varphi_x\cdot dx)\cdot dx = x\int\varphi_x\cdot dx - \int x\varphi\cdot dx.$$

Wenn man hier links und rechts noch einmal die Integrale nimmt, rechts aber und namentlich da, wo doppelte Integrale erscheinen, sogleich (nach 3.) so theilweise integrirt, daß nur einfache Integrale entstehen, so erhält man, nachdem die Integrale zusammengefaßt sind,

4) $$\int(\int(\int\varphi_x\cdot dx)\cdot dx)\cdot dx = \frac{x^2}{2}\int\varphi_x\cdot dx - x\int x\cdot\varphi_x\cdot dx + \tfrac{1}{2}\int x^2\cdot\varphi_x\cdot dx.$$

Fährt man so fort, so erhält man zuletzt als Resultat der n fach hinter einander fortgesetzten Integration von φ_x, die Reihe von einfachen Integralen

5) $$\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\int\varphi\cdot dx - \frac{x^{n-2}}{(n-2)!}\int x\cdot\varphi_x\cdot dx + \frac{x^{n-3}}{(n-3)!}\int\frac{x^2}{2!}\cdot\varphi_x\cdot dx - \cdots$$
$$\pm\frac{x^{n-r-1}}{(n-r-1)!}\int\frac{x^r}{r!}\cdot\varphi_x\cdot dx + \cdots \pm\int\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\cdot\varphi_x\cdot dx.$$

Nun kann man aber bei einem bestimmten Integral statt des Veränderlichen x, jeden andern Buchstaben z. B. z setzen, so daß man hat

$$\int_{x\div\alpha} x^a\cdot\varphi_x\cdot dx = \int_{x\div\alpha} z^a\cdot\varphi_z\cdot dz,$$

und deshalb auch wieder

$$x^b\int_{x\div\alpha} x^a\cdot\varphi_x\cdot dx = x^b\int_{x\div\alpha} z^a\cdot\varphi_z\cdot dz = \int_{x\div\alpha} x^b\cdot z^a\cdot\varphi_z\cdot dz.$$

Geschieht diese Verwandlung in allen Gliedern der Reihe 4.) zur Rechten, so erhält man statt dieser Reihe diese andere

6) $$\tfrac{1}{2}\int_{x\div\alpha}(x^2\cdot\varphi_z + 2xz\cdot\varphi_z + z^2\cdot\varphi_z)dz \quad \text{oder} \quad \tfrac{1}{2}\int_{x\div\alpha}(x-z)^2\cdot\varphi_z\cdot dz,$$

während die Reihe 5.) auf demselben Wege übergeht in

7) $$\frac{1}{(n-1)!}\int_{x\div\alpha}(x-z)^{n-1}\varphi_z\cdot dz.$$

Das Ergänzungs-Glied E_x, welches man durch n fach wiederholte Integration von $\partial^n f_x$ erhält, unter der Voraussetzung, daß jedes Integral mit $x=\alpha$ anfängt, ist daher nun durch ein einfaches Integral ausgedrückt, nämlich

8) $$E_x = \frac{1}{(n-1)!}\int_{x\div\alpha}(x-z)^{n-1}\partial^n f_z\cdot dz.$$

Dieses Ergänzungs-Glied E_x liegt daher, weil $(x-z)^{n-1}$ für alle Werthe von z zwischen $z=\alpha$ und $z=x$ immerfort einerlei Zeichen behält, also für positive Werthe von x immer positiv ist (für einen negativen Werth von x aber immerfort negativ, in welchem Falle man jedoch $-E_x$ betrachten kann) nach §. 24. V.) zwischen den Grenzen

9) $$\begin{cases} \frac{1}{(n-1)!}[\partial^n f_z]_g \int_{x\div\alpha}(x-z)^{n-1}\cdot dz \\ \text{und} \\ \frac{1}{(n-1)!}[\partial^n f_z]_k \int_{x\div\alpha}(x-z)^{n-1}\cdot dz, \end{cases}$$

wenn $[\partial^n f_z]_g$ und $[\partial^n f_z]_k$, wofür man auch $[\partial^n f_x]_g$ und $[\partial^n f_x]_k$ schreiben kann, den größten und kleinsten der von $x = \alpha$ an bis zu $x = x$ hin liegenden Werthe von $\partial^n f_x$ vorstellen.

Weil aber

$$\int (x-z)^{n-1}\cdot dz = -\frac{(x-z)^n}{n} + C,$$

also

$$\int_{x\div\alpha}(x-z)^{n-1}\cdot dz = \frac{(x-\alpha)^n}{n}$$

ist, so reduciren sich die obigen Grenzen in 9.), zwischen denen das Ergänzungs-Glied E_x liegt, auf diese

10) $$[\partial^n f_x]_g \cdot \frac{(x-\alpha)^n}{n!} \quad \text{und} \quad [\partial^n f_x]_k \cdot \frac{(x-\alpha)^n}{n!};$$

und dadurch sind die beiden Sätze dieses Paragraphen außer Zweifel gestellt, weil der zweite aus der hiesigen Gleichung hervorgeht, wenn man $\alpha + h$ statt x, statt α aber zuletzt wieder x schreibt; während der erste Satz aus dem hier erwiesenen unmittelbar hervorgeht, wenn man bloß 0 statt α schreibt.

Diese von Lagrange gegebenen Grenzen der Taylor'schen und Maclaurin'schen Reihe sind aber für die Analysis und ihre Anwendungen von unberechenbarer Wichtigkeit.

§. 26.

Ist

$$\int y \cdot dx = f_x,$$

so nimmt der Taylor'sche Lehrsatz mit dem Ergänzungs-Gliede d. h. der Satz §. 25. II.) diese Form an:

$$(\mathfrak{C})\cdots \quad f_{x+h} - f_x = y_x \cdot \frac{h}{1} + \partial y_x \cdot \frac{h^2}{2!} + \partial^2 y_x \cdot \frac{h^3}{3!} + \cdots$$
$$+ \partial^{n-2} y_x \cdot \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} + [\partial^{n-1} y_x]_{x+\vartheta h} \cdot \frac{h^n}{n!},$$

Setzt man nun hier a statt x und b—a statt h, so geht diese Gleichung über in:

$$\text{I. } \int_{b\div a} y\cdot dx = y_a\cdot\frac{b-a}{1}+\partial y_a\cdot\frac{(b-a)^2}{2!}+\partial^2 y_a\cdot\frac{(b-a)^3}{3!}+\cdots$$
$$+\partial^{n-2}y_a\cdot\frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}+[\partial^{n-1}y_x]_{a+\vartheta(b-a)}\cdot\frac{(b-a)^n}{n!}.$$

Wird aber zuerst in (C.) $-h$ statt h substituirt und dann b statt x und $b-a$ statt h, so erhält man noch:

$$\text{II. } \int_{b\div a} y\cdot dx = y_b\cdot\frac{b-a}{1}-\partial y_b\cdot\frac{(b-a)^2}{2!}+\partial^2 y_b\cdot\frac{(b-a)^3}{3!}+\cdots$$
$$\pm\partial^{n-2}y_b\cdot\frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}\mp[\partial^{n-1}y_x]_{b-\vartheta(b-a)}\cdot\frac{(b-a)^n}{n!},$$

während in beiden Formeln ϑ zwischen 0 und 1 liegt und unbekannt bleibt, so daß der Koefficient von $\frac{(b-a)^n}{n!}$ jedesmal zwischen dem größten und kleinsten Werthe liegt, den $\partial^{n-1}y_x$ annimmt, wenn statt x nach und nach alle Werthe von a bis b hin gesetzt werden.

In den Anwendungen dieser Formeln kann man zwischen a und b noch beliebig viele Zwischen-Werthe $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots \alpha_r$ sich denken, und dann nach und nach die Integrale zwischen den Grenzen a und α_1, dann zwischen α_1 und α_2, u. s. f. zuletzt zwischen den Grenzen α_r und b, jedes nach einer dieser Formeln I.) oder II.) berechnen, und alle diese Resultate addiren, um zuletzt $\int_{b\div a} y\cdot dx$ selbst zu haben (nach §. 24. I.). Die einzelnen Reihen sind dann deshalb schneller convergent, weil sie nach Potenzen der beliebig klein genommenen Differenzen α_1-a, $\alpha_2-\alpha_1$, $\alpha_3-\alpha_2$, $\cdots$ $b-\alpha_r$ fortgehen. — Auch kann man alle letzteren Differenzen einander gleich und $=\alpha$ nehmen, so daß alle Reihen nach Potenzen eines und desselben kleinen Werthes α fortlaufen.

VI.

Zweite Reihe

der

Anwendungen der höhern Analysis.

Drittes Kapitel.

Rektifikation der Kurven überhaupt und Quadratur der ebenen Kurven.

§. 27.

I. Ist ECMDF (Fig. 1.) eine durch die Gleichung

$$y = y_x$$

gegebene Kurve; und soll der Inhalt ACDB bestimmt werden, zwischen dem Bogen CMD, dem Stücke AB der Abscissen-Axe OX, und den mit der Ordinaten-Axe OY parallelen und auf AB senkrechten Geraden AC und BD, so findet man ohne Weiteres

$$\text{Inhalt ACMDBA} = \int_{b \div a} y_x \cdot dx,$$

wenn a und b die Abscissen-Werthe der Punkte A und B vorstellen, sobald nur, wie in der Figur vorausgesetzt worden ist, zwischen $x = a$ und $x = b$ alle Ordinaten-Werthe positiv sind, und die Kurve von $x = a$ an bis zu $x = b$ hin nicht ihre Stetigkeit unterbricht.

Denn, denkt man sich zunächst den besondern Fall, daß zwischen $x = a$ und $x = b$, die Ordinaten fortwährend wachsen, so kann man den Raum $AB = b - a$ in unendlich viele, unendlich kleine Theile zerlegen, deren jeder durch dx bezeichnet seyn mag. Denkt man sich nun über jedem dieser Theile als Grundlinie, mit den zu den Endpunkten dieser Theile gehörigen Ordinaten, als Höhen, Rechtecke gebildet, wie solche die Fig. 1.) sehen läßt, so ist augenfällig die Summe der äußern Rechtecke $> ACMDBA$, und die Summe der innern Rechtecke $< ACMDBA$. Da nun dx die gemeinschaftliche Grundlinie aller dieser Rechtecke ist, so ist die Summe der Inhalte der innern Rechtecke

$$= y_a \cdot dx + y_{a+dx} \cdot dx + y_{a+2dx} \cdot dx + \cdots + y_{b-dx} \cdot dx;$$

also ist, weil dx unendlich klein ist (nach §. 20.) dieselbe Summe

$$= \int_{b \div a} y_x \cdot dx.$$

Da nun das erste äußere Rechteck dem zweiten innern, das zweite äußere dem dritten innern, u. s. w. f. gleich ist, so ist die Summe der äußern Rechtecke, um das letzte Rechteck $y_b \cdot dx$ größer, dagegen um das erste Rechteck $y_a \cdot dx$ kleiner als die Summe der innern Rechtecke; folglich ist die Summe der äußern Rechtecke

$$= \int_{b \div a} y_x \cdot dx + (y_b - y_a) \cdot dx.$$

Weil aber der zweite Summand dieser Summe, nämlich $(y_b - y_a) \cdot dx$, unendlich klein ist, gegen den ersten Summanden, so ist diese Summe der Inhalte der äußern Rechtecke ebenfalls (nach I. Bd. §. 50.)

$$= \int_{b \div a} y_x \cdot dx.$$

Und daher ist der Inhalt **ACMDBA**, weil er immer zwischen der Summe der äußern und der Summe der innern Rechtecke liegt, ebenfalls

$$= \int_{b \div a} y_x \cdot dx.$$

Und da im Falle der Fig. 2.), wo die Ordinaten fortwährend abnehmen, ganz dieselben Schlüsse (mit wenigen Abänderungen) angewandt werden können, so gilt der Satz auch dann noch.

Und weil der Inhalt **ACMDBA** in Fig. 3.) in die beiden Inhalte **ACMP** und **PMDB** zerlegt gedacht werden kann, wo **PM** die größeste der zwischen $x = a$ und $x = b$ liegenden Ordinaten ist, so folgt, wenn $OP = \alpha$ gesetzt wird,

$$\text{Inhalt } \mathbf{ACMP} = \int_{\alpha \div a} y_x \cdot dx$$

und

$$\text{Inhalt } \mathbf{PMDB} = \int_{b \div \alpha} y_x \cdot dx;$$

folglich, wenn man beide Gleichungen addirt, nach §. 24. I.)

$$\text{Inhalt } \mathbf{ACMDB} = \int_{b \div a} y_x \cdot dx.$$

Endlich kann man die Richtigkeit des Satzes auch noch nachweisen, wenn zwischen $x = a$ und $x = b$ noch mehreremale die Ordinaten vom Wachsen zum Abnehmen, und vom Abnehmen zum Wachsen übergehen sollten, sobald nur alle Ordinaten-Werthe zwischen $x = a$ und $x = b$ positiv sind.

II. Ist die Gleichung der Kurve $y = y_x$ so, daß sie von $x = OH = \alpha$ an bis $x = OE = \beta$ hin (Fig. 3.) lauter **positive** Werthe von y, dagegen von $x = OE = \beta$ an bis $x = OF = \gamma$ hin lauter **negative** Werthe von y liefert, so ist zwischen E und F die positive Ordinate durch $-y$ vorgestellt, und der Inhalt ENF findet sich daher

$$= \int_{\gamma \div \beta} (-y_x) \cdot dx = -\int_{\gamma \div \beta} y_x \cdot dx.$$

In diesem Falle würde also $\int_{\gamma \div \beta} y_x \cdot dx$ den Inhalt ENF

nicht, sondern eine negative Zahl geben, deren absolutes Glied aber der Inhalt ENF seyn würde.

Und da (nach §. 24. I.)

$$\int_{\gamma \div \alpha} y_x \cdot dx = \int_{\beta \div \alpha} y_x \cdot dx + \int_{\gamma \div \beta} y_x \cdot dx$$

ist, so würde $\int_{\gamma \div \alpha} y_x \cdot dx$ die Differenz ausdrücken, zwischen dem Inhalte HME und dem Inhalte ENF, d. h. die Differenz HME — ENF.

III. Wäre noch eine zweite Kurve C′M′D′ gegeben durch die Gleichung $y' = y'_x$ (Fig. 4. oder Fig. 5.), während die erstere Kurve CMD noch immer durch die Gleichung $y = y_x$ gegeben seyn mag, so hätte man noch immer, wenn OA = a, OB = b gesetzt wird,

1) Inhalt $ACMDB = \int_{b \div a} y_x \cdot dx$;

und in Fig. 4.)

2) Inhalt $AC'M'D'B = \int_{b \div a} y'_x \cdot dx$;

dagegen in Fig. 5.), weil daselbst alle y′ negativ sind

3) Inhalt $AC'M'D'B = -\int_{b \div a} y'_x \cdot dx$,

wo, wie sich von selbst versteht, jeder Inhalt positiv ist.

Subtrahirt man nun 2.) von 1.) in Fig. 4.), oder addirt man 3.) zu 1.) in Fig. 5.), so erhält man jedesmal

(⊙) … Inhalt $CC'M'D'DM = \int_{b \div a} (y_x - y'_x) \cdot dx$;

und dieselbe Formel gilt offenbar auch noch, wenn die Fälle der Figg. 6. oder 7.) eintreten sollten, ja selbst dann noch, wenn die Fig. 8) statt hat, wie sich sehr einfach nachweisen läßt, wenn das bisher Gesagte weiter verfolgt wird; so lange man nur $y_x - y'_x$ positiv voraussetzt.

IV. Endlich erleiden alle diese Formeln durchaus keine Aenderung, wenn a negativ seyn sollte, d. h. wenn die Koordinaten-Axe OY zwischen AC und BD zu liegen käme. Und eben so wenig ändern sich diese Formeln, wenn a und b zugleich negativ sind, d. h. wenn die Ordinaten-Axe OY rechts von BD zu liegen kommen sollte, sobald nur $b > a$ d. h.

b—a positiv bleibt, weil dann die Grundlinie dx der einzelnen Rechtecke doch immer positiv ist, und weil nach §. 20.) unter allen Umständen das Integral $\int_{b\div a} y \cdot dx$ die Summe der unendlich vielen Produkte

$$y_a \cdot dx + y_{a+dx} \cdot dx + y_{a+2dx} \cdot dx + \cdots + y_{b-dx} \cdot dx$$

vorstellt.

V. Die Formel III. ⊙.) wird besonders dann auch angewandt, wenn die zweite, durch $y' = y'_x$ gegebene Kurve, nichts anders als ein zweiter Zweig einer und derselben Kurve seyn sollte, d. h. wenn die Gleichung $y = y_x$ zu einem Werthe von x, zwei verschiedene Werthe von y liefern sollte, von denen der größere durch y, der kleinere aber durch y' bezeichnet seyn kann, so daß $y - y'$ positiv bleibt.

Dies alles mag nun durch einige Beispiele näher erörtert werden.

Beispiel 1. Ist (Fig. 9.) MOM′ die durch die Gleichung

$$y^2 = px \quad \text{oder} \quad y = \sqrt{px}$$

gegebene Parabel, so ist, wenn $OA = a$, und $OP = x$ gesetzt wird,

1) Inhalt $OPM = \int_{x\div 0} \sqrt{px} \cdot dx = \frac{2}{3} x \cdot \sqrt{px}$ *) $= \frac{2}{3} xy$ **).

Dagegen ist, weil der andere Werth von y, nämlich $y', = -\sqrt{px}$ wird,

2) Inhalt $MOM' = \int_{x\div 0} (\sqrt{px} - (-\sqrt{px})) \cdot dx = 2\int_{x\div 0} \sqrt{px} \cdot dx.$

Ferner findet sich

3) Inhalt $ACMP = \int_{x\div a} \sqrt{px} \cdot dx = \frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} (x^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}})$.

Würde man in derselben Parabel lieber x in y ausdrücken, so wäre ihre Gleichung

$$x = \frac{1}{p} y^2;$$

und

---

*) Es ist nämlich $\sqrt{px} = p^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}}$, also

$$\int \sqrt{px} \cdot dx = p^{\frac{1}{2}} \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}};$$

und weil dieser Ausdruck für $x = 0$ selbst der Null gleich wird, so ist auch

$$\int_{x\div 0} \sqrt{px} \cdot dx = \frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} x \cdot \sqrt{px}.$$

**) Der Inhalt OPM ist also $\frac{2}{3}$ von dem Inhalte des Rechtecks OPMQ.

und dann fände sich

4) Inhalt $OQM = \int_{y \div 0} \frac{1}{p} y^2 \cdot dy = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{p} y^3 = \frac{1}{3} xy$;

und, wenn $OB = b$ gesetzt wird,

5) Inhalt $BCMQ = \int_{y \div b} \frac{1}{p} y^2 \cdot dy = \frac{1}{3p}(y - b^3)$,

wobei man bemerken mag, daß a und b zusammengehörige Koordinaten-Werthe der Parabel für den Punkt C sind, daß man also noch die Gleichung

$$b^2 = pa$$

hat, vermöge welcher b in a, oder a in b ausgedrückt werden kann.

Beispiel 2. Ist $OE = r$ der Radius und O der Mittel-Punkt eines Kreises CMDE (Fig. 10.), so ist, wenn x und y die aus O genommenen Koordinaten-Werthe (OP und PM) eines beliebigen Punktes M desselben vorstellen, die Gleichung dieses Kreises

$$y^2 = r^2 - x^2 \quad \text{oder} \quad y = \sqrt{r^2 - x^2};$$

und man hat, wenn $OA = a$ und $OB = b$ gesetzt wird,

1) Inhalt $OFMP = \int_{x \div 0} \sqrt{r^2 - x^2} \cdot dx$;

2) Inhalt $ACMP = \int_{x \div a} \sqrt{r^2 - x^2} \cdot dx$;

3) Inhalt $ACMDB = \int_{b \div a} \sqrt{r^2 - x^2} \cdot dx$;

4) Inhalt $PME = \int_{r \div x} \sqrt{r^2 - x^2} \cdot dx$;

5) Inhalt $OFME = \int_{r \div 0} \sqrt{r^2 - x^2} \cdot dx$;

6) Inhalt $GMP = \int_{x \div (-r)} \sqrt{r^2 - x^2} \cdot dx$;

7) Inhalt $GFEG = \int_{r \div (-r)} \sqrt{r^2 - x^2} \cdot dx$;

u. s. w. f.

Alles kommt nun darauf an, $\int \sqrt{r^2 - x^2} \cdot dx$ zu finden. Dies geschieht entweder indem man (nach §. 12.) diese irrationale Funktion rational macht, oder indem man die Reduktions-Formeln des §. 13.) anwendet. Man kann, will man das letztere thun, zuerst $\frac{r^2 - x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}}$ statt $\sqrt{r^2 - x^2}$ schreiben; hernach kann man nach dem Verfahren, welches bei §. 13. N. 2.) angewandt worden ist, $x \cdot \sqrt{r^2 - x^2}$ differenziiren. Man erhält dann

$$\partial(x \cdot \sqrt{r^2 - x^2}) = \frac{r^2 - 2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} = 2\frac{r^2 - x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} - \frac{r^2}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Folglich ist, wenn man durch 2 dividirt, und integrirt

$$\int \frac{r^2 - x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} \cdot dx = \tfrac{1}{2} x \cdot \sqrt{r^2 - x^2} + \tfrac{1}{2} r^2 \cdot \int \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}} \cdot dx,$$

d. h. nach §. 5. N. 11.) oder §. 6. N. 18.)

$$\int \sqrt{r^2 - x^2} \cdot dx = \tfrac{1}{2}x \cdot \sqrt{r^2 - x^2} - \tfrac{1}{2}r^2 \cdot \frac{1}{cos}\frac{x}{r}.$$

Subſtituirt man nun dieſes Reſultat in die Formeln 1.—7.), ſo ergiebt ſich, weil $\frac{1}{cos}0 = \frac{1}{2}\pi$ iſt,

1′) Inhalt $OFMP = \frac{1}{2}x \cdot \sqrt{r^2 - x^2} + \frac{1}{4}r^2\pi - \frac{1}{2}r^2 \cdot \frac{1}{cos}\frac{x}{r}$ *).

2′) Inhalt ACMP

$$= \tfrac{1}{2}x\sqrt{r^2 - x^2} - \tfrac{1}{2}a\sqrt{r^2 - a^2} + \tfrac{1}{2}r^2 \cdot \frac{1}{cos}\frac{a}{r} - \tfrac{1}{2}r^2 \cdot \frac{1}{cos}\frac{x}{r},$$

3′) Inhalt ACMDB

$$= \tfrac{1}{2}b\sqrt{r^2 - b^2} - \tfrac{1}{2}a\sqrt{r^2 - a^2} + \tfrac{1}{2}r^2 \cdot \frac{1}{cos}\frac{a}{r} - \tfrac{1}{2}r^2 \cdot \frac{1}{cos}\frac{b}{r}.$$

Ferner, weil $\frac{1}{cos}1 = 0$ iſt,

4′) Inhalt $PME = -\tfrac{1}{2}x\sqrt{r^2 - x^2} + \tfrac{1}{2}r^2 \cdot \frac{1}{cos}\frac{x}{r}$ **),

5′) Inhalt $OFME = \tfrac{1}{2}r^2 \cdot \frac{1}{cos}0 = \tfrac{1}{2}r^2 \cdot \tfrac{1}{2}\pi = \tfrac{1}{4}r^2\pi.$

Endlich noch, weil $\frac{1}{cos}(-1) = \pi$ iſt,

6′) Inhalt $GMP = \tfrac{1}{2}x\sqrt{r^2 - x^2} - \tfrac{1}{2}r^2 \cdot \frac{1}{cos}\frac{x}{r} + \tfrac{1}{2}r^2 \cdot \pi.$

Zuletzt, weil $\frac{1}{cos}1 = 0$ und $\frac{1}{cos}(-1) = \pi$ iſt,

7′) Inhalt $GFE = -\tfrac{1}{2}r^2 \cdot \frac{1}{cos}1 + \tfrac{1}{2}r^2 \cdot \frac{1}{cos}(-1) = \tfrac{1}{2}r^2\pi.$

---

*) Es drückt $\frac{1}{4}r^2\pi$ den Quadranten OFME aus. Ferner iſt $\frac{1}{cos}\frac{x}{r}$ nichts anders als der Winkel MOE im Bogen für den Radius 1 ausgedrückt; alſo iſt $\frac{1}{2}r^2 \cdot \frac{1}{cos}\frac{x}{r}$ der Inhalt des Sektors MOE. Endlich iſt $\frac{1}{2}x \cdot \sqrt{r^2 - x^2} = \frac{1}{2}xy = \triangle OMP$. Folglich konnte man das Reſultat 1′.) ohne Integration, aus der Euklid. Geometrie ableiten.

**) Es iſt $\frac{1}{2}x\sqrt{r^2 - x^2} = \frac{1}{2}x \cdot y = \triangle OMP$

und $\frac{1}{2}r^2 \cdot \frac{1}{cos}\frac{x}{r} =$ Inhalt des Sektors OMEO;

alſo hätte man auch dieſes Reſultat unmittelbar aus der Euklidiſchen Geometrie erhalten können, ohne die Integral-Rechnung zu Hülfe nehmen zu müſſen.

So findet sich also der Inhalt des ganzen Kreises $= r^2\pi$, wie in der Euklidischen Geometrie *).

Beispiel 3. Soll der Inhalt der durch die Gleichung

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2) \quad \text{oder} \quad y = \frac{b}{a}\sqrt{2ax - x^2}$$

gegebenen Ellipse OMDB (Fig. 11.) gefunden werden, so hat man

$$\text{Inhalt OMP} = \int_{x\div 0} \frac{b}{a}\sqrt{2ax - x^2}\cdot dx = \frac{b}{a}\int_{x\div 0}\sqrt{2ax - x^2}\cdot dx.$$

Es ist aber $\int_{x\div 0}\sqrt{2ax - x^2}\cdot dx$ der Inhalt ONP des Kreises, welcher den Radius $CO = CB = a$ und mit der Ellipse den Mittelpunkt C gemein hat. Folglich ist

$$\text{Inhalt OMP} = \frac{b}{a} \times \text{Inhalt ONP}.$$

Nun ist der Inhalt ONP oder vielmehr

$$\int_{x\div 0}\sqrt{2ax - x^2}, = \tfrac{1}{2}a^2\cdot\frac{1}{cos}\frac{a-x}{a} - \tfrac{1}{2}(a-x)\sqrt{2ax - x^2};$$

folglich ist

$$\text{Inhalt OMP} = \tfrac{1}{2}ab\cdot\frac{1}{cos}\frac{a-x}{a} - \tfrac{1}{2}\frac{b}{a}(a-x)\sqrt{2ax - x^2}.$$

Also ist auch, wenn $x = a$ gesetzt wird, und weil $\frac{1}{cos}0 = \frac{1}{2}\pi$ ist,

$$\text{Inhalt OCD} = \tfrac{1}{4}ab\pi.$$

Der Inhalt der ganzen Ellipse ist daher $= ab\pi$ **).

---

*) Da das Integriren immer mühsam ist, so bedient man sich zuweilen solcher geometrischen Betrachtungen, um ein Integral ohne zu integriren zu finden. Soll z. B. $\int\sqrt{2ax - x^2}\cdot dx$ gefunden werden, so erinnere man sich, daß $y = \sqrt{2ax - x^2}$ die Gleichung eines Kreises ist, der den Radius a hat, daß also $\int_{x\div 0}\sqrt{2ax - x^2}\cdot dx$ den Inhalt GNQ des Kreises (Fig. 10.) ausdrückt, wenn $GQ = x$ gesetzt wird. Nun ist aber Inhalt GNQ = Sektor GNO − △NOQ; und zu gleicher Zeit ist der Winkel NOG im Bogen für den Radius 1 ausgedrückt, $= \frac{1}{cos}\frac{OQ}{ON} = \frac{1}{cos}\frac{a-x}{a}$, folglich Bog. $NG = a\cdot\frac{1}{cos}\frac{a-x}{a}$ und Sektor $NOGN = \frac{1}{2}a^2\cdot\frac{1}{cos}\frac{a-x}{a}$. Ferner ist $\triangle NOQ = \frac{1}{2}OQ\cdot QN = \frac{1}{2}(a-x)\cdot\sqrt{2ax - x^2}$; folglich findet sich auf diesem Wege

$$\int\sqrt{2ax - x^2}\cdot dx = \tfrac{1}{2}a^2\cdot\frac{1}{cos}\frac{a-x}{a} - \tfrac{1}{2}(a-x)\cdot\sqrt{2ax - x^2}.$$

**) Es ist $OMP = \frac{b}{a}\cdot ONP$ und $\triangle CMP = \frac{b}{a}\triangle CNP$; folglich

Beispiel 4. Suchen wir noch den Inhalt der durch die Gleichung

$$y = \frac{c}{x}$$

gegebenen Hyperbel (Fig. 12.). — Hier wird

$$\int y \cdot dx = \int \frac{c}{x} \cdot dx = c \cdot log\, x.$$

Sucht man nun den Inhalt ACDB von $x = -OA = a$ an, bis $x = -OB = b$ hin, so erhält man (nach II.)

$$\text{Inhalt ACDB} = \int_{b \div a} -y \cdot dx = c \cdot log\, a - c \cdot log\, b = c \cdot log \frac{a}{b},$$

wo a und b beide negativ sind, wo also $\frac{a}{b}$ positiv ist.

Soll dagegen der Inhalt EFHG, von $x = OE = \alpha$ an bis zu $x = OG = \beta$ hin gefunden werden, so erhält man

$$\text{Inhalt EFHG} = c \cdot log\, \beta - c \cdot log\, \alpha = c \cdot log \frac{\beta}{\alpha},$$

wo immer die natürlichen Logarithmen zu verstehen sind.

Ist $\alpha < 1$, so ist $log\, \alpha$ negativ; also ist dann derselbe Inhalt größer als $log\, \beta$. Dagegen ist derselbe Inhalt $< log\, \beta$, wenn $\alpha > 1$ ist. Für $\alpha = 1$ ist derselbe Inhalt $= log\, \beta$.

Wollte man den Inhalt finden zwischen OY und GH, d. h. von $x = 0$ an, bis $x = OG = \beta$ hin, so würde man selbigen erhalten

$$= c \cdot log\, \beta - c \cdot log\, 0;$$

und dies zeigt an, daß dieser Inhalt unendlich groß ist. Dies letztere sieht man aber dann erst am deutlichsten ein, wenn man zuerst α sehr klein, etwa $= \frac{1}{n}$ nimmt, wo n recht groß und zuletzt unendlich groß gedacht werden kann. Dann findet sich derselbe Inhalt $= c \cdot log\, (n\beta)$; folglich mit n zugleich unendlich groß. — Dies kann nicht auffallen, da OY die Asymptote der Hyperbel ist, letztere also nie mit OY sich schneidet, wenn auch beide einander unendlich nahe rücken.

Im nächsten Beispiele werden wir aber sehen, daß es Fälle geben kann, wo der Inhalt zwischen einer Asymptote und einer Ordinate doch einen endlichen bestimmten Werth hat.

Beispiel 5. Es sey gegeben die Gleichung

$$y^3 = \frac{a^2}{x^2} \qquad \text{oder} \qquad y = \left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{2}{3}},$$

---

auch, wenn man addirt

$$\text{Sektor OCM} = \frac{b}{a} \times \text{Sektor OCN}$$
$$= \tfrac{1}{2} b \times \text{Bog. ON}.$$

so giebt solche die Kurve, wie sie in Fig. 13.) zu sehen ist, wo OY und OX zwei Asymptoten sind, während die beiden Zweige links und rechts von OY einander congruent sind. Soll nun der Inhalt zwischen OY und PM gefunden werden, während $OP = x$ ist, so erhält man zunächst

$$\int y \cdot dx = \int a^{\frac{2}{3}} x^{-\frac{2}{3}} \cdot dx = 3a^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{1}{3}} = 3\sqrt[3]{a^2 x};$$

folglich ist

$$\text{Inhalt YOPM} = \int_{x \div 0} y \cdot dx = 3\sqrt[3]{a^2 x} = 3xy;$$

d. h. dieser Inhalt ist nicht unendlich-groß, sondern hat einen völlig bestimmten Werth, und zwar ist er drei mal so groß, als das von x und y gebildete Rechteck OPMQ.

Weil aber y, wenn auch nicht zwischen den Grenz-Werthen von x, aber doch an der Grenze, nämlich für $x = 0$, den Werth $\frac{1}{0}$ annimmt, die Kurve also ihre Stetigkeit an dieser Stelle unterbricht, so braucht das so eben gefundene Resultat doch noch der Bestätigung. Zu dem Ende suche man den Inhalt QMAB, welcher zwischen den Grenz-Werthen von y, nämlich $y = OQ = y$ und $y = OA = \beta$ liegt. Man findet

$$\text{Inhalt QMAB} = \int_{\beta \div y} x_y \cdot dy = \int_{\beta \div y} \frac{a}{y^{\frac{3}{2}}} \cdot dy;$$

weil aber $\int \frac{a}{y^{\frac{3}{2}}} \cdot dy = a \int y^{-\frac{3}{2}} \cdot dy = -2\frac{a}{\sqrt{y}}$ wird, so findet sich weiter

$$\text{Inhalt QMAB} = 2\frac{a}{\sqrt{y}} - 2\frac{a}{\sqrt{\beta}}.$$

Nimmt man hier $\beta = \infty$, und addirt man das Rechteck $OPMQ = xy$ noch hinzu, so erhält man

$$\text{Inhalt YOPM} = 2\frac{a}{\sqrt{y}} + xy;$$

und dies giebt genau den auch oben gefundenen Ausdruck, sobald statt y sein Werth $\frac{a^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}$, und statt $\sqrt{y}$ ihr Werth $\frac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}$ gesetzt wird.

Sucht man den Inhalt CDOY, zwischen $x = -OC = \alpha$ und $x = 0$, so erhält man

$$\text{Inhalt DCOY} = \int_{0 \div \alpha} y \cdot dx = -3\sqrt[3]{a^2 \alpha};$$

welcher Ausdruck deshalb positiv ist, weil α, folglich auch die Kubikwurzel aus $a^2\alpha$ einen negativen Werth hat. Addirt man diese beiden hier gefundenen Inhalte, so ergiebt sich noch

$$\text{Inhalt DCPM} = 3\sqrt[3]{a^2 x} - 3\sqrt[3]{a^2 \alpha}.$$

Daſſelbe hätte man auch erhalten, wenn man dieſen Inhalt $DCPM = \int_{x \div \alpha} y_x \cdot dx$ genommen hätte. Dasmal iſt alſo der Inhalt zwiſchen $x = \alpha$ und $x = x$ doch noch $\int_{x \div \alpha} y_x \cdot dx$, obgleich zwiſchen $x = -OC = \alpha$ und $x = OP = x$ ein Werth von x (nämlich $x = 0$) liegt, für welchen $y = \frac{1}{0}$ wird.

Beiſpiel 6. Nimmt man dagegen die Kurve

$$y = \left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{4}{3}},$$

ſo kann man ſie, was die Aſymptoten und die äußere Form anlangt, ebenfalls durch die Fig. 13.) vorſtellen. Nun iſt aber

$$\int y \cdot dx = a^{\frac{4}{3}} \int x^{-\frac{4}{3}} \cdot dx = -3 \frac{a^{\frac{4}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}} = -3a \sqrt[3]{\frac{a}{x}}.$$

Deshalb iſt jetzt

$$\text{Inhalt } YOPM = \int_{x \div 0} y \cdot dx = 3a \sqrt[3]{\frac{a}{0}} - 3a \sqrt[3]{\frac{a}{x}};$$

folglich iſt jetzt dieſer Inhalt unendlich-groß, wie man deutlicher erſieht, wenn man die zweite Grenze von x nicht Null, ſondern $= \frac{1}{n}$ nimmt, zuletzt aber n unendlich-groß ſich denkt *).

Beiſpiel 7. Nimmt man die Kurve (Fig. 17.), welche durch die Gleichung

$$y = \frac{1}{1 + x^2}$$

gegeben iſt, ſo findet ſich

$$\int y \cdot dx = \frac{1}{tg} x, \quad \text{auch} \quad = \frac{1}{cos} \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Iſt nun $OA = \alpha$, $OB = \beta$, $-OC = \gamma$ und $-OD = \delta$, ſo findet ſich

---

*) Wollte man hier den Inhalt CDPM dadurch finden, daß man ihn $= \int_{x \div \alpha} y \cdot dx$ nimmt, ſo würde man ihn

$$= 3a \sqrt[3]{\frac{a}{\alpha}} - 3a \sqrt[3]{\frac{a}{x}}$$

erhalten, während er unendlich-groß iſt. Wir ſind aber auch nicht berechtigt, dieſen Inhalt $= \int_{x \div \alpha} y \cdot dx$ zu ſetzen, weil y zwiſchen dieſen Grenz-Werthen von x, einmal (für $x = 0$) die Form $\frac{1}{0}$ annimmt, die Kurve alſo ihre Stetigkeit unterbricht.

$$\text{Inhalt OKAE} = \frac{1}{tg}\alpha - \frac{1}{tg}0 = \frac{1}{tg}\alpha,$$

$$\text{aber auch} \quad = \frac{1}{cos}\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} - \frac{1}{cos}\sqrt{1} = \frac{1}{cos}\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}};$$

$$\text{Inhalt OKCG} = \frac{1}{tg}0 - \frac{1}{tg}\gamma = -\frac{1}{tg}\gamma,$$

$$\text{aber auch} \quad = \frac{1}{cos}\sqrt{1} - \frac{1}{cos}\frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}} = -\frac{1}{cos}\frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}},$$

wo α positiv, wo aber γ negativ ist, so daß $\frac{1}{tg}\gamma$ selbst negativ, also $-\frac{1}{tg}\gamma$ positiv genommen werden kann. Allein wenn auch γ negativ ist, so ist doch γ^2 positiv, und auch $\sqrt{1+\gamma^2}$ kann positiv genommen werden. Es scheint daher der zweite Ausdruck des Inhaltes OKCG negativ zu werden. Weil dies aber Unsinn wäre, so wird man sich lieber daran erinnern, daß $\frac{1}{cos}$ unendlich viele positive und negative Werthe hat, und daß man in jedem besondern Falle den rechten Werth eines vieldeutigen Ausdrucks erst ausmitteln müsse. Hier muß nun für $\frac{1}{cos}\frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}}$ der negative Werth genommen werden, damit $-\frac{1}{cos}\frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}}$ wiederum positiv ist. Es findet sich ferner

$$\text{Inhalt CGAE} = \frac{1}{tg}\alpha - \frac{1}{tg}\gamma,$$

$$\text{aber auch} \quad = \frac{1}{cos}\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} - \frac{1}{cos}\frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}},$$

wo aber auch der zweite $\frac{1}{cos}$ negativ genommen werden muß, so daß derselbe Inhalt auch

$$= \frac{1}{cos}\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} + \frac{1}{cos}\frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}}$$

geschrieben werden kann und muß, sobald man die Bogen alle positiv nehmen will.

Eben so ist

$$\text{Inhalt ABFE} = \frac{1}{tg}\beta - \frac{1}{tg}\alpha = \frac{1}{cos}\frac{1}{\sqrt{1+\beta^2}} - \frac{1}{cos}\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}$$

und

$$\text{Inhalt DHCG} = \frac{1}{tg}\gamma - \frac{1}{tg}\delta,$$

und auch

$$= \frac{1}{cos}\frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}} - \frac{1}{cos}\frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}},$$

wo aber beide $\frac{1}{cos}$ negativ genommen werden müssen, so daß derselbe Inhalt auch

$$= \frac{1}{cos} \frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}} - \frac{1}{cos} \frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}}$$

geschrieben werden kann, sobald man sich vornimmt, statt der $\frac{1}{cos}$ lauter positive Werthe zu setzen.

Dieser Bemerkungen muß man aber allemal eingedenk seyn, so oft das Integral, welches den Inhalt ausdrücken soll, ein mehrdeutiger Ausdruck wird.

Anmerkung 1. So oft man den Inhalt der durch die Gleichung

$$y = \varphi_x + \frac{\psi_x}{(x-a)^\mu}$$

gegebenen Kurve zwischen den Grenzen $x = \alpha$ und $x = \beta$ haben will, zwischen denen a liegt, so daß y zwischen diesen Grenzen einmal, nämlich für $x = a$, die Form $\frac{1}{0}$ annimmt, die Kurve also ihre Stetigkeit unterbricht, so oft ist der Inhalt doch noch immer

$$= \int_{\beta \div \alpha} y \cdot dx, \quad \text{wenn} \quad \mu < 1 \quad \text{ist,}$$

dagegen $= \infty$, wenn $\mu > 1$ ist, während in diesem letztern Falle das Integral $\int_{\beta \div \alpha} y \cdot dx$ den Inhalt endlich, folglich unrichtig, angeben würde.

Und namentlich ist der Inhalt, von der zu $x = a$ gehörigen Asymptote ab, allemal noch

$$= \int_{\beta \div a} y \cdot dx \quad \text{und endlich, wenn} \quad \mu < 1,$$

dagegen $= \infty$, wenn $\mu > 1$ seyn sollte. Dabei haben wir aber stillschweigend vorausgesetzt, daß φ_x und ψ_x ganz beliebige Funktionen von x sind, welche jedoch für keinen der Werthe von x, von α bis β hin, ihre Stetigkeit unterbrechen.

Die vorhergehenden Beispiele 5.) und 6.) liefern die Muster des hier zu gebenden allgemeinen Beweises. Außerdem kann man den zweiten Theil von y theilweise integriren, so daß man erhält

$$\int y \cdot dx = \int \varphi_x \cdot dx + \frac{1}{1-\mu} \cdot (x-a)^{1-\mu} \cdot \psi_x - \frac{1}{1-\mu} \int (x-a)^{1-\mu} \cdot \partial \psi_x \cdot dx,$$

und diese Formel, wenn man sie einmal unter der Voraussetzung betrachtet, daß $\mu < 1$ ist, dann auch indem man $\mu > 1$ voraussetzt, läßt die Wahrheit der Behauptung schon deutlich erkennen.

Anmerkung 2. Man kann auch die Inhaltsbestimmung aus dem Gesichtspunkte betrachten, daß man sagt: die Inhalte der Flächenfiguren (Fig. 2.) OEMP und ACMP, welche von der, zum Abscissen-Werthe $OP = x$ gehörigen Ordinate $MP = y$ begrenzt werden, sind verschiedene Funktionen von x, die jedoch nur um den constanten (d. h. von $x = OP$ unabhängigen) Theil EOCA, von einander verschieden sind, deren Ableitung nach x also jedesmal eine und dieselbe ist, so nämlich daß, wenn man irgend einen dieser Inhalte durch f_x bezeichnet, dann

$$\partial f_x = y$$

wird, wie wir im I. Bd. §. 174.) bereits gesehen haben.

Aus $\partial f_x = y$ folgt aber

$$f_x = \int y \cdot dx = \psi_x + C,$$

wenn ψ_x irgend ein besonderes Integral von $y \cdot dx$ ist. Ist nun ψ_x völlig bestimmt und gefunden, so muß noch die Constante C so bestimmt werden, daß $\psi_x + C$ gerade denjenigen der Inhalte OEMP oder ACMP ausdrückt, den man finden wollte. Soll aber z. B. der Inhalt ACMP gefunden werden, während $OA = a$ gegeben ist, so muß die gesuchte Funktion f_x oder $\psi_x + C$ so seyn, daß ihr Werth der Null gleich wird, sobald man a statt x setzt. Also hat man nothwendig, $\psi_a + C = 0$, d. h. $C = -\psi_a$, so daß

$$f_x = \psi_x - \psi_a$$

wird.

Nimmt man das Beispiel 6.) noch einmal vor, wo die Kurve (Fig. 13.) durch die Gleichung

$$y = \left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{q}{p}}$$

gegeben ist, und wo man also den Inhalt f_x zunächst wie folgt erhält, nämlich

$$f_x = -3a\sqrt[3]{\frac{a}{x}} + C;$$

und sucht man den Inhalt von CD an, während $-OC = \alpha$ gegeben ist, so erhält man

$$C = 3a\sqrt[3]{\frac{a}{\alpha}}, \quad \text{also} \quad f_x = 3a\sqrt[3]{\frac{a}{\alpha}} - 3a\sqrt[3]{\frac{a}{x}},$$

so oft x den Punkten des Zweiges DNL zukommt. Sobald aber x den Punkten des andern Zweiges BMH zukommt, so gilt diese Constante nicht mehr, sondern es wird dann $C = \infty$, so oft man den Inhalt von CD an genommen haben will, weil solcher dann allemal unendlich groß wird, wie wir im Beispiel 6.) gesehen haben *).

Betrachten wir noch die durch die Gleichung

$$y = -\frac{1}{x}$$

gegebene Hyperbel (Fig. 14.). Für sie wird der Inhalt

$$f_x = -\log x + C;$$

und soll der Inhalt von AB an genommen seyn, während $-OA = \alpha$ gegeben ist, so hat man

$$0 = -\log \alpha + C \quad \text{oder} \quad C = \log \alpha,$$

so daß der Inhalt $= \log \alpha - \log x = \log \frac{\alpha}{x}$ wird. Dasmal ist die Constante C imaginär, nämlich der natürliche Logarithme der negativen Zahl α; allein da für alle Punkte im Zweige BMH die Werthe von x negativ sind, so ist $\log x$ ebenfalls jedesmal imaginär. Diese beiden imaginären Logarithmen in Verbindung, geben dann den reellen Inhalt $\log \frac{\alpha}{x}$, in so fern $\frac{\alpha}{x}$ wiederum positiv ist.

§. 28.

Ist eine Kurve OMB (Fig. 15.) durch eine Gleichung zwischen Polar-Koordinaten gegeben, ist z. B. Winkel $OFM = v$ und $FM = r$ und die Kurve OMB gegeben durch die Gleichung

$$r = r_v,$$

während v im Bogen für den Radius 1 ausgedrückt wird, —

---

*) Dies ist ein Beispiel, wo die Constante einen andern Werth annimmt, sobald die Reihe der Werthe von y ihre Stetigkeit unterbricht. In Anwendungen auf trigonometrische Untersuchungen kommen aber viel instruktivere Fälle der Art vor.

und soll nun der Inhalt AFB gefunden werden, von $v = OFA = \alpha$ an, bis zu $v = OFB = \beta$ hin, so muß man den zum Radius 1 gehörigen Kreis-Bogen $\beta - \alpha$, der dem Winkel AFB entspricht, in unendlich viele Theile theilen, so daß jeder Theil durch dv bezeichnet werden kann. Zieht man nun durch alle Theilstriche von F aus die unendlich vielen Geraden FM, so zerlegt sich der Inhalt AFB in unendlich viele Sektoren, deren jeder, im Allgemeinen, zwei verschiedene Grenz-Radien hat. Zieht man aber mit diesen verschiedenen Radien Kreisbogen, so bilden sich für jeden dieser Sektoren zwei Kreissektoren, zwischen denen er liegt. Da nun, so lange die Radien-Vektoren wachsen, die Summe der innern Kreis-Sektoren offenbar kleiner ist als der Inhalt AFB, die Summe der äußern aber größer als er, so hat man wiederum zwei Grenzen, wovon die eine (nach §. 20.)

$$= \int_{\beta \div \alpha} \tfrac{1}{2} r^2 \cdot dv \text{ *)},$$

die andere aber $= \int_{\beta \div \alpha} \tfrac{1}{2} r^2 \cdot dv + \tfrac{1}{2}(r_\beta{}^2 - r_\alpha{}^2) \cdot dv$ ist.

Diese beiden Grenzen sind aber um unendlich wenig, d. h. in der Rechnung nicht verschieden, da dv unendlich-klein gedacht ist. Folglich ist der zwischen diesen Grenzen liegende

$$\text{Inhalt AFB} = \int_{\beta \div \alpha} \tfrac{1}{2} r^2 \cdot dv = \tfrac{1}{2} \int_{\beta \div \alpha} r^2 \cdot dv,$$

und da dies gilt 1) so lange die Radien-Vektoren beständig wachsen, und auch 2) wenn die Radien-Vektoren beständig abnehmen, so bleibt dasselbe auch dann noch gültig, 3) wenn sie beliebig wachsen und wieder abnehmen, u. s. w. f.; in so fern hier ganz das Verfahren des §. 27.) wiederholt werden kann, nur daß hier immer Kreissektoren statt der dortigen Rechtecke genommen werden.

---

*) Es ist nämlich dv der Bogen für den Radius 1, also r.dv der Kreisbogen für den Radius r. Multiplicirt man nun letztern noch mit $\frac{1}{2}r$, so hat man den Inhalt des Sektors. (Vgl. I. Bd. §. 174.)

§. 29.

Wird der Bogen CM einer Kurve OCM gesucht (Fig. 9.), welche entweder durch die Gleichung $y = y_x$ zwischen $OP = x$ und $PM = y$, oder durch die Gleichung $r = r_v$ zwischen Winkel $OFM = v$ und $FM = r$ gegeben ist, so findet sich solcher, wenn $OA = a$ und Winkel $OFC = \alpha$ gesetzt wird, unmittelbar nach I. Bd. §. 174.) und nach dem §. 20. d. II. Bd.), nämlich so:

1) $$\text{Bogen CM} = \int_{x \div a} \sqrt{1 + \partial y_x^2} \cdot dx$$

und auch

2) $$\text{Bogen CM} = \int_{v \div \alpha} \sqrt{\partial r_v^2 + r^2} \cdot dv.$$

Ist aber die Kurve eine doppelt gekrümmte und durch die beiden Gleichungen $y = y_x$ und $z = z_x$ gegeben, welche sich auf drei auf einander senkrechte Koordinaten-Axen OX, OY und OZ beziehen, so ist der zwischen den zu $x = a$ und $x = x$ gehörigen Endpunkten liegende Bogen s dieser Kurve so:

3) $$s = \int_{x \div a} \sqrt{1 + \partial y_x^2 + \partial z_x^2} \cdot dx.$$

Ist nämlich in einer Kurve doppelter Krümmung M der Punkt, dessen Koordinaten-Werthe x, y, z sind, und N der nächst anliegende Punkt, dessen Koordinaten-Werthe $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ sind, so ist MN der unendlich kleine Zuwachs des Bogens s, der durch ds bezeichnet werden kann. Diese Linie MN oder ds, als Gerade angesehen, ist aber der Länge nach (nach I. Bd. §. 135.), weil dx, dy, dz die Differenzen der Koordinaten-Werthe ihrer Endpunkte sind, ausgedrückt durch

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

während $dy = \partial y_x \cdot dx$ und $dz = \partial z_x \cdot dx$ ist, so daß

$$ds = \sqrt{1 + \partial y_x^2 + \partial z_x^2} \cdot dx$$

wird. Die Summe aller dieser Elementchen ds von $x = a$ an bis zu $x = x$ hin, ist aber der gesuchte Bogen s von $x = a$ an bis zu $x = x$ hin, also ist nach §. 20.)

$$s = \int_{x \div a} \sqrt{1 + \partial y_x^2 + \partial z_x^2} \cdot dx.$$

Beispiel 1. Sucht man den Bogen der durch die Gleichung

$$y = px^n$$

gegebenen Kurve, wo n ganz oder gebrochen seyn kann, so findet man $\partial y_x = npx^{n-1}$, folglich

$$s = \int_{x \div a} \sqrt{1 + n^2 p^2 x^{2n-2}} \cdot dx.$$

Ist z. B. $2n-2=1$, also $n=\frac{3}{2}$, so wird

$$s = \int_{x \div a} \sqrt{1 + n^2 p^2 x} \cdot dx = \tfrac{8}{27} p^2 \left(\sqrt{1 + \tfrac{9}{4} p^2 x} - \sqrt{1 + \tfrac{9}{4} p^2 a}\right) *),$$

und dies ist der Bogen der durch die Gleichung $y = px^{\frac{3}{2}}$ oder $y^2 = p^2 x^3$ gegebenen und gewöhnlich Parabel der dritten Ordnung genannten, Kurve.

Für die gewöhnliche Parabel ist $n=2$ und für sie wird daher der Bogen

$$s = \int_{x \div a} (1 + 4p^2 x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot dx.$$

Dieses Integral reducirt sich nach den Formeln des §. 13.) auf

$$\tfrac{1}{2} x (1 + 4p^2 x^2)^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{1 + 4p^2 x^2}} \cdot dx,$$

während das letztere Integral (im §. 6.) bereits

$$= \frac{1}{2p} \cdot log\left(2px + \sqrt{1 + 4p^2 x^2}\right)$$

gefunden worden ist. Man hat daher für $a = 0$

$$s = \tfrac{1}{2} x \sqrt{1 + 4p^2 x^2} + \frac{1}{4p} \cdot log\left(2px + \sqrt{1 + 4p^2 x^2}\right).$$

Für n negativ, also für die Hyperbeln der verschiedenen Ordnungen kann das Integral nicht in endlicher Form gefunden werden **).

Beispiel 2. Für die durch die Gleichung

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$

gegebene Ellipse, wird, wenn man $\frac{a^2 - b^2}{a^2} = e^2$ setzt, der Bogen

---

*) Diese Kurven werden Parabeln höherer Ordnung genannt, so lange n positiv ist; sie heißen aber Hyperbeln höherer Ordnung, wenn n negativ, also $-n$ positiv ist.

**) Eine Kurve heißt gewöhnlich quadrirbar oder rektificirbar, wenn die Integrale, welche den Flächen-Inhalt oder den Bogen geben, in endlicher Form gefunden werden können; im entgegengesetzten Falle ist sie „nicht quadrirbar" oder „nicht rektificirbar". Wir legen hier auf diesen Unterschied gar keinen Werth und halten alle Kurven für quadrirbar, auch alle für rektificirbar; denn die sogenannten Ausdrücke in endlicher Form sind oft nichts anders als unendliche Reihen, wie z. B. a^x, $sin\, x$, $\sqrt{1+x}$, etc. etc.

$$s = \int_{x \div a} \frac{\sqrt{1 - e^2x^2}}{\sqrt{1 - x^2}} \cdot dx.$$

Dieses Integral kann nur näherungsweise gefunden werden und wir haben im §. 18.) bereits eine unendliche Reihe gefunden, welche, wenn e sehr klein ist, und wenn x nicht größer als 1 gedacht wird, sehr schnell convergirt.

Beispiel 3. Suchen wir die Länge der doppelt gekrümmten Linie, welche, auf die Ebenen XOY und XOZ projicirt, bezüglich die durch die Gleichungen

$$y^2 = p^2x^3 \quad \text{und} \quad z^2 = q^2x^3$$

gegebenen Parabeln der dritten Ordnung liefert.

Hier ist

$$y = px^{\frac{3}{2}}, \quad \text{also} \quad \partial y_x = \tfrac{3}{2}px^{\frac{1}{2}};$$

und

$$z = qx^{\frac{3}{2}}, \quad \text{also} \quad \partial z_x = \tfrac{3}{2}qx^{\frac{1}{2}}.$$

Demnach ist

$$s = \int_{x \div a} \sqrt{1 + \tfrac{9}{4}(p^2 + q^2)x} \cdot dx$$
$$= \frac{8}{27(p^2 + q^2)} \left([1 + \tfrac{9}{4}(p^2 + q^2)x]^{\frac{3}{2}} - [1 + \tfrac{9}{4}(p^2 + q^2)a]^{\frac{3}{2}} \right).$$

Beispiel 4. Ist die Gleichung

$$r = av^n$$

der Spiralen gegeben, wo r und v Polar-Koordinaten sind, so hat man

$$\partial r_v = nav^{n-1};$$

also

$$r^2 + \partial r_v^{\,2} = a^2v^{2n-2}(v^2 + n^2)$$

und

$$s = \int_{v \div \alpha} av^{n-1} \sqrt{n^2 + v^2} \cdot dv = a \int_{v \div \alpha} v^{n-1} (n^2 + v^2)^{\frac{1}{2}} \cdot dv.$$

Für den besonderen Fall, wo $n = 1$ ist, findet man also

$$s = \int_{v \div \alpha} a(1 + v^2)^{\frac{1}{2}} \cdot dv;$$

und dieses Integral wird nach §. 13.) und §. 6.) ohne Weiteres gefunden.

Beispiel 5. Für die durch die Gleichung

$$r = e^{av}, \quad \text{oder} \quad v = \frac{1}{a} log\, r$$

gegebene logarithmische Spirale wird

$$\partial r_v = a \cdot e^{av}$$

folglich

$$\sqrt{r^2 + \partial r_v^{\,2}} = e^{av} \cdot \sqrt{1 + a^2};$$

Demnach ist

$$s = \sqrt{1 + a^2} \cdot \int_{v \div \alpha} e^{av} \cdot dv = \frac{\sqrt{1 + a^2}}{a} \cdot (e^{av} - e^{a\alpha}),$$

d. h. $$s = \frac{\sqrt{1+a^2}}{a} \cdot r,$$

wenn man den Bogen da anfangen läßt, wo $r = 0$ ist, d. h. für $\alpha = -\infty$.

Diese Spirale macht also unendlich viele Windungen, für welche $r < 1$ ist, und v negativ, und dann noch unendlich viele Windungen, in welchen $r > 1$ ist und v positiv. Die Länge der erstern unendlich vielen Windungen bis zu dem Punkte hin, wo $r = 1$, ist aber endlich und $= \frac{\sqrt{1+a^2}}{a}$.

§. 30.

Eine wichtige Bemerkung über die Rektifikation.

Es ist wichtig zu bemerken, daß weder die Theorie noch die Anwendung der Rektifikation der Kurven, sobald man rechtwinkliche Koordinaten-Axen gebraucht, der ebenen Trigonometrie bedürfen. Die gesammte Analysis bedarf derselben auch nicht. Folglich kann man die Rektifikation der Kurven vornehmen, ohne von der ebenen Trigonometrie nur eine Ahnung zu haben. Man trägt die gesammte Arithmetik, Algebra, Analysis des Endlichen und Differential- und Integral-Rechnung, mit einem Worte, den gesammten Kalkul vor, ohne das Daseyn einer Geometrie überhaupt nur zu kennen. Man kommt in der Analysis des Endlichen bei Gelegenheit der Auffindung des $log(p+q \cdot i)$ zu den beiden Reihen

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \text{ in inf.}$$

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \text{ in inf.}$$

die man unter den Namen *sin* x und *cos* x einer nähern und gründlichen Untersuchung unterwirft, ganz so wie wir dies im ersten Bande dieser Schrift gethan haben. Man gelangt so zur sogenannten analytischen Trigonometrie, welche keine Geometrie voraussetzt oder kennt, welche aber die Zahl $\pi = 3{,}14159\ldots$ einführt, und zwar als die kleinste ihrer Art, der die Eigenschaft zukommt, daß $sin \frac{1}{2}\pi = 1$ wird, d. h. daß die Reihe für *sin* x den Werth 1 annimmt, so oft man statt x die Zahl $\frac{1}{2}\pi$ setzt.

Daß diese Zahl π die Länge des Halbkreises ist, in dem Kreise dessen Radius $= 1$, weiß man natürlich nicht, da von Geometrie, also auch vom Kreise gar nicht die Rede seyn soll.

Hat man aber den gesammten Kalkul entwickelt, wie dies auch hier geschehen ist, sobald man die geometrischen Kapitel überschlägt und als nicht vorhanden ansieht, so kann man zur Euklidischen Geometrie übergehen, aber nur die einfachsten Sätze vom Dreieck, vom rechtwinklichen Dreieck in's Besondere, und vom Rechteck hinstellen; dann rechtwinkliche Koordinaten-Axen vorführen und den Theil der Elemente der analytischen Geometrie, der bloß solche Axen voraussetzt (also namentlich mit Uebergehung der schiefen Axen und der Polar-Koordinaten), um in diesen Elementen sogleich die Quadratur und die Rektifikation der Kurven vorzutragen, so wie solches in den vorliegenden §§. 27. und 28. N. 1.) geschehen ist, mit Weglassung aller Polar-Koordinaten, und aller Beispiele.

Ist dies geschehen, so stellt man sich die Aufgabe: Einen Kreisbogen zu rektificiren, d. h. die Länge eines Kreisbogens zu berechnen. — Ist r der Radius des Kreises, so ist, wenn man OX und OY Fig. 10.) als die rechtwinklichen Axen sich denkt, worauf die Koordinaten-Werthe x und y des Kreises sich beziehen, die Gleichung des Kreises diese:

$$y^2 = r^2 - x^2 \quad \text{oder} \quad y = \sqrt{r^2 - x^2};$$

also ist

$$\partial y_x = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}} \quad \text{und} \quad \sqrt{1 + \partial y_x^2} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}};$$

folglich ist, wenn Bogen EM durch s bezeichnet wird, und wenn x und y dem Punkte M angehören

$$s = \int_{r \div x} \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} \cdot dx.$$

Nun ist aber nach §. 6. N. 18.)

$$\int \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} \cdot dx = -r \cdot \frac{1}{cos}\,\frac{x}{r};$$

folg-

folglich, in so fern $\frac{1}{cos} 1 = 0$ ist,

$$\int_{r \div x} \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} \cdot dx = r \cdot \frac{1}{cos} \frac{x}{r};$$

d. h. Bogen CM oder $s = r \cdot \frac{1}{cos} \frac{x}{r}$,

wenn überall unter dem Zeichen $\frac{1}{cos}$ der kleinste (nicht negative) Werth dieses vieldeutigen Ausdrucks verstanden wird.

Denkt man sich nun den besondern Fall, wo der Radius $r = 1$ gedacht wird, so findet sich, wenn nun der Bogen EM durch σ bezeichnet wird

$$\text{Bogen EM oder } \sigma = \frac{1}{cos} x,$$

d. h.

I. $$cos\, \sigma = x.$$

Diese letztere Gleichung zeigt uns also, daß der Werth der Kosinus-Reihe

$$1 - \frac{\sigma^2}{2!} + \frac{\sigma^4}{4!} - \frac{\sigma^6}{6!} + \cdots \text{ in inf.}$$

allemal der Geraden OP oder x gleich ist, in dem Kreise dessen Radius 1, so oft statt σ der Bogen EM dieses Kreises gesetzt wird. Und da $x^2 + y^2 = 1$ ist, und die Sinus- und Kosinus-Reihen die Eigenschaft haben, daß

$$sin\, \sigma^2 + cos\, \sigma^2 = 1$$

ist, so folgt auch noch

II. $$sin\, \sigma = y$$ *);

d. h. der Werth der Sinus-Reihe $\sigma - \frac{\sigma^3}{3!} + \frac{\sigma^5}{5!} - \cdots$

*) Eigentlich folgt $x = \pm sin\, \sigma$. Weil aber für σ sehr klein und positiv, $sin\, \sigma$ und y zugleich positiv werden, so folgt, daß nur das + Zeichen rechts zu nehmen ist.

ist genau die Länge der Senkrechten MP oder y, in dem Kreise, dessen Radius 1 ist, wenn nur statt σ der Bogen EM desselben Kreises substituirt wird.

Und da in den Gleichungen I.) und II.) x und y nicht die Koordinaten selbst, sondern die Koordinaten-Werthe vorstellen, so folgt noch, daß die Werthe der Sinus- und Kosinus-Reihen eines jeden beliebig großen Bogens σ, allemal den Koordinaten-Werthen des Endpunktes M des Bogens σ gleich, also bald positiv, bald negativ, bald Null sind, d. h. gerade so sind, wie dies in den gewöhnlichen Vorträgen über Elementar-Trigonometrie als Definition der Sinus und Kosinus der Winkel festgesetzt wird.

Ist aber dies festgestellt, so darf man nur noch durch eine Definition festsetzen, daß man unter dem Sinus oder Kosinus irgend eines Winkels, derselbe mag spitz oder stumpf oder erhaben seyn, allemal den Sinus oder Kosinus des ihm in dem Kreise, dessen Radius 1 ist, zugehörigen Bogens verstehen wolle, — und die Grundlage der ebenen Trigonometrie ist gelegt, und die Paar Sätze derselben, nebst allen ihren vielseitigen Anwendungen können nun ohne Weiteres aufgestellt werden, ganz so wie wir im I. Bande dieser Schrift und zwar in den §§. 62. 63.) es vorausgesagt haben.

Würde aber dieser Gang in irgend einem Lehrbuche consequent durchgeführt, wie wir dieses in dem „Versuch eines vollkommen consequenten Systems der Mathematik" beabsichtigen (von welchem 7 Theile bereits längst erschienen sind, während die letztern 5 Theile noch nachgeliefert werden müssen), so würden wenigstens alle die Schwierigkeiten oder Lücken, welche jeder Vortrag der Elementar-Trigonometrie hat und nothwendig haben muß, gänzlich beseitigt erscheinen. Doch hier genug davon. Durch das so eben Gesagte haben wir wenigstens die Lücke ausgefüllt, welche wir im „Lehrbuch für den gesammten

mathematischen Elementar-Unterricht" 2te Aufl. §. 188. stehen lassen mußten.

§. 31.

Quadratur und Rektifikation, auch sonstige Eigenschaften der Cykloide.

Wird ein Kreis BMD (Fig. 16.) auf einer Geraden AX abgerollt, so beschreibt ein bestimmter Punkt der Peripherie dieses Kreises bei einer einmaligen Umdrehung eine krumme Linie AMEG, welche Cykloide genannt wird. Die Gleichung zwischen $AP = x$ und $PM = y$ für irgend einen Punkt M der Cykloide findet sich auf nachstehende Art. Es sey r der Radius des Erzeugungs-Kreises, und Winkel $MCD = v$ (im Bogen für den Radius 1 ausgedrückt), so ist Bogen $MD = rv$. Ferner ist Bogen $MD = AD$, während $PD = r \cdot \sin v$ und $CQ = r \cdot \cos v$, also $MP = r - r \cdot \cos v$ ist. Die beiden Gleichungen $AP = AD - DP$ und $MP = CD - CQ$ geben daher augenblicklich

1) $x = r \cdot (v - \sin v)$ und 2) $y = r \cdot (1 - \cos v)$;

und eliminirt man aus diesen beiden Gleichungen den Veränderlichen v, so erhält man die Gleichung zwischen x und y. — Zu dem letztern Zwecke finde man aus 1.) und 2.)

$$r \cdot \sin v = rv - x \quad \text{und} \quad r \cdot \cos v = r - y;$$

quadrire und addire diese beiden Gleichungen, und man erhält:

$$r^2 = (rv - x)^2 + (r - y)^2 \quad \text{oder} \quad rv - x = \sqrt{2ry - y^2},$$

woraus

$$v = \frac{x + \sqrt{(2r - y)y}}{r}$$

hervorgeht. Substituirt man aber diesen Werth in die Gleichung 2.), so erhält man

$$3) \qquad 1 - \frac{y}{r} = \cos \frac{x + \sqrt{(2r - y)y}}{r}$$

oder

$$x+\sqrt{(2r-y)y}=r\cdot\frac{1}{cos}\frac{r-y}{r}$$

d. h.

4) $$x=-\sqrt{(2r-y)y}+r\cdot\frac{1}{cos}\frac{r-y}{r}$$ *).

Dies ist die Gleichung der Cykloide, sogleich nach x aufgelöst. — Man bedient sich aber derselben nur in seltenern Fällen, sondern gebraucht immer die Gleichungen 1.) und 2.) an deren Stelle.

Will man z. B. die Cykloide (d. h. mehrere ihrer Punkte) construiren, so giebt man dem v allerlei Werthe von 0 an bis 2π hin, und berechnet sich aus den Gleichungen 1.) und 2.) sowohl x als auch y dazu. So erhält man zusammengehörige Koordinaten-Werthe x und y, folglich Punkte der Kurve, ohne die Gleichung zwischen x und y selbst zu benützen.

Will man Tangenten an die Cykloide ziehen, so braucht man den Ausdruck für ∂y_x. Man erinnert sich aber, daß (nach I. Bd. §. 155.)

5) $$\partial y_x=\frac{\partial y_v}{\partial x_v}$$

ist, und differenziirt daher die Gleichungen 1.) und 2.) nach allem v, und man erhält

6) $\partial x_v=r\cdot(1-cos\,v)$ und 7) $\partial y_v=r\cdot sin\,v$.

Dies giebt

8) $$\partial y_x=\frac{\partial y_v}{\partial x_v}=\frac{sin\,v}{1-cos\,v}=cotg\,\tfrac{1}{2}v=tg\,(\tfrac{1}{2}\pi-\tfrac{1}{2}v).$$

---

*) Diese Gleichung 4.) kann man direkt aus der Figur ableiten. Es ist nämlich x oder $AP=AD-MQ=$ Bog. $MD-MQ$. Nun ist aber Bog. $MD=r\cdot\frac{1}{cos}\frac{r-y}{r}$ und $DQ:MQ=MQ:BQ$, also

$$MQ^2=DQ\cdot BQ=y\cdot(2r-y),$$

d. h. $$MQ=\sqrt{(2r-y)y};$$

folglich ist $x=$ etc. etc. etc.

Da nun (nach I. Bd. §§. 170. 171.) ∂y_x die trigonometrische Tangente des Winkels ist, den die Tangente MT der Kurve mit der Abscissen-Axe macht, so folgt aus 8.), daß letzterer Winkel $= \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}v$ ist, daß also die Tangente MT auf der Sehne MD senkrecht steht, und namentlich in A und G, wo $v = 0$ oder $v = 2\pi$ ist, auf der Abscissen-Axe AX senkrecht steht, dagegen in der Mitte zwischen A und G, d. h. in F also in E, wo $v = \pi$ ist, mit der Abscissen-Axe parallel läuft. — Die Sehne MD ist also die Normale für den Punkt M.

Sucht man den Krümmungshalbmesser ϱ der Cykloide für irgend eine Stelle, so nimmt man aus §. 170. oder §. 171. d. I. Bd.)

9) $$\varrho = \frac{(1+\partial y_x{}^2)^{\frac{3}{2}}}{\partial^2 y_x}, \text{ oder } = \frac{(\partial x_v{}^2 + \partial y_v{}^2)^{\frac{3}{2}}}{\partial x_v \cdot \partial^2 y_v - \partial y_v \cdot \partial^2 x_v}$$

und bedient sich lieber des letztern Ausdrucks. Zu dem Ende muß man die Gleichungen 6.) und 7.) noch einmal nach allem v differenziiren, um zu erhalten

10) $\partial^2 x_v = r \cdot \sin v$ und 11) $\partial^2 y_v = r \cdot \cos v$.

Diese Werthe aus 6.), 7.), 10.) und 11.) in die 9.) substituirt, geben nun

12) $$\varrho = r. \frac{2^{\frac{3}{2}}(1-\cos v)^{\frac{3}{2}}}{1-\cos v} = 4r \cdot \sin \tfrac{1}{2}v = 2 \times \text{Sehne MD}.$$

Der Krümmungshalbmesser an M ist also jedesmal doppelt so groß als die Normale bis zur Abscissen-Axe.

Sucht man die Abgewickelte der Cykloide (nach I. Bd. §. 185.), so findet man, daß solche eine mit der gegebenen congruente Cykloide ist, welche nur gegen die Abscissen-Axe eine andere Lage hat.

Der Bogen $AM = s$ der Cykloide wird ausgedrückt durch

$$s = \int_{x+0} \sqrt{1+\partial y_x{}^2} \cdot dx = \int_{v+0} \sqrt{1+\partial y_x{}^2} \cdot \partial x_v \cdot dv$$

d. h.

$$s = \int_{v \div 0} \sqrt{\partial x_v^2 + \partial y_v^2} \cdot dv = 2r \int_{v \div 0} sin\, \tfrac{1}{2} v \cdot dv,$$

d. h.

13) $s = 4r(1 - cos\, \tfrac{1}{2} v)$.

Daher ist die Hälfte AME des ganzen Bogens AEG (weil dann $v = \pi$ und $cos\, \frac{1}{2}\pi = 0$ ist) dem 4fachen Radius, und der ganze Bogen AEG dem 4fachen Durchmesser des Erzeugungskreises gleich *).

Wollte man aber den Flächeninhalt AMNS der Cykloide berechnen, so müßte man den Flächeninhalt AMNR finden, und von dem Rechtecke ARNS subtrahiren. Ist nun $AR = NS = \beta$, so ist

Inhalt $AMNRA = \int_{\beta \div 0} x_y \cdot dy$

$$= -\int_{\beta \div 0} \sqrt{2ry - y^2} \cdot dy + r \cdot \int_{\beta \div 0} \frac{1}{cos}\, \frac{r - y}{r} \cdot dy.$$

Das erstere dieser beiden Integrale findet sich nach §. 13.) und §. 6.); das andere, indem man theilweise integrirt, d. h. die Formel §. 4. N. 3.) anwendet, und $\psi = 1$ nimmt, so daß

---

*) Ist für den Punkt M', $FP' = x'$, $P'M' = y'$, $EM' = s'$, $Em = u$ und der zugehörige Winkel $v = v'$, so ist (nach N. 13.)

$$s' = s - 4r = -4r \cdot cos\, \tfrac{1}{2} v'$$

und $u = 2r - y'$. Nun ist aber nach N. 2.)

$$cos\, v' = 1 - \frac{y'}{r},$$

also

$$cos\, \tfrac{1}{2} v'^2 = \frac{1 + cos\, v'}{2} = 1 - \frac{y'}{2r} = \frac{2r - y'}{2r} = \frac{u}{2r}.$$

Also ist auch

$$s'^2 = 16r^2 \cdot cos\, \tfrac{1}{2} v'^2 = 8ru$$

d. h. $s'^2 = 8r \cdot u$.

Diese Gleichung zwischen $Em = u$ und dem Bogen $EM' = s'$ hat die Form der Gleichung der Parabel und ist sehr bequem zur Berechnung eines jeden Bogenstückes.

$$\varphi = \frac{1}{cos}\,\frac{r-y}{r}, \quad \text{also} \quad \partial\varphi_y = \frac{1}{\sqrt{2ry-y^2}}$$

wird. Man erhält dann

$$\int \frac{1}{cos}\,\frac{r-y}{y}\cdot dy = y\cdot\frac{1}{cos}\,\frac{r-y}{y} - \int \frac{y}{\sqrt{2ry-y^2}}\cdot dy$$

und dieses Integral kann dann nach §. 12.) vollends gefunden werden.

Viertes Kapitel.

Kubatur der Körper und Quadratur ihrer Oberflächen.

§. 32.

Kubatur der Körper.

I. Ist eine krumme Fläche, also der durch sie begrenzte Körper mittelst einer Gleichung zwischen den auf drei rechtwinkliche Axen OX, OY, OZ bezogenen Koordinaten-Werthen x, y und z gegeben, welche durch

$$z = z_{x,y}$$

vorgestellt seyn mag, so giebt diese Gleichung zu gleicher Zeit den auf OX senkrechten, zu einem bestimmten Werth von x gehörigen Durchschnitt, wenn man in ihr statt x diesen bestimmten Werth gesetzt sich denkt und die Gleichung als eine Gleichung zwischen z und y ansieht, wo y parallel mit OY und z parallel mit OZ in der Ebene des Schnittes genommen gedacht werden. — Nun ist der Flächen-Inhalt dieses Schnittes, von $y = y''$ bis $y = y'$ genommen und so weit er auf der einen, positiven Seite der Ebene XOY liegt (nach §. 20.)

$$= \int_{y'+y''} z \cdot dy = f,$$

dagegen

$$= \int_{y'+y''} (z' - z'') \cdot dy = F,$$

wenn z' und z'' die Ordinaten-Werthe der Grenzen dieses Schnittes in der Richtung der z vorstellen (nach §. 27. N. III. ⊙.). Dabei können z' und z'' die beiden Werthe von z seyn, welche aus der gegebenen Gleichung $z = z_{x,y}$ hervorgehen; es kann

aber auch nur z' ein solcher Werth seyn, während z'' aus einer andern gegebenen Gleichung $z'' = z''_{x,y}$ bestimmt seyn kann, welche eine andere Fläche vorstellt, von welcher der Körper und folglich auch der Schnitt in der Richtung der z ebenfalls noch begrenzt ist. Sind y' und y'' noch gegebene Funktionen von x, etwa $y' = y'_x$ und $y'' = y''_x$, so stellen diese Gleichungen zwei Kurven in der Ebene XOY vor, welche jeden dieser, senkrecht auf OX gelegten Schnitte in der Ebene XOY brgrenzen; und da jeder Schnitt selbst durch eine, auf XOY senkrechte Ordinate begrenzt wird, so setzt diese Annahme voraus, daß der Körper außer den Flächen $z' = z'_{x,y}$ und $z'' = z''_{x,y}$, welche ihn in der Richtung der z begrenzen, noch zwei ihn in der Richtung der y, begrenzende allgemeine Cylinderflächen hat, welche auf der Ebene XOY senkrecht stehen, und von dieser Ebene in den durch die Gleichungen $y' = y'_x$ und $y'' = y''_x$ gegebenen Kurven geschnitten werden, so daß letztere gleichsam die Grund-Flächen dieser Cylinder bilden. Diese letzt erwähnten Kurven können auch die Durchschnitts-Linien der Fläche $z = z_{x,y}$ mit der Ebene XOY seyn, und man erhält dann die Werthe von y' und y'', wenn man in dieser Fläche $z = 0$ setzt, d. h. aus $0 = z_{x,y}$, wenn man diese Gleichung nach y auflöst und dann für y zu jedem gegeben gedachten x, zwei Werthe findet. — Diese Cylinder-Flächen werden Ebenen, die auf XOY senkrecht stehen, so oft die Funktionen y'_x und y''_x durch die Gleichungen $y' = ax + b$ und $y'' = px + q$ gegeben sind, welche gerade Linien vorstellen. — Und sind endlich y' und y'' von x ganz unabhängig, so ist der Körper in der Richtung der y durch zwei, mit XOZ parallele und von XOZ um y' und y'' entfernte Ebenen begrenzt.

Denkt man sich nun von $x = x''$ an bis zu $x = x'$ hin, die Länge $x' - x''$ der Axe OX in unendlich viele Theile getheilt und jeden durch dx bezeichnet, und durch die Endpunkte dieser Theile auf OX senkrechte ebene Schnitte gelegt, so zerlegt sich der Körper in unendlich viele, unendlich dünne Schei-

ben, deren jede als ein Cylinder angesehen werden kann, welcher f oder F zur Grundfläche und dx zur Höhe hat, so daß der körperliche Inhalt einer solchen Scheibe

$$= f \cdot dx, \qquad \text{oder} \qquad = F \cdot dx$$

ist, je nachdem f oder F der Inhalt der Grundfläche seyn soll. Der Inhalt des ganzen Körpers zwischen den durch $z' = z'_{x,y}$, $z'' = z''_{x,y}$, ferner zwischen den durch $y' = y'_x$ und $y'' = y''_x$ gegebenen und oben näher beschriebenen Grenzen, endlich zwischen den auf OX senkrechten, zu $x = x'$ und $x = x''$ gehörigen Ebenen liegenden Körpers, ist aber die Summe aller dieser unendlich vielen Scheiben, daher (nach §. 20.)

$$1) \qquad = \int_{x'\div x''} f \cdot dx = \int_{x'\div x''} \left(\int_{y'\div y''} z \cdot dy \right) \cdot dx,$$

wo unter z fortwährend positive Werthe von $z_{x,y}$ gedacht werden, oder

$$2) \qquad = \int_{x'\div x''} F \cdot dx = \int_{x'\div x''} \left(\int_{y'\div y''} (z' - z'') \cdot dy \right) \cdot dx,$$

wo jedenfalls $z' - z''$ immerfort positiv seyn muß.

II. Ist der Körper ein Umdrehungs-Körper, durch Umdrehung der, mittelst der Gleichung

$$y = y_x$$

gegebenen Kurve um ihre Abscissen-Axe OX erzeugt, so sind die auf OX senkrechten Querschnitte, Kreise oder Theile des Kreises; daher ist dann f oder F nach den Regeln der Euklidischen Geometrie ohne Integration zu berechnen. — Der Inhalt des ganzen Kreises ist z. B. $= \pi y_x^2$. — Daher ist der Inhalt eines solchen Umdrehungs-Körpers

$$3) \qquad = \pi \cdot \int_{x'\div x''} y_x^2 \cdot dx \text{ *).}$$

---

*) Genau genommen wird der Inhalt eines Körpers, sobald man rechtwinkliche Koordinaten-Axen gebraucht, dadurch gefunden, daß man ihn durch drei Reihen unendlich vieler unendlich nahe an einander liegender, mit YOZ, XOZ und XOY paralleler und bezüglich um dx, dy, dz von einander entfernter Ebenen in lauter unendlich-kleine rechtwinkliche Parallelepipeda zerlegt, deren jedes den körperlichen Inhalt

$$= dx \cdot dy \cdot dz$$

III. Gebraucht man jedoch Polar-Koordinaten φ, θ und r, wo der Winkel φ in der Ebene MOX von OX an gezählt ist, wo θ den Winkel bedeutet, welchen die Ebene MOX mit YOX macht, und wo $OM = r$ ist, für einen ganz beliebigen Punkt M im Innern des Körpers, — so muß man den Körper in andere unendlich-kleine Elementchen zerlegen, deren Inhalte sich berechnen und (durch) Integration nach §. 20.) summiren lassen.

Man denkt sich nämlich vom Pole O aus, von welchem an die r gezählt werden, die Richtung OM von $r = 0$ an, bis zu dem größten Werth von r hin, in unendlich viele unendlich-kleine Theile getheilt, deren jeder die Länge dr hat, und mit diesen verschiedenen Halbmessern aus O als Mittelpunkt, Kugeln beschrieben, welche den ganzen Körper in unendlich viele unendlich-dünne concentrische Kugelschichten zerlegen, die jedoch nicht gerade alle vollständig, sondern nach Maaßgabe der übrigen Grenzen des Körpers selbst noch begrenzt seyn werden. Hernach denkt man sich auch den Winkel θ von 0 an bis 2π hin (im Bogen für den Radius 1 ausgedrückt) in unendlich viele unendlich-kleine Theile $d\theta$ getheilt und eben so viele Ebenen durch OX gelegt. Diese Ebenen zerlegen den ganzen Körper in lauter keilförmige unendlich-dünne Scheiben, welche sich

---

hat. Addirt man nun alle diese Elementchen in der Richtung der z, von $z = z''$ an bis zu $z = z'$ hin, so erhält man den Inhalt der Latte von den Dimensionen dx, dy und $z' - z''$ (nach §. 20.)

$$= \int_{z''\div z'} (dx \cdot dy) \cdot dz = dx \cdot dy \cdot \int_{z''\div z'} 1 \cdot dz = dx \cdot dy \cdot (z' - z'').$$

Addirt man dann alle die zu einerlei x gehörigen Latten, so weit als man will, so bilden sie die Scheibe, die zwischen den beiden zu $x = x$ und $x = x + dx$ gehörigen, auf OX senkrechten Schnitten liegt, so weit als man sie will, und der Inhalt dieser Scheibe ist daher (nach §. 20.)

$$= \int_{y''\div y'} [dx \cdot (z' - z'')] \cdot dy = dx \cdot \int_{y''\div y'} (z' - z'') \cdot dy.$$

Und addirt man zuletzt alle diese Scheiben, so weit man sie addirt haben will, so erhält man den Inhalt des Körpers, so weit man ihn haben will (immer nach §. 20.)

$$= \int_{x''\div x'} \left(\int_{y''\div y'} (z' - z'') \cdot dy \right) \cdot dx,$$

wie wir oben gefunden haben.

rings herum in OX vereinigen. Endlich denkt man sich den Winkel φ, von 0 an bis π (ebenfalls im Bogen für den Radius 1 ausgedrückt) in lauter unendlich-kleine Theile $d\varphi$ getheilt, von O aus die unendlich vielen Schenkel der zugehörigen Winkel gezogen, dann aber die Ebene MOX mit allen diesen unendlich vielen von O auslaufenden Geraden um OX herum gedreht, so daß diese Geraden eben so viele Kegelflächen beschreiben, welche den Körper abermals in unendlich viele zwischen zwei Kegelmänteln liegende Stückchen zertheilen, die unendlich-kleine Dicke haben, welche von O aus anfängt, dann nach und nach immer größer wird, jedoch, selbst zuletzt noch, immer unendlich-klein bleibt. Diese drei Systeme von Flächen zertheilen nun den ganzen Körper in unendlich mal unendlich viele unendlich-kleine Körperchen, deren Inhalt wie der der abgekürzten vierseitigen Pyramiden berechnet werden kann, die man aber auch als Parallelepipeda ansehen und berechnen kann, in so fern nämlich beide Rechnungen, sobald man die Unendlich-Kleinen höherer Ordnungen wegläßt, zu einem und demselben Resultate führen. Berechnen wir nach der letztern Ansicht einen dieser Körper und zwar den bei M liegenden, so ist die eine der drei Dimensionen $= dr$, die andere $= r \cdot d\varphi$ (nämlich ein Kreisbogen in dem Kreise, dessen Radius $= r$ ist), die dritte endlich $r \cdot \sin\varphi \cdot d\theta$ (nämlich ein Kreisbogen, dessen Radius $= r \cdot \sin\varphi$ ist); daher ist der Inhalt dieses Körperchens

$$= r^2 \cdot \sin\varphi \cdot dr \cdot d\varphi \cdot d\theta.$$

Das Integral

$$\int_{r'\div r''} (r^2 \sin\varphi \cdot d\varphi \cdot d\theta) \cdot dr \quad \text{d. h.} \quad \tfrac{1}{3}(r'^3 - r''^3) \sin\varphi \cdot d\varphi \cdot d\theta$$

drückt nun die Summe aller dieser Körperchen aus, die neben einander liegen und alle dasselbe θ und dasselbe φ haben, von $r = r''$ an bis zu $r = r'$ hin; d. h. den Inhalt der durch die beiden Flächen $r' = r'_{\varphi,\theta}$ und $r'' = r''_{\varphi,\theta}$ abgekürzten und begrenzten vierseitigen Pyramide, deren Spitze in O seyn

würde, wenn sie vollständig, d. h. wenn $r'' = 0$ wäre *). — Dann drückt aber das Integral

$$\int_{\varphi' \div \varphi''} [\tfrac{1}{3}(r'^3 - r''^3) \cdot \sin\varphi \cdot d\theta] \cdot d\varphi$$

den Inhalt der durch alle diese abgekürzten Pyramiden, die zu demselben θ gehören, gebildeten keilförmigen Scheibe aus, welche in einer Richtung durch die beiden Flächen $r'_{\varphi,\theta}$ und $r''_{\varphi,\theta}$, in der zweiten Richtung aber durch die Werthe $\varphi = \varphi'$ und $\varphi = \varphi''$ begrenzt wird. — Zuletzt drückt das Integral

$$(\odot)\cdots \qquad \int_{\theta' \div \theta''} \left(\int_{\varphi' \div \varphi''} \tfrac{1}{3}(r'^3 - r''^3) \sin\varphi \cdot d\varphi \right) \cdot d\theta$$

den Inhalt des ganzen Körpers aus, wie er außer den eben angeführten Grenzen, auch noch von den durch $\theta = \theta'$ und $\theta = \theta''$ gegebenen Ebenen begrenzt wird. Dabei können φ' und φ'' auch noch Funktionen von θ oder auch, was gewöhnlicher der Fall ist, nach θ constant seyn.

Beispiel 1. Denkt man sich den durch Umdrehung einer Geraden $y = px$ um die Axe **OX** gebildeten senkrechten Kegel, so ist sein körperlicher Inhalt (nach II.)

$$= \pi \cdot \int_{x' \div x''} y^2 \cdot dx = \pi p^2 \int_{x' \div x''} x^2 \cdot dx = \tfrac{1}{3}\pi p^2 (x'^3 - x''^3).$$

Ist $x'' = 0$, also x' die Höhe des Kegels und px' der Radius der Grundfläche, so ist der Inhalt der Grundfläche $= \pi p^2 x'^2$; also der Inhalt des ganzen Kegels bis zur Spitze $= \pi p^2 x'^2 \times \tfrac{1}{3}x' = \tfrac{1}{3}\pi p^2 x'^3$; und dies Resultat der Euklidischen Geometrie stimmt ganz mit dem oben erhaltenen Resultat, sobald in selbigem $x'' = 0$ gesetzt wird.

Beispiel 2. Denkt man sich den Cylinder, welcher durch Umdrehung der Geraden $y = p$ um die Axe **OX** erzeugt wird, so ist sein Inhalt

---

*) Die Grundflächen der beiden Pyramiden, deren Differenz diese abgekürzte Pyramide ist, sind zwar unendlich-kleine Kugel-Vierecke, die man aber als Rechtecke ansehen und berechnen kann. Die Dimensionen des einen, größern dieser Rechtecke sind nun $r' \cdot d\varphi$ und $r' \cdot \sin\varphi \cdot d\theta$; dessen Inhalt ist also $= r'^2 \cdot \sin\varphi \cdot d\varphi \cdot d\theta$. Der Inhalt des andern Rechtecks ist aus demselben Grunde $= r''^2 \cdot \sin\varphi \cdot d\varphi \cdot d\theta$. Die Höhen dieser Pyramiden bis zur Spitze O derselben sind r' und r''; daher ist der körperliche Inhalt beider $= \tfrac{1}{3}r'^3 \cdot \sin\varphi \cdot d\varphi \cdot d\theta$ und $= \tfrac{1}{3}r''^3 \cdot \sin\varphi \cdot d\varphi \cdot d\theta$. — Daher ist der Inhalt ihrer Differenz $= \tfrac{1}{3}(r'^3 - r''^3) \cdot \sin\varphi \cdot d\varphi \cdot d\theta$; genau so wie oben.

$$= \pi \int_{x'\div x''} y^2 \cdot dx = \pi p^2 \int_{x'\div x''} 1 \cdot dx = \pi p^2 (x' - x'').$$

Dasselbe giebt auch die Euklidische Geometrie, wenn man bedenkt, daß $x' - x''$ die Höhe dieses Cylinders und πp^2 dessen Grundfläche ist.

Beispiel 3. Denkt man sich die durch die Gleichung

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$$

gegebene Ellipse um die Axe OX gedreht, so entsteht ein Umdrehungs-Ellipsoid, dessen körperlicher Inhalt (nach II.), wenn man $x'' = 0$ nimmt,

$$= \pi \int_{x'\div 0} \left(2\frac{b^2}{a}x - \frac{b^2}{a^2}x^2\right) \cdot dx = \pi \left(\frac{b^2}{a}x'^2 - \frac{b^2}{3a^2}x'^3\right)$$

ist. Setzt man noch $x' = 2a$, so ergiebt sich hieraus der Inhalt des ganzen Ellipsoids

$$= \tfrac{4}{3}ab^2\pi.$$

Und wird zuletzt noch $b = a$, so daß das Ellipsoid in eine Kugel übergeht, so erhält man deren Inhalt

$$= \tfrac{4}{3}a^3\pi,$$

während a der Radius der Kugel ist. — Dies letztere stimmt aber genau mit dem aus der Euklidischen Geometrie bekannten Resultate überein.

Beispiel 4. Suchen wir den Inhalt desselben Umdrehungs-Ellipsoids, geben wir aber die Mittelpunkts-Gleichung der Umdrehungs-Ellipse, nämlich

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2),$$

so liegt O im Mittel-Punkte. Will man nun den Inhalt des ganzen Ellipsoids haben, so muß $x' = a$ und $x'' = -a$ genommen werden. Man erhält dann

$$\int y^2 \cdot dx = \frac{b^2}{a^2}\int (a^2 - x^2)\, dx = \frac{b^2}{a^2}(a^2x - \tfrac{1}{3}x^3);$$

folglich ist der Inhalt des halben Ellipsoids $= \frac{2}{3}ab^2\pi$; also der Inhalt des ganzen $= \frac{4}{3}ab^2\pi$; genau so wie vorher.

Beispiel 5. Es soll der Inhalt des durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

gegebenen Ellipsoids gefunden werden. — Solches ist, so lange nicht zwei der drei Halbmesser a, b, c einander gleich werden, kein Umdrehungs-Ellipsoid, und man muß daher nun den Inhalt nach der Formel I. 2.) berechnen.

Es ist aber hier

$$z = c \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}},$$

also

$$z' = +c \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \quad \text{und} \quad z'' = -c \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}},$$

und $$\int(z' - z'')\cdot dy = 2c\cdot\int\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\cdot dy$$

(nach §. 13. und §. 6.)

$$= cy\cdot\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}} - bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\cdot\frac{1}{cos}\left(1-\frac{ay}{b\sqrt{a^2-x^2}}\right).$$

Will man nun den Inhalt F des ganzen Querschnitts haben, wie er durch die ellipsoidische Oberfläche begrenzt wird, so sind y' und y'' die beiden Werthe von y, welche aus der Gleichung des Ellipsoids für $z = 0$ hervorgehen; d. h. es ist

$$y' = +\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} \quad \text{und} \quad y'' = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}.$$

Dadurch wird aber, — weil $\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$ an diesen beiden Grenzen der Null gleich wird, und $\frac{1}{cos}$ an denselben beiden Grenzen in $\frac{1}{cos}0$ übergeht, welcher einmal $= -\frac{1}{2}\pi$ und das andere Mal $= +\frac{1}{2}\pi$ genommen werden muß *), — der Inhalt F des Querschnittes

$$= bc\pi\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right) **).$$

---

*) Der Querschnitt besteht aus zwei congruenten halben Ellipsen. Nimmt man erst $y' = +\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ und $y'' = 0$, so bekommt man die eine Hälfte, und diese doppelt genommen, giebt den ganzen Querschnitt. Dies führt wiederum zu obigem Resultate.

**) Die Gleichung dieses Querschnitts zwischen y und z ist

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = \frac{a^2-x^2}{a^2}$$

oder

$$\frac{a^2y^2}{b^2(a^2-x^2)}+\frac{a^2z^2}{c^2(a^2-x^2)} = 1.$$

Vergleicht man dies mit der Gleichung der Ellipse

$$\frac{y^2}{b'^2}+\frac{z^2}{c'^2} = 1,$$

deren Inhalt $= b'c'\pi$ ist, so hat man

$$b' = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

und

$$c' = \frac{c}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

und dies giebt denselben Inhalt wie oben.

Deshalb ist nun der Inhalt des ganzen Ellipsoids, weil $x' = +a$ und $x'' = -a$ genommen werden muß,

$$= bc\pi \int_{x'+x''} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \cdot dx = \tfrac{4}{3} abc\pi.$$

Ist $a = b = c$, so geht das Ellipsoid in eine Kugel, und der Inhalt wiederum in $\frac{4}{3}a^3\pi$ über.

§. 33.

Quadratur der krummen Oberflächen.

I. Ist eine krumme Oberfläche gegeben durch die auf rechtwinkliche Koordinaten-Axen OX, OY, OZ bezogene Gleichung

$$z = z_{x,y},$$

so kann man unendlich viele Ebenen legen senkrecht auf OX und unendlich viele senkrecht auf OY, so daß erstere um dx, letztere um dy von einander abstehen. Dadurch zerlegt sich die Oberfläche in lauter unendlich-kleine, mithin als eben anzusehende vierseitige Figuren, deren Projektion auf XOY ein Rechteck ist, welches den Inhalt $dx \cdot dy$ hat.

Betrachtet man nun eines dieser Vierecke E, an der durch x, y gegebenen Stelle, so macht solches mit der Ebene XOY einen Winkel, den auch die Normale an dieser Stelle mit der OZ macht und dessen Kosinus daher (nach I. Bd. §. 176.)

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + \partial z_x^2 + \partial z_y^2}}$$

ist. Ferner hat man die Projektion $dx \cdot dy$, so oft man E mit diesem Kosinus multiplicirt. Folglich ist

$$E = \sqrt{1 + \partial z_x^2 + \partial z_y^2} \cdot dx \cdot dy.$$

Dann ist aber (nach §. 20.)

$$(\odot) \cdots \qquad \int_{y'+y''} \left(dx \cdot \sqrt{1 + \partial z_x^2 + \partial z_y^2}\right) \cdot dy$$

oder

$$dx \cdot \int_{y'+y''} \sqrt{1 + \partial z_x^2 + \partial z_y^2} \cdot dy$$

der Inhalt des Streifens, welcher die Oberfläche der Scheibe bildet, die durch die beiden zu $x = x$ und $x = x + dx$ gehö-

gehörigen, auf OX senkrechten Querschnitte gebildet wird; denn dieser Inhalt ist die Summe aller der unendlich vielen Vierecke E, welche zu demselben x gehören.

Integrirt man nun noch einmal und dasmal nach x, so daß man

$$(\mathfrak{C})\cdots \qquad \int_{x'\div x''}\left(\int_{y'\div y''}\sqrt{1+\partial z_x{}^2+\partial z_y{}^2}\cdot dy\right)\cdot dx$$

erhält, so hat man (nach §. 20.) die Summe aller dieser Streifen von $x = x''$ an bis zu $x = x'$ hin, d. h. den Inhalt der ganzen Oberfläche des Körpers, zwischen den bestimmten Grenzen.

II. Ist die gegebene Fläche eine Umdrehungs-Fläche, welche durch Umdrehung der durch

$$y = y_x$$

gegebenen Kurve, um OX herum, entsteht, so findet sich der erstere Streifen auch ohne Integration, weil er als ein von der Umdrehung der Tangente an die Umdrehungs-Kurve gebildeter abgekürzter Kegelmantel berechnet werden kann, dessen Seite $= \sqrt{dx^2+dy^2} = \sqrt{1+\partial y_x{}^2}\cdot dx$ ist, so daß der Inhalt $= 2\pi y\cdot\sqrt{1+\partial y_x{}^2}\cdot dx$ wird, weil die Unendlich-Kleinen höherer Ordnung weggelassen werden müssen. Darum ist nun der Inhalt der ganzen Umdrehungs-Oberfläche zwischen den beiden zu $x = x'$ und $x = x''$ gehörigen, auf OX senkrechten Ebenen

$$(\sigma)\cdots \qquad = 2\pi\int_{x'\div x''} y\cdot\sqrt{1+\partial y_x{}^2}\cdot dx.$$

Beispiel. Der Mantel des Kegels, der durch Umdrehung der Geraden

$$y = px$$

entsteht, ist also, weil $\partial y_x = p$ wird,

$$= 2\pi\int_{x'\div x''} p\sqrt{1+p^2}\cdot x\cdot dx$$

$$= \pi x'^2 p\sqrt{1+p^2} - \pi x''^2 p\sqrt{1+p^2}.$$

Für $x'' = 0$ wird also der ganze Kegel-Mantel von dessen Spitze O an bis zur Grundfläche, deren Radius px' ist (so daß x' die Höhe und $\sqrt{x'^2+p^2x'^2}$ d. h. $x'\cdot\sqrt{1+p^2}$ die Seite dieses Kegels ist), $= \pi x'^2 p\sqrt{1+p^2}$, und dasselbe Resultat giebt auch die Euklidische Geometrie.

Anmerkung. Wir enthalten uns weiterer Beispiele, die hier nicht nöthig erscheinen; und wir enthalten uns auch der Formeln, durch welche die Oberfläche in Polar-Koordinaten ausgedrückt wird. Wer recht ausführliche Untersuchungen hierüber kennen lernen will, findet sie im 2ten Theile des „Lehrbuchs der Mechanik." Berlin 1837 bei Enslin. Kap. VI.

VII.

Höhere Analyſis.

Dritte Abtheilung.

Fortſetzung der Integral-Rechnung nebſt Anwendungen.

Fünftes Kapitel.

Von der Integration der Differential-Funktionen und der totalen Differential-Gleichungen, vorzüglich mit zwei Veränderlichen.

§. 34.

Enthält ein Ausdruck f nicht bloß x und y, sondern auch noch einen oder mehrere der Differential-Koefficienten ∂y_x, $\partial^2 y_x$, $\partial^3 y_x$, etc. etc., so heißt er, wenn y als eine völlig willkührliche Funktion von x gedacht wird, eine Differential-Funktion. Sobald man sich aber unter y gerade diejenige Funktion von x denkt, welche, wenn zu gleicher Zeit statt ∂y_x, $\partial^2 y_x$, $\partial^3 y_x$, etc. etc. die zugehörigen Funktionen von x gesetzt werden, den Ausdruck f zu Null macht, — so daß man, um dieses auszudrücken, $f = 0$ schreiben kann, — so hat man eine Differential-Gleichung. — Beide, Differential-Funktion und Differential-Gleichung, werden nach dem höchsten der Differential-Koefficienten, die sie enthalten, in Ordnungen klassificirt. — Dieselben können übrigens nur eine unbekannte oder unbestimmte Funktion y_x nebst ihren Ableitungen ∂y_x, $\partial^2 y_x$, etc. etc., oder mehrere solche Unbekannte oder Unbestimmte y_x, z_x, v_x, etc. etc. nebst deren Ableitungen ∂z_x, ∂v_x, etc. etc., $\partial^2 z_x$, etc. etc. etc. enthalten, und dann können sie noch nach z von einer andern Ordnung seyn als nach y, u. s. w. f. — In beiden Fällen werden sie totale Differential-Funktionen, und totale Differential-Gleichungen genannt.

Kommt aber in einem Ausdrucke, oder in einer Gleichung eine Funktion z zweier oder mehrerer Veränderlichen x, y, etc. vor, nebst ihren Ableitungen ∂z_x, ∂z_y, etc. $\partial^2 z_x$, $\partial^{1,1} z_{x,y}$, $\partial^2 z_y$,

etc. etc. nach jedem dieser letztern Veränderlichen, so hat man Partial-Differential-Funktionen und Partial-Differential-Gleichungen.

Zunächst soll (in diesem Kapitel) nur von den totalen Differential-Funktionen und den totalen Differential-Gleichungen die Rede seyn. Jede Funktion, welche gar keine angezeigten Differential-Koefficienten enthält, also was wir bisher schlechtweg eine Funktion nannten, kann von nun an im Gegensatz der Differential-Funktionen eine Ur-Funktion genannt werden.

§. 35.

Eine totale Differential-Funktion, wie etwa

$$\frac{1}{y}\cdot\partial^2 y_x - \frac{1}{y^2}\cdot\partial y_x{}^2 + x\cdot\partial y_x + ay + b^x \quad \text{oder} \quad \varphi$$

heißt integrirt, sobald man eine (Differential- oder Ur-) Funktion f der nächst niedrigern Ordnung gefunden hat, welche, wenn man sie nach allem x differenziirt, genau die gegebene Funktion φ wieder hervorbringt, ohne daß für y eine bestimmte Funktion von x gesetzt wird, also während y eine völlig unbestimmte Funktion von x vorstellt.

Es muß also für unser Beispiel, wenn ∂y_x durch y' bezeichnet wird, das Integral f so seyn, daß

$$1)\quad \partial(f_{x,y,y'})_{(x)} = \frac{1}{y}\cdot\partial^2 y_x - \frac{1}{y^2}\cdot\partial y_x{}^2 + x\cdot\partial y_x + ay + b^x.$$

d. h., weil (nach I. Bd. §. 154bis.)

$$\partial f_{(x)} = \partial f_x + \partial f_y\cdot\partial y_x + \partial f_{y'}\cdot\partial y'_x \quad \text{und} \quad \partial y'_x = \partial^2 y_x$$

ist, daß

$$2)\quad \partial f_x + \partial f_y\cdot\partial y_x + \partial f_{y'}\cdot\partial^2 y_x = \frac{1}{y}\cdot\partial^2 y_x - \frac{1}{y^2}\cdot\partial y_x{}^2 + x\cdot\partial y_x + ay + b^x$$

werde, für jede Funktion von x, welche unter y_x gedacht werden mag.

Soll aber in der Gleichung 2.) alles links genau so stehen, wie rechts, während y, also auch ∂y_x, $\partial^2 y_x$ völlig unbestimmt und willkührlich gedacht werden, so müssen die Koefficienten von $\partial^2 y_x$ links und rechts einander gleich seyn; d. h. es muß seyn

$$3)\quad \partial f_{y'} = \frac{1}{y},$$

also auch (nach §. 1.)

4) $$f = \int \frac{1}{y} \cdot dy'$$

oder (nach §. 3. I.) $$= \frac{y'}{y} + C = \frac{\partial y_x}{y} + C,$$

wo C nach y' constant, d. h. ohne y' seyn muß, aber noch die, von y' unabhängig gedachten x und y enthalten kann *).

Um nun dieses $C_{x,y}$ noch zu bestimmen, hat man zu beachten, daß der Gleichung 1.) oder 2.) genügt werden muß, daß also noch (wenn die mit $\partial^2 y_x$ multiplicirte 3.) von der 2.) subtrahirt wird)

5) $$\partial f_x + \partial f_y \cdot \partial y_x = -\frac{1}{y^2} \cdot \partial y_x^2 + x \cdot \partial y_x + ay + b^x$$

werden muß. Nun giebt aber die Gleichung 4.)

6) $$\partial f_x = \partial C_x \quad \text{und} \quad \partial f_y = -\frac{\partial y_x}{y^2} + \partial C_y.$$

Substituirt man daher diese Werthe in die Gleichung 5.), so erhält man

7) $$\partial C_x + \partial C_y \cdot \partial y_x = x \cdot \partial y_x + ay + b^x.$$

Aus dieser Gleichung muß nun C oder $C_{x,y}$ gefunden werden.

Wendet man aber auf diese Gleichung zur Bestimmung von C, dieselben Schlüsse an, die man auf die Gleichung 2.) zur Bestimmung von f angewandt hat, so hat man wieder

8) $$\partial C_y = x, \quad \text{also} \quad C = \int x \cdot dy = xy + C',$$

wo C' nach y constant seyn muß, also nur noch x enthalten darf. Substituirt man diesen Werth statt C in die 7.) und bemerkt man, daß $\partial C_x = y + \partial C'_x$ wird, so ergiebt sich

9) $$\partial C'_x = (a-1)y + b^x,$$

und diese Gleichung dient nun noch zur Bestimmung von C'. — Weil aber C' kein y enthalten darf, so kann auch $\partial C'_x$ kein y enthalten; folglich enthält die Gleichung 9.) einen Widerspruch, so lange nicht $a - 1 = 0$, d. h. $a = 1$ ist. Dieser Widerspruch zeigt an, daß dasmal die gegebene Funktion kein Integral in dem Sinne hat, in welchem es hier gesucht wurde, nämlich während y jede unbestimmte Funktion von x vorstellen soll **).

---

*) Die Formel

$$\partial f_{(x)} = \partial f_x + \partial f_y \cdot \partial y_x + \partial f_{y'} \cdot \partial y'_x$$

ist im I. Bd. §. 154bis.) erwiesen, und aus jenem Beweise geht hervor, daß in den Ausdrücken ∂f_x, ∂f_y, $\partial f_{y'}$ die Veränderlichen x, y, y' als von einander ganz unabhängig angesehen werden sollen, und daß in diesem Sinne die Ableitungen zu nehmen sind, damit die Formel selbst richtig sey.

**) Setzt man nämlich statt y irgend eine bestimmte und bekannte Funktion von x, und statt ∂y_x, $\partial^2 y_x$ ihre entsprechenden Werthe, so wird φ

Sollte aber $a = 1$ vorausgesetzt werden, so würde die Gleichung 9.) jetzt bloß

$$\partial C'_x = b^x$$

und sogleich

$$C' = \frac{b^x}{log\, b} + c$$

geben, während c nach y', nach y und auch noch nach x constant, übrigens beliebig gedacht werden muß.

Aus diesen Betrachtungen geht folgendes hervor:

1) Die Aufgabe: „eine gegebene Differential-Funktion zu integriren" ist nicht immer möglich, und in dem vorliegenden Beispiele nur möglich, wenn $a = 1$ seyn sollte.

2) Ist aber die Aufgabe selbst möglich, so erfordert ihre Lösung, wie dieses Beispiel zeigt, bloß wiederholte Integrationen entwickelt gegebener Funktionen, z. B. nach y', nach y, und nach x, letztere als eben so viele von einander ganz unabhängige Veränderliche angesehen, so daß, wenn die Integration nach einem derselben (mittelst der Lehren des ersten Kapitels) erfolgt, die übrigen als eben so viele Constanten angesehen werden müssen.

Namentlich hat sich hiernach gefunden das Integral von

$$\frac{y \cdot \partial^2 y_x - \partial y_x{}^2 + xy^2 \cdot \partial y_x + y^3 + b^x}{y^2} \quad \text{nach x,}$$

$$= \frac{\partial y_x}{y} + xy + \frac{b^x}{log\, b} + c;$$

d. h. diese letztere Funktion giebt, wenn man sie nach allem x differenziirt, zum Differential-Koefficienten genau die gegebene Differential-Funktion wieder, während unter y eine ganz unbestimmte Funktion von x gedacht wird.

Ist aber die Aufgabe möglich, so sagt man, „die gegebene Differential-Funktion sey integrabel"; im entgegengesetzten Falle wird sie „nicht integrabel" genannt.

---

eine bloße explicite Funktion von x, die allemal ein Integral hat, wenn solches auch nicht immer in endlicher Form existiren sollte.

§. 36.

Ist die zu integrirende Differential-Funktion selber noch zwar der Form nach bestimmt, aber im Uebrigen unbestimmt, so kann man zuletzt (wie in dem vorigen Beispiel die besondere Gleichung $a = 1$) allgemeine Gleichungen bekommen, welche erfüllt seyn müssen, wenn die Funktion integrabel seyn soll. Diese Gleichungen führen dann den Namen: „Bedingungs-Gleichungen der Integrabilität". — Sind diese Gleichungen erfüllt, so ist das Integral in dem Sinne des §. 35.) möglich, d. h. die Funktion ist integrabel; — außerdem nicht.

Versucht man es und integrirt man die Differential-Funktion

I. $$M_{x,y} + N_{x,y} \cdot \partial y_x$$

auf dem im §. 35.) vorgezeichneten Wege, so erhält man als Bedingungs-Gleichung der Integrabilität, die Gleichung

(♂) ... $$\partial M_y = \partial N_x.$$

Ist nämlich $f_{x,y}$ das gesuchte Integral, so hat man

$$\partial f_x + \partial f_y \cdot \partial y_x = M + N \cdot \partial y_x,$$

also auch

1) $\partial f_x = M$ und 2) $\partial f_y = N.$

Aus $\partial f_y = N$ folgt nun $f = \int N \cdot dy + C_x$; oder, wenn

3) $$\int N \cdot dy = v$$

gesetzt wird, so daß v irgend ein besonderes Integral von N nach y vorstellt,

4) $$f = v_{x,y} + C_x.$$

Substituirt man nun dies in die Gleichung 1.), so erhält man

$$\partial v_x + \partial C_x = M, \quad \text{oder} \quad \partial C_x = M - \partial v_x,$$

woraus

5) $$C_x = \int (M - \partial v_x) \cdot dx + e$$

sich ergiebt, wenn nur in $M - \partial v_x$ kein y mehr vorkommt, weil sonst die Gleichung 5.) einen Widerspruch enthalten und dann anzeigen würde, daß $M + N \cdot \partial y_x$ dasmal nicht integrabel

sey. Es muß daher $M - \partial v_x$ nach y differenziirt, Null geben; d. h. es muß

$$\partial M_y - \partial^{1,1} v_{x,y} \quad \text{oder} \quad \partial M_y - \partial(\partial v_y)_x$$

der Null gleich seyn, und dies ist die Bedingungs-Gleichung ♂.) in so fern (nach 3.) $\partial v_y = N$ ist.

Ist also die Gleichung ♂.) erfüllt, so geben die 4.) und die 5.) das Integral f vollständig, und solches nimmt (wegen 5.) noch eine Constante c in sich auf.

So ist z. B. $y + x \cdot \partial y_x$ integrabel, weil hier $M = y$, $N = x$; also $\partial M_y = 1 = \partial N_x$ ist. Und das Integral von $y + x \cdot \partial y_x$ findet sich $= xy + c$. — Dagegen ist $y - x \cdot \partial y_x$ nicht integrabel. — Aber der Quotient $\frac{y - x \cdot \partial y_x}{y^2}$ ist wieder integrabel, weil jetzt $M = \frac{1}{y}$, $N = -\frac{x}{y^2}$, also wiederum $\partial M_y = -\frac{1}{y^2} = \partial N_x$ ist. Das Integral selbst ist $= \frac{x}{y} + c$*).

Will man aber integriren die Differenzial-Funktion

II.) $$M_{x,y,z} + N_{x,y,z} \cdot \partial y_x + P_{x,y,z} \cdot \partial z_x,$$

so finden sich, wenn man genau nach §. 20. verfährt, die drei Bedingungs-Gleichungen der Integrabilität, nämlich

1) $\partial M_z = \partial P_x$; 2) $\partial M_y = \partial N_x$; 3) $\partial N_z = \partial P_y$.

Ist nämlich $f_{x,y,z}$ das gesuchte Integral von $M + N \cdot \partial y_x + P \cdot \partial z_x$, so hat man

1') $\partial f_x + \partial f_y \cdot \partial y_x + \partial f_z \cdot \partial z_x = M + N \cdot \partial y_x + P \cdot \partial z_x$;

folglich muß

2') $\partial f_z = P$; $\partial f_y = N$ und $\partial f_x = M$

---

*) Daß übrigens $\partial M_y = \partial N_x$ seyn müsse, so oft ein Integral f existirt, folgt unmittelbar aus den Gleichungen 1.) und 2.), weil die eine

$$\partial^{1,1} f_{x,y} = \partial M_y,$$

die andere dagegen dasselbe

$$\partial^{1,1} f_{x,y} = \partial N_x$$

liefert. — Diese Betrachtung überzeugt aber nicht, daß umgekehrt, wenn $\partial M_y = \partial N_x$ erfüllt ist, dann allemal wirklich ein Integral f, in dem Sinne, wie es gesucht wird, existiren müsse.

seyn. Die erstere dieser drei Gleichungen giebt

$$3') \qquad f = \int P \cdot dz + C_{x,y};$$

und substituirt man diesen Werth in die beiden andern Gleichungen, so erhält man

$$4') \qquad \partial C_y = N - \partial(\int P \cdot dz)_y;$$

$$5') \qquad \partial C_x = M - \partial(\int P \cdot dz)_x.$$

Da nun diese beiden Ausdrücke zur Rechten kein z enthalten dürfen, so muß, wenn man sie nach z differenziirt, jeder der beiden Differenzial-Koefficienten der Null gleich werden. Dies giebt aber

$$\partial N_z - \partial P_y = 0 \qquad \text{und} \qquad \partial M_z - \partial P_x = 0;$$

und dies sind die obigen beiden Bedingungs-Gleichungen 3.) und 1.). — Sind sie erfüllt, so findet man aus 4'.) sogleich

$$6') \qquad C = \int [N - \partial(\int P \cdot dz)_y] \cdot dy + C',$$

wo C' kein y mehr enthalten darf, also höchstens noch x enthält. Substituirt man nun diesen Werth von C noch in die Gleichung 5'.), so ergiebt sich zuletzt

$$7') \qquad \partial C'_x = M - \partial(\int P \cdot dz)_x - \partial(\int [N - \partial(\int P \cdot dz)_y] \cdot dy)_x,$$

wo alle angezeigten Integrale beliebige besondere Integrale vorstellen, dasselbe Zeichen aber allemal ein und dasselbe.

Dieser Ausdruck zur Rechten darf nun kein y mehr haben; also muß, wenn er nach y differenziirt wird, sein Differential der Null gleich werden; und dies giebt noch die Bedingungs-Gleichung 2.). — Ist sie erfüllt, so liefert die 7'.) sogleich noch C'_x dazu, so daß man nun f vollständig gefunden hat.

So ist z. B.

$$\frac{y}{z} + \frac{x}{z} \cdot \partial y_x - \frac{xy}{z^2} \cdot \partial z_x$$

integrabel und giebt, integrirt, $\frac{xy}{z} + c$; eben weil hier $M = \frac{y}{z}$, $N = \frac{x}{z}$, $P = -\frac{xy}{z^2}$, also $\partial M_z = -\frac{y}{z^2} = \partial P_x$, $\partial N_z = -\frac{x}{z^2} = \partial P_y$ und noch $\partial M_y = \frac{1}{z} = \partial N_x$ ist. — Wäre aber eine dieser drei Bedin-

gungs-Gleichungen nicht erfüllt, so wäre auch die Funktion nicht integrabel. — So ist z. B.

$$\frac{y}{z}+\frac{x}{z}\cdot\partial y_x+\frac{xy}{z^2}\cdot\partial z_x$$

nicht integrabel.

Beispiel 1. Es sey $\frac{y-x\cdot\partial y_x}{x^2+y^2}$ zu integriren. — Vergleicht man diesen Fall mit $M+N\cdot\partial y_x$, so hat man $M=\frac{y}{x^2+y^2}$, $N=-\frac{x}{x^2+y^2}$; also $\partial M_y=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}=\partial N_x$; folglich ist diese Funktion integrabel. — Bezeichnet man nun ihr Integral durch $f_{x,y}$, so hat man

1) $\partial f_x=\frac{y}{x^2+y^2}$ und 2) $\partial f_y=-\frac{x}{x^2+y^2}$.

Aus der zweiten Gleichung folgt dann

3) $$f=-\int\frac{x}{x^2+y^2}\cdot dy=-\frac{1}{tg}\frac{y}{x}+C_x.$$

Subtituirt man aber diesen Werth statt f in die 1.), so erhält man

4) $\partial C_x=0$, also $C=const.=c$,

so daß man

5) $$f=c-\frac{1}{tg}\frac{y}{x}$$

als das gesuchte Integral gefunden hat, wofür man auch, da $\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{tg}\frac{y}{x}=\frac{1}{cotg}\frac{y}{x}=\frac{1}{tg}\frac{x}{y}$ ist,

6) $$f=\frac{1}{tg}\frac{x}{y}+const.$$

schreiben kann.

Beispiel 2. Soll die Funktion

$$\frac{1}{x}+\frac{y^2}{x^3}-\frac{y\cdot\partial y_x}{x^2}+\frac{(y-x\cdot\partial y_x)\sqrt{x^2+y^2}}{x^3}+\frac{\partial y_x}{2y}$$

integrirt werden, so vergleiche man solche mit $M+N\cdot\partial y_x$, und man findet

$$M=\frac{x^2+y^2+y\sqrt{x^2+y^2}}{x^3}\quad\text{und}\quad N=\frac{-y-\sqrt{x^2+y^2}}{x^2}+\frac{1}{2y};$$

auch zeigt sich wirklich $\partial M_y=\partial N_x$; folglich ist diese Differential-Funktion integrabel. — Integrirt man aber, und ist $f_{x,y}$ das gesuchte Integral, so hat man

1) $\partial f_x=M=\frac{x^2+y^2+y\sqrt{x^2+y^2}}{x^3}=\frac{1}{x}+\frac{y^2}{x^3}+y\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^3}$;

2) $\partial f_y=N=\frac{-y-\sqrt{x^2+y^2}}{x^2}+\frac{1}{2y}$.

Aus der Gleichung 1.) findet man nun sogleich

3) $$f = \int M \cdot dx$$

$$= log\, x - \frac{y^2}{2x^2} - \frac{y\sqrt{x^2+y^2}}{2x^2} + \tfrac{1}{2} log \frac{-y+\sqrt{x^2+y^2}}{x} + C_y;$$

und subſtituirt man dieſen Werth ſtatt f in die Gleichung 2.), ſo giebt ſolche

4) $$\partial C_y = \frac{1}{2y}, \quad \text{alſo} \quad C_y = \tfrac{1}{2} log\, y + const.$$

Mithin iſt das geſuchte Integral f das nachſtehende:

5) $$log\, x - \frac{y^2}{2x^2} - \frac{y\sqrt{x^2+y^2}}{2x^2} + \tfrac{1}{2} log \frac{-y+\sqrt{x^2+y^2}}{x} + \tfrac{1}{2} log\, y,$$

oder, wenn man alle drei Logarithmen vereinigt,

$$f = -y \cdot \frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{2x^2} + \tfrac{1}{2} log\, xy(-y+\sqrt{x^2+y^2}) + const.$$

§. 37.

Eine totale Differential-Gleichung $\varphi_{x,y,\partial y_x \text{ etc. etc.}} = 0$ heißt integrirt, ſobald man eine Gleichung $f = 0$ mit einer neuen unbeſtimmten Conſtante c gefunden hat, ſo, daß wenn man aus $f = 0$ und $\partial f_{(x)} = 0$, dieſe Conſtante c eliminirt, die entſtehende Differential-Gleichung mit der gegebenen $\varphi = 0$ zuſammenfällt. — Die Gleichung $f = 0$ mit der willkührlichen Conſtante c, heißt das allgemeine Integral von $\varphi = 0$.

1) So findet ſich z. B. von der Gleichung

$$3xy^2 - y^2 + (xy - 2x^3) \cdot \partial y_x = 0,$$

das allgemeine Integral

$$x^3 - xy + cy^2 = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{x^3 - xy}{y^2} + c = 0.$$

2) So findet ſich von der Gleichung

$$x + y \cdot \partial y_x + z \cdot \partial z_x = 0,$$

das allgemeine Integral

$$x^2 + y^2 + z^2 = c.$$

3) So iſt aber auch von der Gleichung

$$3x^2 - y - x \cdot \partial y_x + \frac{xy - x^3}{\partial y_x} \cdot \partial^2 y_x = 0,$$

das allgemeine Integral

$$x^3 - xy - c \cdot \partial y_x = 0.$$

§. 38.

I. Es ist dabei in die Augen fallend, daß jede Funktion von x, welche statt y gesetzt, dem Integral $f = 0$ genügt, nothwendig auch der Differential-Gleichung $\varphi = 0$ genügen müsse. Integrirt man daher jedes Integral, wenn solches noch eine Differential-Gleichung ist, auf's Neue so lange, bis man zuletzt eine Ur-Gleichung hat (d. h. eine Gleichung ohne Differential-Koefficienten), so hat man die Gleichung, welche auf algebraischem Wege alle Funktionen von x liefert, die der gegebenen Differential-Gleichung genügen. Diese Gleichung wird das allgemeine Ur-Integral der gegebenen Differential-Gleichung genannt.

So ist z. B. von der Differential-Gleichung der 2ten Ordnung

1) $$y \cdot \partial^2 y_x - \partial y_x^2 - x \cdot \partial y_x + y = 0,$$

das allgemeine erste Integral so:

2) $$c(\partial y_x + x) - y = 0;$$

und von dieser letztern Gleichung ist wieder das allgemeine erste Integral wie folgt, nämlich:

3) $$y = cx + c^2 + b \cdot e^{\frac{x}{c}};$$

folglich ist letzteres das allgemeine zweite Integral der gegebenen Differential-Gleichung der zweiten Ordnung. Dieselbe ist aber zu gleicher Zeit auch eine Ur-Gleichung, welche zwei willkührliche Constanten c und b in sich aufgenommen hat, und nun alle Funktionen von x vorstellt, welche der gegebenen Differential-Gleichung der zweiten Ordnung genügen, wenn solche statt y, und ihre Ableitungen statt ∂y_x, $\partial^2 y_x$ gesetzt werden. So hat man also nun das allgemeine Ur-Integral der obigen Differential-Gleichung der zweiten Ordnung.

Differenziirt man die Gleichung 3.) zweimal hinter einander, so erhält man

4) $$\partial y_x = c + \frac{b}{c} \cdot e^{\frac{x}{c}} \quad \text{und} \quad 5)\ \partial^2 y_x = \frac{b}{c^2} e^{\frac{x}{c}}.$$

Eliminirt man nun aus 3.), 4.) und 5.) die beiden Constanten c und b, so wird man wieder zur Differential-Gleichung der 2ten Ordnung (in 1.) geführt. — Eliminirt man aber aus den Gleichungen 2.) und 4.) oder aus den Gleichungen 3.) und 4.) die Constante c, so erhält man in beiden Fällen eine und dieselbe Differential-Gleichung der ersten Ordnung, welche bloß die andere Constante b allein enthält, nämlich die folgende:

$$6) \qquad \partial y_x = \frac{y}{x + \partial y_x} + \frac{b(x+\partial y_x)}{y} \cdot e^{\frac{x}{y}(x+\partial y_x)},$$

und diese Gleichung ist ebenfalls ein erstes Integral der gegebenen Gleichung 1.).

II. Eine Differential-Gleichung der 2ten Ordnung zwischen zwei Veränderlichen x und y, hat also ein Ur-Integral mit zwei willkührlichen Constanten, und zwei erste Integral-Gleichungen, jede mit einer andern der willkührlichen Constanten. — Und ist $f_{x,y,a,b} = 0$ das Ur-Integral, so erhält man die beiden ersten Integral-Gleichungen (der gegebenen Gleichung der zweiten Ordnung), wenn man aus $f = 0$ und $\partial f_{(x)} = 0$, einmal die Constante b, und ein anderes Mal die Constante a eliminirt. — Und hat man die beiden ersten Integrale einer gegebenen Differential-Gleichung der 2ten Ordnung, so darf man nur aus ihnen die Ableitung ∂y_x eliminiren, und man erhält wieder eine Ur-Gleichung (zwischen x, y und den beiden Constanten) und diese ist wieder das Ur-Integral.

III. Desgleichen hat eine gegebene Differential-Gleichung der dritten Ordnung zwischen zwei Veränderlichen x und y, ein Ur-Integral mit drei willkührlichen Constanten a, b und c, welches durch $f_{x,y,a,b,c} = 0$ bezeichnet seyn mag. Eliminirt man aber aus $f = 0$ und $\partial f_{(x)} = 0$ und $\partial^2 f_{(x)} = 0$, einmal a und b, dann a und c, zuletzt noch b und c, so erhält man jedesmal eine Differential-Gleichung der 2ten Ordnung, einmal mit der Constante c, dann mit der Constante b, zuletzt mit der Constante a. Jede dieser drei Differential-Gleichungen der zweiten Ordnung ist daher ein erstes Integral der gegebenen Differential-Gleichung der dritten Ordnung.

Hat man aber die drei ersten Integrale der gegebenen Differential-Gleichung der dritten Ordnung, und eliminirt man aus ihnen die beiden Ableitungen ∂y_x und $\partial^2 y_x$, so erhält man wieder das Ur-Integral mit den drei willkührlichen Constanten.

Aehnliches läßt sich von den Differential-Gleichungen aller Ordnungen, zwischen zwei Veränderlichen x und y, behaupten.

§. 39.

Daß aber jede Differential-Gleichung der n^{ten} Ordnung zwischen zwei Veränderlichen x und y, ein Ur-Integral mit n willkührlichen Constanten habe, wenn auch vielleicht nicht immer in endlicher Form, — das lehrt wiederum der Maclaurin-sche Lehrsatz.

Ist z. B. eine Differential-Gleichung der 2ten Ordnung gegeben, so kann man aus ihr $\partial^2 y_x$ finden in x, y und ∂y_x ausgedrückt. — Differenziirt man diese Gleichung noch einmal, und substituirt man sogleich statt $\partial^2 y_x$ seinen so eben gefundenen Werth, so erhält man $\partial^3 y_x$ in x, y und ∂y_x ausgedrückt. Differenziirt man jetzt noch einmal, und substituirt man statt $\partial^2 y_x$ (und nöthigen Falles auch statt $\partial^3 y_x$) ihren so eben gefundenen Werth, so erhält man $\partial^4 y_x$ in x, y und ∂y_x ausgedrückt. — Fährt man so fort, so erhält man alle höheren Ableitungen von y nach x, ohne Ende fort, in x, y und ∂y_x ausgedrückt.

Nimmt man nun den Maclaurin'schen Lehrsatz

$$(\odot)\cdots \quad y = y_0 + \partial y_0 \cdot x + \partial^2 y_0 \cdot \frac{x^2}{2!} + \partial^3 y_0 \cdot \frac{x^3}{3!} + \partial^4 y_0 \cdot \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

und substituirt man hier herein statt $\partial^2 y_x$, $\partial^3 y_x$ etc. etc. ihre so eben gefundenen Werthe, in x, y und ∂y_x ausgedrückt, während statt x die Null gesetzt werden muß, so hat man y in eine nach Potenzen von x geordnete Reihe ausgedrückt gefunden, in deren einzelnen Koefficienten die Constanten y_0 und ∂y_0 vorkommen, wofür man zwei ganz willkührliche Constanten a und b schreiben kann, weil dann diese Maclaurin'sche Reihe selbst für $x = 0$, $y = a$, und wenn man die Reihe differenziirt und dann $x = 0$ setzt, auch noch $\partial y_x = b$ liefert.

Man begreift, wie dieselbe Reihe ⊙.) y in x ausgedrückt

mit

mit n willkührlichen Constanten liefert, wenn eine Differential-Gleichung der n^{ten} Ordnung gegeben ist *).

Diese Reihe ⊙.) ist also allemal das Ur-Integral, und sie enthält alle Funktionen von x, welche, statt y gesetzt, der gegebenen Differential-Gleichung der n^{ten} Ordnung genügen, mit Ausnahme jedoch derer, wenn solche existiren sollten, welche der Differential-Gleichung zwar genügen, dagegen den Ausdruck $\partial^{n+1} y_x$, oder einen der folgenden $\partial^{n+2} y_x$ etc. etc. auf die Form $\frac{0}{0}$ bringen, weil für diese die obige Reihe ⊙.) selbst aufhört brauchbar zu seyn.

Diese Ausnahmsfälle werden wir später unter dem Namen der singulären Werthe näher betrachten.

§. 40.

Integrations-Methoden für Differential-Gleichungen der ersten Ordnung, zwischen zwei Veränderlichen x und y.

Es soll nun eine gegebene Differential-Gleichung der ersten Ordnung $\psi_{x,y,\partial y_x} = 0$ in endlicher Form zu integriren versucht werden. — Man beginnt damit, daß man sie nach ∂y_x auflöst, also ihr die Form $\partial y_x = \frac{P_{x,y}}{N_{x,y}}$ giebt (wo N auch bloß $= 1$ seyn kann), oder, wenn $-M$ statt P gesetzt wird, sie auf die Form

$$1) \qquad M_{x,y} + N_{x,y} \cdot \partial y_x = 0$$

bringt, was also allemal möglich ist.

---

*) Statt des gemeinen Maclaurin'schen Lehrsatzes kann man auch den allgemeinern nehmen, nach welchem

$$y = y_\alpha + \partial y_\alpha \cdot (x-\alpha) + \partial^2 y_\alpha \cdot \frac{(x-\alpha)^2}{2!} + \partial^3 y_\alpha \cdot \frac{(x-\alpha)^3}{3!} + \cdots$$

ist, wo statt α ein willkührlicher, aber jedesmal ein bestimmter Ziffernwerth gesetzt wird, und wo dann y_α etc. etc. die willkührlichen Constanten werden.

I. Direkte Integrations-Methode.

Ist nun $M+N\cdot\partial y_x$ integrabel, d. h. zeigt sich die Bedingungs-Gleichung der Integrabilität $\partial M_y = \partial N_x$ erfüllt, so findet man das Integral $f_{x,y}$ (nach §. 36. I.) und setzt solches einer Konstante gleich. Die Gleichung

$$2) \qquad f_{x,y} = c$$

ist dann die gesuchte Integral-Gleichung. Dabei kann man der in f eingehenden Constante einen beliebigen bestimmten Werth geben, also auch solche der Null gleich nehmen.

Ist also gegeben die Differential-Gleichung $y+x\cdot\partial y_x = 0$, so erhält man sogleich zu ihrem Integral die Gleichung $xy = c$ oder $y = \frac{c}{x}$.

II. Methode mittelst des integrirenden Faktors.

Ist die Differential-Funktion $M+N\cdot\partial y_x$ nicht integrabel, so kann man die Gleichung $M+N\cdot\partial y_x = 0$ vorher mit einem Faktor $\varphi_{x,y}$ multipliciren, so daß die neue Gleichung

$$3) \qquad \varphi M+\varphi N\cdot\partial y_x = 0,$$

und die Funktion $\varphi M+\varphi N\cdot\partial y_x$ integrabel wird. Dieser Faktor φ heißt der integrirende Faktor.

In so fern ein Integral $\psi_{x,y,c} = 0$ existirt, und in so fern man diese Gleichung nach c algebraisch auflösen, dem Integral also die Form

$$f_{x,y} = c$$

geben kann, und in so fern dann

$$\partial f_x + \partial f_y\cdot\partial y_x = 0$$

mit der gegebenen Gleichung

$$M+N\cdot\partial y_x = 0$$

zusammenfallen muß, so muß allemal

$$\frac{\partial f_x}{\partial f_y} = \frac{M}{N}$$

seyn; also muß entweder $\partial f_x = M$ und $\partial f_y = N$ seyn, oder es muß einen Faktor $\varphi_{x,y}$ geben, so daß $\partial f_x = \varphi M$ und

$\partial f_y = \varphi N$ ist. Also ist die Existenz eines solchen integrirenden Faktors außer Zweifel gesetzt *).

Soll aber $\varphi M + \varphi N \cdot \partial y_x$ integrabel seyn, so muß (nach §. 36. I.)

$$\partial(\varphi M)_y = \partial(\varphi N)_x,$$

d. h.

$$4) \quad (\partial M_y - \partial N_x)\cdot\varphi + M\cdot\partial\varphi_y - N\cdot\partial\varphi_x = 0$$

seyn. Dies ist also die Gleichung, aus welcher der integrirende Faktor φ gefunden werden muß.

Leider ist diese Gleichung (4.) eine Parzial-Differenzial-Gleichung, weil sie φ als Funktion der beiden Veränderlichen x und y enthält, und noch die Ableitungen derselben nach x und nach y. Sie wird nur in den Ausnahmsfällen, wo φ etwa bloß y allein enthalten sollte, wo also $\partial\varphi_x = 0$ seyn würde, oder wo φ bloß x allein enthält, so daß $\partial\varphi_y = 0$ ist, eine totale Differential-Gleichung und gehört dann zu den weiter unten zu betrachtenden lineären Gleichungen.

Man wird also in den meisten Fällen diesen integrirenden Faktor φ nur durch glückliche Versuche auffinden können.

Soll z. B. $y - x\cdot\partial y_x = 0$ integrirt werden, so multiplicire man diese Gleichung mit $\frac{1}{y^2}$ und man erhält

$$\frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}\cdot\partial y_x = 0.$$

Hier ist nun der Ausdruck zur Linken integrabel, er giebt, integrirt, $\frac{x}{y}$, und die gesuchte Integral-Gleichung ist daher

---

*) Es existiren deren immer unendlich viele. Ist nämlich φ ein solcher integrirender Faktor, so daß

$$\varphi M + \varphi N\cdot\partial y_x = \partial f_{(x)}$$

wird, und ist F eine ganz beliebige Funktion von f, so ist

$$F\varphi M + F\varphi N\cdot\partial y_x = F\cdot\partial f_{(x)}$$

und dieser Ausdruck zur Rechten, integrirt, giebt $\int F\cdot df$; sein Integral ist also immer möglich; mithin ist $F\varphi$ ebenfalls ein integrirender Faktor von $M + N\cdot\partial y_x$.

$$\frac{x}{y} = c \quad \text{oder} \quad x = cy \quad \text{oder} \quad y = cx.$$

Hätte man dieselbe Differential-Gleichung $y - x \cdot \partial y_x = 0$ mit $\frac{1}{x^2+y^2}$ multiplicirt, so daß man erhalten hätte die neue Gleichung

$$\frac{y}{x^2+y^2} - \frac{x}{x^2+y^2} \cdot \partial y_x = 0,$$

so wäre nun der Ausdruck zur Linken wiederum integrabel gewesen *), und man hätte erhalten als Integral die Gleichung

$$\frac{1}{tg}\frac{y}{x} = c.$$

Ist aber $\frac{1}{tg}\frac{y}{x}$ constant, so ist $\frac{y}{x}$ selbst constant; also hat man wiederum $\frac{y}{x} = c$ als Integral.

Sind M und N homogene Funktionen von x und y vom μ^{ten} Grade, d. h. sind sie so, daß sie bezüglich in $t^\mu M$ und $t^\mu N$ übergehen, so oft tx und ty statt x und y gesetzt werden, so ist $\frac{1}{Mx+Ny}$ allemal ein integrirender Faktor von $M + N \cdot \partial y_x$, d. h. es ist dann allemal

$$(\odot) \cdots \quad \partial\left(\frac{M}{Mx+Ny}\right)_y = \partial\left(\frac{N}{Mx+Ny}\right)_x.$$

Man ist auf diesen Satz durch folgende Eigenschaft der homogenen Funktionen gekommen. Ist nämlich F eine homogene Funktion von x und y vom m^{ten} Grade und setzt man in ihr tx und ty statt x und y, so geht sie in $t^\mu \cdot F$ über; oder in $(1+g)^\mu F$, wenn $1+g$ statt t gesetzt wird, in welchem letztern Falle also $(1+g)x$ und $(1+g)y$, d. h.

---

*) Dies konnte man à priori wissen. Denn, war $\frac{1}{y^2}$ ein integrirender Faktor und $\frac{x}{y}$ das Integral f, dann mußte jede Funktion von $\frac{x}{y}$, mit $\frac{1}{y^2}$ multiplicirt, ebenfalls ein integrirender Faktor seyn. Es ist aber

$$\frac{1}{x^2+y^2} = \frac{1}{y^2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{x}{y}\right)^2+1}.$$

$x+gx$ und $y+gy$ statt bezüglich x und y gesetzt worden sind. Man hat daher die Gleichung

$$F_{x+gx,y+gy} = (1+g)^{\mu} \cdot F.$$

Nimmt man nun den Taylor'schen Lehrsatz für zwei Veränderliche (I. Bd. §. 153.) und setzt man daselbst gx statt h und gy statt k, so erhält man in der vorstehenden Gleichung den Ausdruck zur Linken bald nach Potenzen von g geordnet, während der Ausdruck zur Rechten mittelst des binomischen Lehrsatzes ebenfalls nach g geordnet werden kann. Vergleicht man dann links und rechts die Koefficienten der einzelnen Potenzen von g mit einander, so erhält man die nachstehenden Gleichungen, nämlich

$$1) \qquad x \cdot \partial F_x + y \cdot \partial F_y = \mu F;$$

$$2) \qquad x^2 \cdot \partial^2 F_x + 2xy \cdot \partial^{1,1} F_{x,y} + y^2 \cdot \partial^2 F_y = \mu(\mu-1)F;$$

u. s. w. f.

Diese Gleichungen bilden eine merkwürdige Eigenschaft der homogenen Funktionen, welche wir bei dieser Gelegenheit fest halten wollen *).

Nun ist aber der Zähler von $\partial\left(\frac{M}{Mx+Ny}\right)_y - \partial\left(\frac{N}{Mx+Ny}\right)_x$, wenn man wirklich differenziirt, subtrahirt und den Nenner wegläßt,

$$= N(x \cdot \partial M_x + y \cdot \partial M_y) - M \cdot (x \cdot \partial N_x + y \cdot \partial N_y),$$

d. h. wegen der Gleichung 1.), wenn man abwechselnd M und N statt F setzt,

$$= N(\mu M) - M(\mu N) = 0.$$

Also ist die Bedingungs-Gleichung ⊙.) der Integrabilität wirklich erfüllt, und $\frac{1}{Mx+Ny}$ ist also wirklich ein integrirender Faktor von $M+N \cdot \partial y_x$.

III. Methode der Trennung der Veränderlichen.

In der Gleichung

$$1) \qquad M_x + N_y \cdot \partial y_x = 0,$$

in welcher der Koefficient M kein y, und der Koefficient N kein x enthält, ist der Ausdruck zur Linken allemal an sich schon integrabel, weil $\partial M_y = 0 = \partial N_x$ ist; und ihr Integral ist

$$2) \qquad \int M \cdot dx + \int N \cdot dy = const. \text{ **)}$$

In diesem Falle sagt man: „die Veränderlichen x und y seyen „in der gegebenen Differential-Gleichung getrennt".

---

*) Diese Eigenschaft der homogenen Funktionen läßt sich auch auf homogene Funktionen von beliebig viel Veränderlichen ausdehnen.

**) Es ist nämlich (nach §. 4. N. 4.)

$$\int N \cdot dy = \int N \cdot \partial y_x \cdot dx.$$

Hat nun eine Gleichung die Form

1') $$X_x Y_y + X'_x Y'_y \cdot \partial y_x = 0,$$

so darf man nur durch X'_x und Y_y dividiren, um sogleich die Veränderlichen getrennt zu haben. Man erhält dann

2') $$\frac{X}{X'} + \frac{Y'}{Y} \cdot \partial y_x = 0$$

und davon ist dann das Integral

3') $$\int \frac{X}{X'} \cdot dx + \int \frac{Y'}{Y} \cdot dy = c.$$

Offenbar aber hat man hier für die Gleichung 1'.) nur die Methode des integrirenden Faktors, der hier $\frac{1}{X'Y}$ ist, angewandt, so daß diese „Methode der Trennung der Veränderlichen" nicht eigentlich als eine neue Methode aufgezählt werden kann.

Ist z. B. $y + x \cdot \partial y_x = 0$ zu integriren, so dividire man diese Gleichung durch xy und man erhält

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \cdot \partial y_x = 0.$$

In dieser Gleichung sind nun die Veränderlichen getrennt, und ihr Integral ist daher

$$\int \frac{1}{x} \cdot dx + \int \frac{1}{y} \cdot dy = c, \quad \text{d. h.} \quad \log x + \log y = c$$

oder $$\log(xy) = c, \quad \text{d. h.} \quad xy = e^c \quad \text{oder} \quad xy = C,$$

wo C eine willkührliche Constante ist.

Man hätte sogleich in der Gleichung $\log(xy) = c$ statt c schreiben können $\log c$, weil $\log c$ noch eben so gut jede willkührliche Constante ausdrückt wie c selbst. Dann schrieb man ohne Weiteres statt

$$\log(xy) = \log c, \quad \text{sogleich} \quad xy = c.$$

IV. Integration durch Einführung neuer Veränderlichen.

In allen den Fällen, wo die vorher beschriebenen Methoden nicht mit Erfolg angewandt werden können, führt man einen oder zwei neue Veränderliche ein, in der Hoffnung, daß die neue Differential-Gleichung dann nach einer der vorbeschriebenen Methoden behandelt werden könne.

A. Sind z. B. M und N homogene Funktionen von x und y von einerlei z. B. von der n^{ten} Dimension *), so setze man $y = xz$, also $\partial y_x = x \cdot \partial z_x + z$; die Funktionen M und N nehmen dadurch bezüglich die Form $x^n \cdot P_z$ und $x^n \cdot Q_z$ an, und die Gleichung $M + N \cdot \partial y_x = 0$ geht dadurch über in

$$P_z + Q_z(x \cdot \partial z_x + z) = 0$$

d. h. in $$P_z + zQ_z + xQ_z \cdot \partial z_x = 0.$$

In dieser können die Veränderlichen sogleich getrennt werden, und sie wird dann

$$\frac{1}{x} + \frac{Q_z}{P_z + zQ_z} \cdot \partial z_x = 0$$

und giebt, integrirt,

$$log\, x + \int \frac{Q_z}{P_z + zQ_z} \cdot dz = c.$$

Ist z. B. zu integriren die Gleichung

$$x + y \cdot \partial y_x = ny,$$

so wird sie, wenn man $y = xz$ setzt,

$$1 + z(x \cdot \partial z_x + z) = nz$$

oder

$$\frac{1}{x} + \frac{z}{1 - nz + z^2} \cdot \partial z_x = 0;$$

also giebt sie, integrirt

$$log\, x + \int \frac{z}{1 - nz + z^2} \cdot dz = c.$$

Will man hier noch $\int \frac{z}{1 - nz + z^2} \cdot dz$ finden, so muß man den Bruch in zwei Partial-Brüche zerlegen, oder man muß direkt nach §. 11.) verfahren, um den doppelten Partial-Bruch ohne Weiteres zu integriren. Auf diesem letzteren Wege erhält man zunächst

$$\int \frac{z}{1 - nz + z^2} \cdot dz = \tfrac{1}{2} log\,(1 - nz + z^2) + n \int \frac{1}{1 - nz + z^2} \cdot dz,$$

---

*) Ist z. B. $M = x^3 - 4x^2y$ und $N = xy^2 - 3x^2y + 4y^3$, so sind M und N homogene Funktionen von der dritten Dimension. — Hat man aber $M = \frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{x^3 + y^2}$ und $N = \frac{xy}{x^4 - y^4}$, so sind M und N homogene Funktionen von der $(-2)^{ten}$ Dimension.

während das letztere Integral im §. 6. N. 21.) oder N. 25.) bereits gefunden ist.

Hätte man als zweites Beispiel

$$x \cdot \partial y_x - y = \sqrt{x^2+y^2}$$

zu integriren, und setzte man $y = xz$, so erhielte man

$$x \cdot \partial z_x = \sqrt{1+z^2}$$

oder $$\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \cdot \partial z_x = 0;$$

und diese Gleichung, integrirt, giebt

$$log\, x - \int \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \cdot dz = c,$$

d. h. $$log\, x - log(z+\sqrt{1+z^2}) = log\, c,$$

indem man rechts statt c lieber $log\, c$ schreibt. Dann verwandelt sich das Integral sogleich in

$$\frac{x}{z+\sqrt{1+z^2}} = c \quad \text{oder in} \quad \frac{x^2}{y+\sqrt{x^2+y^2}} = c,$$

d. h. in $$y + \sqrt{x^2+y^2} - cx^2 = 0,$$

indem man zuletzt lieber $\frac{1}{c}$ statt c gesetzt hat.

B. Hätte man aber die Gleichung

1) $$(a+mx+ny)+(b+px+qy)\cdot \partial y_x = 0$$

gegeben, so würde man sie erst dadurch in eine andere verwandeln, deren Koefficienten homogen sind, daß man

2) $$x = t+\alpha \quad \text{und} \quad y = u+\beta$$

setzt. Da nämlich y eine Funktion von x ist, so sind jetzt auch x, y und u Funktionen von t; differenziirt man daher letztere beiden Gleichungen nach allem t, so erhält man

3) $$\partial x_t = 1, \qquad \partial y_t = \partial u_t,$$

während

4) $$\partial y_x = \frac{\partial y_t}{\partial x_t}$$

ist (nach I. Bd. §. 150. I.). Also findet sich hier

5) $$\partial y_x = \partial u_t \text{ *).}$$

---

*) Denkt man sich unter dx und dy zusammengehörige unendlich-kleine Zuwachse (Differentialien), so ist (nach I. Bd. §. 160.) $\partial y_x = \frac{dy}{dx}$, und man kann daher der Gleichung

Die gegebene Differential-Gleichung wird nun

$$6)\quad (a+m\alpha+n\beta)+mt+nu + [(b+p\alpha+q\beta)+pt+qu]\cdot\partial u_t = 0.$$

oder

$$7)\quad (mt+nu)+(pt+qu)\partial u_t = 0,$$

wenn man α und β so nimmt, daß

$$8)\quad a+m\alpha+n\beta = 0 \quad \text{und} \quad b+p\alpha+q\beta = 0$$

wird. — Um nun diese homogene Gleichung 7.) (nach A.) weiter zu behandeln, setzt man

$$9)\quad u = vt, \quad \text{also} \quad \partial u_t = v+t\cdot\partial v_t;$$

und man erhält nun die Gleichung

$$m+nv+(p+qv)(v+t\cdot\partial v_t) = 0, \quad \text{oder}$$

$$10)\quad \frac{1}{t}+\frac{p+qv}{m+(n+p)v+qv^2}\cdot\partial v_t = 0,$$

in welchen die Veränderlichen getrennt sind. Und diese Gleichung, integrirt, giebt

$$11)\quad \log t+\int\frac{p+qv}{m+(n+p)v+qv^2}\cdot dv = c.$$

$$M+N\cdot\partial y_x = 0$$

auch allemal die nachstehende Form geben, nämlich

$$M\cdot dx+N\cdot dy = 0.$$

Führt man nun neue Veränderliche t und u so ein, daß

$$x = t+\alpha, \quad y = u+\beta$$

wird, und sind dt, du, dx, dy zusammengehörige unendlich-kleine Zuwachse, so hat man sogleich

$$dx = dt \quad \text{und} \quad dy = du;$$

und die Gleichung

$$M\cdot dx+N\cdot dy = 0$$

geht sogleich in

$$M\cdot dt+N\cdot du = 0$$

oder in

$$M+N\cdot\frac{du}{dt} = 0$$

d. h. in

$$M+N\cdot\partial u_t = 0$$

über, so daß also auch aus dieser Betrachtung dasselbe Endresultat sich ergiebt, wie im Texte, nämlich daß ∂u_t statt ∂y_x zu stehen kommt.

Integrirt man vollends (nach §. 11.), setzt man dann statt v überall $\frac{u}{t}$, statt u und t aber bezüglich ihre Werthe $x-\alpha$ und $y-\beta$, so wie statt α und β ihre Werthe aus den Gleichungen 8.), so erhält man die gesuchte Integral-Gleichung zwischen x und y.

Da die Werthe von α und β aus den Gleichungen 8.) im Nenner $mq-np$ enthalten, so hört dieses Verfahren auf, seine Dienste zu thun, so oft $mq-np=0$, d. h. so oft $q=\frac{np}{m}$ ist. — In diesem Ausnahmsfalle wird die Gleichung 1.), wenn man statt q diesen Werth setzt, die Form

1′) $$am+bm\cdot\partial y_x+(mx+ny)(m+p\cdot\partial y_x)=0$$

annehmen, und giebt sogleich, wenn man $mx+ny=z$, also $m+n\cdot\partial y_x=\partial z_x$ setzt, die Gleichung

2′) $$1+\frac{bm+pz}{amn-bm^2+(mn-pm)z}\cdot\partial z_x=0;$$

und diese Gleichung, integrirt, giebt wiederum

3′) $$x+\frac{1}{m}\int\frac{bm+pz}{an-bm+(n-p)z}\cdot dz=0.$$

Diese gebrochene Funktion integrirt sich vollends sehr leicht, wenn man mit dem Nenner in den Zähler dividirt, die Constante $\frac{p}{n-p}$ herausdividirt, und die ächt gebrochene Funktion $\frac{p}{n-p}\cdot\frac{bm-ap}{an-bm+(n-p)z}$ übrig behält und nun beide Theile integrirt. Dies giebt zuletzt die Integral-Gleichung

4′) $$x+\frac{pz}{m(n-p)}+\frac{n(bm-ap)}{m(n-p)^2}\cdot log\,(an-bm+(n-p)z)=c.$$

Ist aber $n=p$, so giebt die obige Gleichung 3′.) augenblicklich das Integral

5′) $$x+\frac{bz}{an-bm}+\frac{pz^2}{2m(an-bm)}=c.$$

C. Betrachten wir noch die lineäre Gleichung der ersten Ordnung *), d. h. die Gleichung von der Form

---

*) Unter lineärer Gleichung der zweiten Ordnung versteht man die Gleichung

$$\partial^2 y_x+P_x\cdot\partial y_x+Q_x\cdot y=R_x.$$

Und die lineäre Gleichung der dritten Ordnung wird diejenige genannt, welche die Form hat

$$\partial^3 y_x+P_x\cdot\partial^2 y_x+Q_x\cdot\partial y_x+R_x\cdot y=S_x.$$

1) $$\partial y_x + P_x \cdot y = Q_x.$$

Führt man hier statt des einen Veränderlichen y, zwei neue Veränderliche u_x und z_x ein, dadurch, daß man

2) $$y = uz, \quad \text{also} \quad \partial y_x = u \cdot \partial z_x + z \cdot \partial u_x$$

setzt, so kann man über den einen dieser beiden Veränderlichen nach Belieben disponiren, und die neue Gleichung dadurch auf eine einfachere Form bringen. Die Gleichung 1.) wird nämlich durch diese Substitution

3) $$u \cdot \partial z_x + z \cdot \partial u_x + Puz = Q.$$

Setzt man nun

4) $$\partial z_x + Pz = 0,$$

so geht die Gleichung 3.) noch über in

5) $$z \cdot \partial u_x = Q.$$

Diese Gleichungen 4.) und 5.) geben nun z und u, folglich auch y. — In der Gleichung 4.) trennen sich die Veränderlichen augenblicklich und sie wird

$$P_x + \frac{1}{z} \cdot \partial z_x = 0,$$

und giebt, integrirt,

6) $$\int P \cdot dx + log\, z = c.$$

Findet man hieraus

7) $$z = C \cdot e^{-\int P \cdot dx},$$

und substituirt man diesen Werth von z in die 5.), so ergiebt sich noch

8) $$u = \frac{1}{C} \int Q \cdot e^{\int P \cdot dx} \cdot dx + c.$$

Und nun wird, aus $y = uz$,

9) $$y = e^{-\int P \cdot dx} \cdot \int Q \cdot e^{\int P \cdot dx} \cdot dx + Cc \cdot e^{-\int P \cdot dx},$$

wo statt Cc eine beliebige Constante, also c oder C allein gesetzt werden kann *).

---

*) Man konnte sogleich in 6.) $c = 0$ oder in 7.) $C = 1$ nehmen, weil es hier nur darauf ankam, nicht alle Werthe von z, sondern nur irgend einen Werth von z so zu finden, daß die gegebene Differential-Gleichung die einfache Gestalt in 5.) annehme. Hier genügte also, irgend ein besonderes Integral der Gleichung 4.) statt des allgemeinen.

D. Betrachten wir noch als letztes Beispiel die Gleichung des Riccati, nämlich

$$1)\qquad \partial y_x + by^2 = ax^m,$$

wo b und a gegebene Constanten sind.

Für $m = 0$ lassen sich die Veränderlichen sogleich trennen; sie wird $1 + \frac{1}{by^2 - a} \cdot \partial y_x = 0$ und giebt integrirt

$$x + \int \frac{1}{by^2 - a} \cdot dy = c$$

oder

$$x = \frac{1}{2\sqrt{ab}} log \frac{\sqrt{a} + y\sqrt{b}}{\sqrt{a} - y\sqrt{b}} + C.$$

Ist aber m nicht $= 0$, so setze man, um die Gleichung vielleicht homogen zu macheu,

$$y = z^k, \quad \text{also} \quad \partial y_x = kz^{k-1} \cdot \partial z_x;$$

und die gegebene Gleichung 1.) geht dadurch über in

$$2)\qquad kz^{k-1}\partial z_x + bz^{2k} - ax^m = 0.$$

Diese Gleichung wird homogen, wenn

$$k - 1 = 2k = m, \quad \text{also} \quad k = -1$$

gesetzt wird, und wenn $m = -2$ gegeben ist. Ist also nicht $m = -2$, so nützt diese Substitution nichts.

Man kann aber den neuen Veränderlichen z auch durch die Gleichung

$$y = Ax^p + x^q z$$

einführen. Dann wird die Gleichung 1.) die nachstehende

$$3)\quad x^q \cdot \partial z_x + (qx^{q-1} + 2bAx^{p+q} + bx^{2q}z)z + pAx^{p-1} + bA^2x^{2p} = ax^m.$$

Setzt man nun, um links die beiden letzten Glieder wegzuschaffen, und um überhaupt homogene Funktionen zu erhalten,

$$p - 1 = 2p, \quad pA + bA^2 = 0, \quad q - 1 = p + q$$

und $\quad q + 2bA = 0,$

so erhält man

$$p = -1, \quad A = \frac{1}{b}, \quad q = -2, \quad \text{also} \quad y = \frac{1}{bx} + \frac{z}{x^2};$$

und die neue Differential-Gleichung selbst wird

$$4) \qquad \partial z_x + b\frac{z^2}{x^2} = ax^{m+2}.$$

Diese Gleichung ist homogen für $m = -2$; ist aber $m = -4$, so lassen sich in ihr die Veränderlichen trennen. Die Riccatische Gleichung 1.) läßt sich also integriren, so oft $m = -2$ und $m = -4$ ist.

Man kann aber nun suchen die Gleichung 4.) auf's Neue in eine andere zu verwandeln (dadurch daß man statt z wiederum einen oder zwei neue Veränderliche einführt), welche für andere Werthe von m integrabel wird. Setzt man

$$z = \frac{1}{y'} \quad \text{und} \quad x^{m+3} = x',$$

so erhält man sogleich, wenn der Kürze wegen

$$\frac{a}{m+3} = b', \quad \frac{b}{m+3} = a' \quad \text{und} \quad -\frac{m+4}{m+3} = m'$$

gesetzt wird, aus 4.) die Gleichung

$$5) \qquad \partial y'_{x'} + b'y'^2 = a'x'^{m'},$$

welche genau wieder die Form der gegebenen Gleichung 1.) hat und welche für $m' = -2$ und $m' = -4$ auf dem kurz vorher betretenen Wege integrabel gemacht wird. Aus $m' = -4$ und $-\frac{m+4}{m+3} = m'$ folgt aber $m = -\frac{8}{3}$.

Man sieht, wie man fortfahren kann, um dieselbe Gleichung für die Werthe von

$$m = -4, \quad -\tfrac{8}{3}, \quad -\tfrac{12}{5}, \quad -\tfrac{16}{7}, \ldots -\frac{4b}{2b-1}$$

integrabel zu machen.

Setzt man aber in 1.) sogleich $y = \frac{1}{y'}$ und $x^{m+1} = x'$, so nimmt sie noch die Form an

$$\partial y'_{x'} + b'y'^2 = a'x'^{m'},$$

und auf diesem Wege findet man nach und nach das Integral

der Gleichung 1.), wenn $m = -\frac{4}{3}, -\frac{8}{5}, -\frac{12}{7}, \cdots -\frac{4b}{2b+1}$ ist. —

Es mag hier von diesen besonderen Gleichungen genug gesagt seyn. Aus Allem scheint nur so viel hervorzugehen, daß wenn schon in seltenen Fällen nur ein Integral in endlicher Form existirt, in noch seltenern Fällen dasselbe mittelst einer der hier beschriebenen Methoden gefunden werden wird; und daß namentlich bei Einführung neuer Veränderlichen eben so viel Geschick als Glück dazu gehört, wenn man seine Bemühungen des Integrirens mit einem entsprechenden Erfolge gekrönt sehen will.

V. Indem man $\partial y_x = p$ setzt und diese Gleichung integrirt.

Wir haben im Eingange zu diesem Paragraphen gesagt, daß man die gegebene Differential-Gleichung (zwischen x, y und ∂y_x) vor Allem nach ∂y_x algebraisch auflösen müsse, um ihr die Form $M + N \cdot \partial y_x = 0$ geben zu können. Wenn sie aber nach ∂y_x eine algebraische höhere Gleichung vom m^{ten} Grade ist, so ist eine allgemeine algebraische Auflösung gar nicht möglich, wenn $m > 4$, und für den Zweck des Integrirens unzulässig, wenn $m = 4$ und wohl meist auch noch, wenn $m = 3$, oder $= 2$ ist. Für diesen Fall kann man daher einen der beiden folgenden Wege noch versuchen.

A. Enthält die gegebene Differential-Gleichung außer ∂y_x bloß noch x, aber nicht y selbst, und läßt sie sich nach x leichter auflösen als nach ∂y_x, so führt man einen neuen Veränderlichen p mittelst der Gleichung

$$1) \qquad \partial y_x = p$$

ein, bekommt dadurch eine Gleichung zwischen x und p, löst solche nach x algebraisch auf, erhält

$$2) \qquad x = P_p,$$

und findet aus $\partial y_x = p$, also aus $y = \int p \cdot dx$, wenn man theilweise integrirt (d. h. die Formel §. 4. N. 3. anwendet, indem $\varphi = p$, $\psi = 1$ gesetzt wird)

$$y = px - \int x \cdot \partial p_x \cdot dx = px - \int x \cdot dp$$

d. h.

3) $$y = px - \int P_p \cdot dp.$$

Eliminirt man aus 2.) und 3.) den Veränderlichen p, so erhält man die Gleichung zwischen x und y nebst der willkührlichen Constante, welche $\int P \cdot dp$ eingeführt hat, als das gesuchte Integral.

Ist z. B. gegeben die Differential-Gleichung

$$x + a \cdot \partial y_x = b\sqrt{1 + \partial y_x^2},$$

so erhält man, wenn $\partial y_x = p$ gesetzt wird,

1') $$x = -ap + b\sqrt{1+p^2}$$

und

$$y = px - \int (-ap + b\sqrt{1+p^2}) \cdot dp$$

oder

2') $$y = px + \tfrac{1}{2}ap^2 - b\int \sqrt{1+p^2} \cdot dp + c.$$

Findet man nun $\int \sqrt{1+p^2} \cdot dp$ (nach §. 12. oder §. 6.) und eliminirt man dann aus 1.') und 2'.) den Veränderlichen p, so hat man die gesuchte Integral-Gleichung zwischen y und x.

Ganz dasselbe findet statt, wenn die gegebene Differential-Gleichung außer ∂y_x bloß noch y, also kein x enthalten sollte. Man würde dann nur den Satz I. Bd. §. 150. I.) zu Hülfe nehmen, nach welchem, wenn man daselbst x statt f, und y statt z setzt

$$\partial x_x = \partial x_y \cdot \partial y_x, \quad \text{d. h.} \quad 1 = \partial y_x \cdot \partial x_y$$

ist*). Man kann danach überall statt ∂y_x den ihm gleichen Quotienten $\frac{1}{\partial x_y}$ setzen, und man erhält dann, wenn $\partial x_y = q$ gesetzt wird, aus der gegebenen Differential-Gleichung

$$y = Q_q$$

---

*) Sind dx und dy zusammengehörige unendlich-kleine Zuwachse, so ist (nach I. Bd. §. 160.)

$$\partial y_x = \frac{dy}{dx} \text{ und } \partial x_y = \frac{dx}{dy},$$

Daraus folgt dann ebenfalls, daß $\partial y_x = \frac{1}{\partial x_y}$ ist.

und aus $\partial x_y = q$ oder $x = \int q \cdot dy$, wenn man theilweise integrirt,

$$x = qy - \int y \cdot \partial q_y \cdot dy = qy - \int Q_q \cdot dq.$$

Wird dann q eliminirt, so hat man das Integral zwischen x und y und einer willkührlichen Constante.

B. Enthält aber die gegebene Differential-Gleichung außer ∂y_x noch y und x zugleich, jedoch einen der beiden letztern Veränderlichen, z. B. y, nur in der ersten Potenz, so finde man, indem man wieder

1) $$\partial y_x = p$$

setzt, aus der gegebenen Differential-Gleichung y in x und p ausgedrückt, also

2) $$y = f_{x,p}.$$

Differenziirt man nun diese Gleichung auf's Neue, und zwar, in so fern x und y Funktionen von p sind, nach allem p, so erhält man

3) $$\partial y_p = \partial f_x \cdot \partial x_p + \partial f_p,$$

oder, weil (nach I. Bd. §. 150. I.) $\partial y_p = \partial y_x \cdot \partial x_p = p \cdot \partial x_p$ ist, wenn man dies statt ∂y_p substituirt

4) $$0 = (\partial f_x - p) \cdot \partial x_p + \partial f_p,$$

wo ∂f_x und ∂f_p, sowohl x als auch p enthalten können, aber nicht y, so daß die 4.) eine Differential-Gleichung zwischen x und p ist, und in so fern man $\partial x_p = \frac{1}{\partial p_x}$ hat, wohl auch so

5) $$0 = (\partial f_x - p) + \partial f_p \cdot \partial p_x$$

geschrieben werden kann. — Gelingt es nun, diese Gleichung 4.) oder 5.) zu integriren, so daß man eine Gleichung zwischen x, p und einer Constante erhält, so darf man nur aus dieser Gleichung und aus der Gleichung 2.) den Veränderlichen p eliminiren, und man wird die gesuchte Integral-Gleichung zwischen x, y und der willkührlichen Constante haben.

Ist z. B. die gegebene Differential-Gleichung so, daß wenn man p statt ∂y_x setzt, sie die Form

1′) $$y = px + P_p$$

annimmt, so daß $f_{x,p} = px + P_p$, mithin

$$\partial f_x = p \quad \text{und} \quad \partial f_p = x + \partial P_p$$

ist, so wird die Gleichung 4.) jetzt diese:

2′) $$0 = x + \partial P_p.$$

Weil dies aber gar keine Differential-Gleichung mehr ist, so hört das Verfahren selbst ganz auf. — Nimmt man jedoch statt der Gleichung 4.) die Gleichung 5.), so liefert sie

3′) $$\partial p_x = 0.$$

Diese Gleichung kann integrirt werden, und giebt dann

4′) $$p = const. = c.$$

Und eliminirt man nun aus 1′.) und 2′.) den Veränderlichen p, so erhält man

5′) $$y = cx + P_c,$$

welches das gesuchte Integral mit der willkührlichen Constante c ist.

Um dies noch näher zu erörtern, wollen wir $P_p = n\sqrt{1+p^2}$ voraussetzen, so daß also die gegebene Differential-Gleichung 1′.) eigentlich diese ist

1″) $$y = x \cdot \partial y_x + n\sqrt{1+\partial y_x{}^2}.$$

Dann geht die Gleichung 5′.) über in

2″) $$y = cx + n\sqrt{1+c^2},$$

welche das Integral der 1″.) ist.

§. 41.

Integrations-Methoden für Differential-Gleichungen der zweiten und höhern Ordnungen.

Bei den Differential-Gleichungen der 2ten und höhern Ordnungen versucht man dieselben Integrations-Methoden, welche für die der ersten Ordnung (im vorstehenden §. 40.) mitgetheilt worden sind. Wir wollen aber in dem Folgenden vorzugsweise die Gleichungen der 2ten Ordnung im Auge behalten, welche man auf Null bringt, und sie so einrichtet, daß $\partial^2 y_x$ nur in einem isolirten Gliede von der Form $P \cdot \partial^2 y_x$ vorkommt, wo P eine Funktion von x, y und ∂y_x ist.

I. Erstens also versucht man, die Funktion, welche $= 0$ ist, nach Anleitung des §. 35.) direkt zu integriren. Gelingt

dies, so setzt man das Integral einer willkührlichen Constante gleich, und man hat die gesuchte Integral-Gleichung.

So findet sich, um das Beispiel des §. 20.) noch einmal zu nehmen, von der Gleichung

$$\frac{1}{y}\cdot\partial^2 y_x - \frac{1}{y^2}\cdot\partial y_x^{\,2} + x\cdot\partial y_x + y + b^x = 0$$

das Integral sogleich wie folgt:

$$\frac{\partial y_x}{y} + xy + \frac{b^x}{\log b} = c,$$

oder

$$\partial y_x + xy^2 + \left(\frac{b^x}{\log b} - c\right)y = 0.$$

Dies ist ein erstes Integral der gegebenen Differential-Gleichung der 2ten Ordnung, welches noch einmal integrirt werden müßte, wenn man ein Ur-Integral (mit den beiden willkührlichen Constanten) haben wollte.

II. Zweitens, wenn dies mislingt, in so fern die Funktion zur Linken der auf Null gebrachten Gleichung nicht integrabel ist, könnte man wieder suchen, dieselbe mittelst eines integrirenden Faktors integrabel zu machen. Diesen Faktor wird man freilich meist nur durch glückliche Versuche ausfindig machen können, obgleich ein solcher (wie sich auch hier wieder auf analoge Weise wie früher, zeigen läßt) immer existirt.

Wäre z. B. die vorstehende Differential-Gleichung so umgeändert gewesen, daß sie keine angezeigten Divisionen mehr enthielt, wäre sie nämlich so gegeben gewesen:

$$y\cdot\partial^2 y_x - \partial y_x^{\,2} + xy^2\cdot\partial y_x + y^3 + b^x y^2 = 0,$$

so hätte man sie vorher mit $\frac{1}{y^2}$ multipliciren müssen, um die neue Gleichung so zu erhalten, daß die eine Seite derselben als Differential-Funktion integrabel ist.

Ist aber eine Gleichung der 2ten Ordnung gegeben bloß zwischen y und $\partial^2 y_x$, so löse man solche algebraisch nach $\partial^2 y_x$ auf, so daß man erhält

1) $$\partial^2 y_x = Y_y;$$

dann wird sie allemal mittelst des integrirenden Faktors ∂y_x integrabel. Sie geht nämlich dann über in

$$\partial y_x \cdot \partial^2 y_x = Y_y \cdot \partial y_x \quad \text{oder} \quad \partial y_x \cdot \partial^2 y_x - Y_y \cdot \partial y_x = 0,$$

und giebt sogleich, wenn man links und rechts das Integral nach allem x nimmt,

$$\tfrac{1}{2}\partial y_x^2 = \int Y_y \cdot dy + c, \quad \text{oder} \quad \tfrac{1}{2}\partial y_x^2 - \int Y_y \cdot dy = c\ ^*).$$

Integrirt man also Y nach y, und findet man irgend ein besonderes Integral f_y, so ist die hier gesuchte Integral-Gleichung die nachstehende

2) $$\partial y_x^2 = 2f_y + c\ ^{**}).$$

Ist z. B. gegeben die Gleichung

$$\partial^2 y_x \cdot \sqrt{ay} = 1,$$

so hat man zunächst

$$\partial y_x \cdot \partial^2 y_x = \frac{1}{\sqrt{ay}} \cdot \partial y_x;$$

dann, wenn nach x integrirt wird,

$$\tfrac{1}{2}\partial y_x^2 = \int \frac{1}{\sqrt{ay}} \cdot dy = 2\sqrt{\frac{y}{a}} + c,$$

oder

$$\partial y_x^2 = 4\sqrt{\left(\frac{y}{a}\right)} + c = \frac{4}{a}\sqrt{ay} + c,$$

dann

$$\partial x_y = \frac{1}{\sqrt{c + \frac{4}{\sqrt{a}} \cdot \sqrt{y}}},$$

oder auch

---

*) Setzt man $\partial y_x = p$, so ist $\partial^2 y_x = \partial p_x$ und $\partial y_x \cdot \partial^2 y_x = p \cdot \partial p_x$. Nun ist aber (nach §. 4. N. 4.) $\int p \cdot \partial p_x \cdot dx = \int p \cdot dp = \frac{1}{2}p^2$; folglich etc. etc.

**) Diese Gleichung kann man sogleich (nach §. 40.) wieder integriren, weil sie außer ∂y_x bloß noch y enthält. Man setzt nämlich $\frac{1}{\partial x_y}$ statt ∂y_x, löst sie nach ∂x_y algebraisch auf, so daß man erhält

$$\partial x_y = \frac{1}{\sqrt{c + 2f_y}}$$

und man hat dann als Ur-Integral

$$x = \int \frac{1}{\sqrt{c + 2f_y}} \cdot dy + c'.$$

$$\partial x_y = \frac{\frac{1}{2}\sqrt[4]{a}}{\sqrt{c+\sqrt{y}}} \quad \text{d. h.} \quad x = \tfrac{1}{2}\sqrt[4]{a}\int \frac{1}{\sqrt{c+\sqrt{y}}}\cdot dy,$$

indem man der willkührlichen Constante immer eine andere Form giebt, so nämlich, daß die Ausdrücke am elegantesten werden.

Um übrigens die noch angezeigte Integration auszuführen, setzt man

$$c+\sqrt{y} = z, \quad \text{also} \quad y = (z-c)^2, \quad \text{also} \quad dy = 2(z-c)dz;$$

und man erhält

$$\int \frac{1}{\sqrt{c+\sqrt{y}}}\cdot dy = 2\int \frac{z-c}{z^{\frac{1}{2}}}\cdot dz = \tfrac{4}{5}z^{\frac{3}{2}} - 4cz^{\frac{1}{2}} + c'$$

$$= [\tfrac{4}{5}(c+\sqrt{y}) - 4c]\cdot\sqrt{c+\sqrt{y}} + c'.$$

Also hat man zuletzt

$$x = \tfrac{2}{5}\sqrt[4]{a}\cdot(-2c+\sqrt{y})\cdot\sqrt{c+\sqrt{y}} + c';$$

und dieses ist das Ur-Integral der gegebenen Differential-Gleichung der zweiten Ordnung $\partial^2 y_x \cdot \sqrt{ay} = 1$, und solches hat die beiden willkührlichen Constanten c und c'.

Hat eine Gleichung der zweiten Ordnung kein y, sondern nur $\partial^2 y_x$, ∂y_x und x, so kann man es versuchen und (nach I. Bd. §. 155.) $\frac{1}{\partial x_y}$ statt ∂y_x, so wie noch $-\frac{\partial^2 x_y}{\partial x_y{}^3}$ statt $\partial^2 y_x$ setzen, weil es nicht unmöglich ist, daß dadurch aus der neuen Gleichung die Ableitung ∂x_y ganz herausfällt, und nur eine Gleichung zwischen $\partial^2 x_y$ und x erscheint. — Ereignete sich dies, so würde man dann derselben die Form

$$\partial^2 x_y = X_x \quad \text{und} \quad \partial x_y \cdot \partial^2 x_y = X_x \cdot \partial x_y$$

geben, dann links und rechts die Integrale nach y nehmen, und

$$\tfrac{1}{2}\partial x_y{}^2 = \int X_x \cdot dx + c = f_x + c$$

erhalten; woraus hernach noch

$$\partial y_x = \frac{1}{\sqrt{c+2f_x}} \quad \text{und} \quad y = \int \frac{1}{\sqrt{c+2f_x}}\cdot dx + c'$$

sich ergeben würde.

III. Drittens könnte man bei den Gleichungen der zweiten Ordnung auch eine Art Trennung der Veränderlichen versuchen, welche jedoch in sehr seltenen Fällen nur möglich werden wird.

Z. B. das Integral der Gleichung

$$3x^4 + y \cdot \partial y_x + \partial^2 y_x = 0$$

wird sogleich gefunden, indem man jedes Glied integrirt. Man erhält

$$\tfrac{3}{5}x^5 + \tfrac{1}{2}y^2 + \partial y_x = c.$$

Diese letztere Gleichung ist aber die im §. 40. IV. D.) behandelte Gleichung des Riccati (d. h. ein besonderer Fall davon).

IV. Viertens muß man suchen durch Einführung neuer Veränderlichen die gegebene Gleichung der zweiten oder höhern Ordnung integrabel zu machen. — Hier sind namentlich die folgenden besonderen Fälle bemerkenswerth.

A. Hat eine Differential-Gleichung der n^{ten} Ordnung nicht selbst y, sondern bloß x und ∂y_x, $\partial^2 y_x \cdots \partial^n y_x$, so setzt man

$$\partial y_x = p,$$

also ∂p_x statt $\partial^2 y_x$, $\partial^2 p_x$ statt $\partial^3 y_x$, $\cdots$ $\partial^{n-1} p_x$ statt $\partial^n y_x$, und die gegebene Gleichung enthält dann bloß x, p, ∂p_x, $\cdots$ bis $\partial^{n-1} p_x$, ist also eine Differential-Gleichung der nächst niedrigern Ordnung. Kann solche integrirt werden, so daß man p in x oder x in p ausgedrückt erhält, so hat man aus $\partial y_x = p$, sogleich entweder

$$y = \int p_x \cdot dx, \qquad \text{oder} \qquad y = px - \int x_p \cdot dp.$$

Ist z. B. zu integriren die Gleichung

$$\frac{(1+\partial y_x^2)^{\frac{3}{2}}}{\partial^2 y_x} = f_x \text{ *)},$$

wo f_x eine beliebige Funktion von x ist, so hat man sogleich, wenn $\partial y_x = p$ gesetzt wird, die Gleichung

$$(1+p^2)^{\frac{3}{2}} = f_x \cdot \partial p_x,$$

in welcher die Veränderlichen p und x getrennt werden können, so daß man erhält

$$\frac{1}{f_x} = \frac{1}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \partial p_x,$$

---

*) Zu dieser Gleichung würde man z. B. geführt, wenn man die Gleichung $y = y_x$ der ebenen Kurve suchte, deren Krümmungs-Halbmesser an jeder durch den Abscissen-Werth x gegebenen Stelle, eine gegebene Funktion f_x von x seyn soll.

also $$\int \frac{1}{f_x} \cdot dx = \int \frac{1}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot dp = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}},$$

oder, wenn $\int \frac{1}{f_x} . dx = F_x$ gefunden wird,

$$F_x + c = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \quad \text{oder} \quad p = \frac{F_x + c}{\sqrt{1-(F_x+c)^2}};$$

also $$y = \int \frac{F_x + c}{\sqrt{1-(F_x+c)^2}} \cdot dx + c'.$$

Auf diesen Fall bringt man auch noch die Gleichung zurück, welche zwar x und y zugleich hat, welche aber hinsichtlich der Ausdrücke $y, \partial y_x, \partial^2 y_x, \partial^3 y_x, \cdots \partial^n y_x$ homogen ist, sobald man $y = e^u$ setzt. — Es bekommt nämlich dann jedes Glied den Faktor e^u, die ganze Gleichung kann damit wegdividirt werden, und die neu entstehende Differential-Gleichung hat u selbst nicht, sondern nur x, $\partial u_x, \partial^2 u_x, \cdots$ bis zu $\partial^n u_x$ hin.

Man kann dies namentlich auch bei denjenigen Gleichungen anwenden, welche nach $y, \partial y_x, \cdots \partial^n y_x$ homogen und von der ersten Dimension sind, und von denen einige (im §. 42.) unter dem Namen der lineären Gleichungen behandelt werden.

B. Hat eine Differential-Gleichung der n^{ten} Ordnung nicht x, sondern nur y und $\partial y_x, \partial^2 y_x, \cdots \partial^{n-1} y_x$, so ist dies derselbe Fall A.), sobald man (nach I. Bd. §. 155.) $\frac{1}{\partial x_y}$ statt ∂y_x, ferner $-\frac{\partial^2 x_y}{\partial x_y^3}$ statt $\partial^2 y_x$ u. s. w. f. substituirt, weil man dann eine Gleichung erhält, welche bloß y und ∂x_y, $\partial^2 x_y, \cdots \partial^n x_y$ hat.

Hätte man z. B. die früher schon behandelte Gleichung

$$\partial^2 y_x = Y_y$$

zu integriren auf diesem Wege, so würde man erhalten

$$\partial^2 x_y + Y_y \cdot \partial x_y^3 = 0.$$

Setzte man nun

$$\partial x_y = q, \quad \text{also} \quad \partial^2 x_y = \partial q_y,$$

so würde diese Gleichung übergehen in

$$\partial q_y + Y_y \cdot q^3 = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{1}{q^3} \cdot \partial q_y + Y_y = 0;$$

und diese, integrirt, giebt

$$-\frac{1}{2q^2} + \int Y_y \cdot dy = c,$$

oder, wenn $\int Y_y \cdot dy = f_y$ seyn sollte,

$$\partial x_y = \frac{1}{\sqrt{2f_y + c}},$$

genau wie in II.).

Man könnte auch $\partial y_x = p$, also $\partial x_y = \frac{1}{p}$ setzen; dann würde $\partial^2 y_x = \partial p_x$ werden, und die Gleichung $\partial^2 y_x = Y_y$ würde in $\partial p_x = Y_y$ übergehen. Dann müßte man aber statt ∂p_x jetzt ∂p_y einführen, mittelst der Gleichung $\partial p_x = \partial p_y \cdot \partial y_x = p \cdot \partial p_y$. Die gegebene Differential-Gleichung würde dann werden

$$p \cdot \partial p_y = Y_y,$$

und diese, integrirt, würde geben

$$\tfrac{1}{2} p^2 = \int Y_y \cdot dy = f_y + c;$$

u. s. w. f.

Hat man aber $y = y_p$ oder $p = p_y$ gefunden, so hat man zuletzt aus $\partial x_y = \frac{1}{p}$, $x = \int \frac{1}{p_y} \cdot dy$ oder $x = \frac{y}{p} + \int \frac{y}{p^2} \cdot dp$ (indem man nämlich theilweise integrirt). — Dieses letztere Verfahren ist jedoch nur bei Gleichungen der zweiten Ordnung anwendbar.

C. Hat man eine Gleichung bloß zwischen $\partial^{n-1} y_x$ und $\partial^n y_x$, so wird man

$$\partial^{n-1} y_x = p, \quad \text{also} \quad \partial^n y_x = \partial p_x$$

setzen, und sogleich eine Gleichung zwischen p und ∂p_x, oder, in so fern $\frac{1}{\partial x_p}$ statt ∂p_x geschrieben werden kann, eine Gleichung zwischen p und ∂x_p haben, welche $\partial x_p = P_p$, also $x = \int P \cdot dp + c$ liefert. Hat man aber p in x gefunden, so liefert die Gleichung $\partial^{n-1} y_x = p_x$ sogleich

$$\partial^{n-2} y_x = \int p_x \cdot dx + c_1; \quad \partial^{n-3} y_x = \int (\int p_x \cdot dx) \cdot dx + c_1 x + c_2,$$

u. s. w. f.; so daß man zuletzt y selbst in x ausgedrückt hat. —

Würde man jedoch eher x in p, als p in x ausgedrückt finden können, so würde man aus $\partial^{n-1} y_x = p$,

$$\partial^{n-2} y_x = \int p \cdot dx = \int p \cdot \partial x_p \cdot dp = \int pP \cdot dp$$

erhalten; dann könnte man diese Gleichung wiederholt auf dieselbe Weise behandeln, um zuletzt eine Gleichung zwischen p und y zu erhalten, welche in Verbindung mit $x = x_p$, durch Elimination von p, das Ur-Integral mit den n willkührlichen Constanten liefern würde.

Ist $n = 2$, d. h. ist die gegebene Differential-Gleichung bloß von der zweiten Ordnung, so hätte man zunächst

$$1) \qquad x = \int P_p \cdot dp + c.$$

und dann sogleich

$$2) \qquad y = \int pP_p \cdot dp + c'.$$

Eliminirt man dann p aus 1.) und 2.), so erhält man y in x mit den beiden willkührlichen Constanten c und c'.

Wäre z. B. zu integriren die Gleichung

$$\frac{(1 + \partial y_x^2)^{\frac{3}{2}}}{\partial^2 y_x} = a \text{ *)},$$

so würde man

$$\partial y_x = p$$

setzen, und dann haben

$$(1 + p^2)^{\frac{3}{2}} = a \cdot \partial p_x \quad \text{oder} \quad 1 = \frac{a}{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \partial p_x.$$

Diese Gleichung, integrirt, giebt nun sogleich

$$x = \int \frac{a}{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot dp = \frac{ap}{\sqrt{1 + p^2}} + c,$$

und

$$y = \int \frac{ap}{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot dp = -\frac{a}{\sqrt{1 + p^2}} + c'.$$

Eliminirt man nun aus diesen beiden Gleichungen den Veränderlichen p, so erhält man

---

*) Da der Ausdruck zur Linken der Krümmungs-Halbmesser für eine durch die Gleichung $y = y_x$ gegebene Kurve ist, so würde man zu dieser Gleichung geführt, wenn man die Kurve suchte, deren Krümmungs-Halbmesser an jeder Stelle constant und $= a$ ist.

$$(y-c')^2+(x-c)^2=a^2$$

als das gesuchte Ur-Integral *).

D. Hat man eine Gleichung bloß zwischen $\partial^{n-2}y_x$ und $\partial^n y_x$, so wird man

$$\partial^{n-2}y_x=q, \qquad \text{also} \qquad \partial^n y_x=\partial^2 q_x$$

setzen, und man hat dann eine Gleichung zwischen q und $\partial^2 q_x$ etwa

$$\partial^2 q_x=Q_q.$$

Diese Gleichung läßt sich aber entweder dadurch integriren, daß man sie (nach II.) mit dem integrirenden Faktor ∂q_x multiplicirt und integrirt, wodurch man sogleich

$$\partial q_x{}^2=2\int Q_q\cdot dq+c,$$

also

$$x=\int\frac{1}{\sqrt{2\int Q\cdot dq+c}}\cdot dq+c';$$

erhält; — oder indem man das Verfahren anwendet, welches für dieselbe Gleichung in B.) ausgeführt sich findet.

Hat man auf diesem Wege $x=x_q$ oder $q=q_x$ gefunden, so giebt die Gleichung $\partial^{n-2}y_x=q$ sogleich

$$\partial^{n-3}y_x=\int q_x\cdot dx, \qquad \text{oder} \qquad =\int q\cdot\partial x_q\cdot dq;$$

u. s. w. f.

Anmerkung. Dies ist ohngefähr das Wichtigste, was sich über die Integration der Differential-Gleichungen der 2ten und höhern Ordnung in endlicher Form, sagen läßt; und obgleich es fast so viel als nichts ist, so kann man doch diese Methoden in mehreren Fällen in den Anwendungen auf Physik, Astronomie etc. etc. mit Erfolg benutzen.

---

*) Stellen x und y Koordinaten-Werthe vor, so ist dies die Gleichung eines Kreises, dessen Halbmesser $=a$ ist, und dessen Mittelpunkt durch die willkührlichen Constanten c und c′ bestimmt ist.

Man kann nun diese Constanten c und c′ so bestimmen, daß die Kreislinie noch zweien andern Bedingungen genügt, z. B. noch durch zwei gegebene Punkte hindurchgeht.

§. 42.

Integration der lineären Gleichungen.

Wir kommen jetzt zu einer Integrations-Methode, welche für Gleichungen aller Ordnungen versucht werden kann; nämlich zur „Methode der unbestimmten Koefficienten". — Wenn man nämlich die Form des Integrals aus irgend Gründen vermuthet, ahnet, voraussieht, oder auf's Geradewohl voraussetzt, so braucht man nur noch die verschiedenen Koefficienten dergestalt zu bestimmen: 1) daß der gegebenen Differential-Gleichung genügt wird, und 2) daß das Integral die nöthige Anzahl unbestimmter, sogenannter willkührlicher Constanten enthält; dann hat man das allgemeine Integral.

Als Beispiel der Anwendung dieser Methode nehmen wir die lineären Gleichungen, d. h. die Gleichungen von der Form

$$a) \quad \partial y_x + P_x \cdot y = \varphi_x;$$

$$b) \quad \partial^2 y_x + P_x \cdot \partial y_x + Q_x \cdot y = \varphi_x;$$

$$c) \quad \partial^3 y_x + P_x \cdot \partial^2 y_x + Q_x \cdot \partial y_x + R_x \cdot y = \varphi_x;$$

u. s. w. f.; wo die Koefficienten P, Q, R, S etc. etc. und φ bloß x, aber nicht y enthalten.

Diese lineären Gleichungen heißen reducirte, so oft $\varphi_x = 0$ ist; außerdem werden sie vollständige genannt.

A. Die lineäre Gleichung der ersten Ordnung, nämlich

$$1) \quad \partial y_x + P_x \cdot y = \varphi_x$$

ist bereits früher (im §. 40. IV. C.) integrirt worden, und man hat ihr Integral so gefunden

$$2) \quad y = e^{-\int P \cdot dx} \cdot [\int \varphi_x \cdot e^{\int P \cdot dx} \cdot dx + C].$$

Ist jedoch der Koefficient P constant (nach x), so daß $\int P \cdot dx = Px$ ist, so nimmt dieses Integral die Form an

$$3) \quad y = e^{-Px} \cdot [\int \varphi_x \cdot e^{Px} \cdot dx + C],$$

und reducirt sich bloß auf

$$4) \quad y = C \cdot e^{-Px},$$

wenn, außer P constant, noch $\varphi_x = 0$ seyn sollte. — Ist also zwar P constant, aber φ_x nicht Null, so hat das Integral noch immer dieselbe Form $y = e^{-Px} \cdot C$, nur daß statt der Constante C jetzt $\int \varphi_x \cdot e^{Px} \cdot dx + C$ zu stehen kommt.

B. Dadurch ist aber für die Form des Integrals der lineären Gleichungen der zweiten und höhern Ordnungen, jedoch mit constanten Koefficienten, der Weg gezeigt. Wir stehen hier nämlich davon ab, diese lineären Gleichungen b.), c.) etc. etc. in dem Falle zu integriren, wo die Koefficienten P, Q, R etc. etc. wirklich Funktionen von x sind, sondern wollen nur den Fall betrachten, der in den Anwendungen auf Physik, Astronomie etc. etc. am gewöhnlichsten vorkommt, — den Fall nämlich, in welchem P, Q, R etc. etc. völlig constant sind.

Ist aber die reducirte lineäre Gleichung der zweiten Ordnung

1) $$\partial^2 y_x + P \cdot \partial y_x + Q \cdot y = 0$$

mit constanten Koefficienten P und Q zu integriren, so setzt man zunächst

2) $y = C \cdot e^{mx}$, also $\partial y_x = Cm \cdot e^{mx}$, $\partial^2 y_x = Cm^2 \cdot e^{mx}$; und die Differential-Gleichung 1.) geht, wenn man statt y, ∂y_x und $\partial^2 y_x$ diese Werthe substituirt, in die algebraische Gleichung

3) $$m^2 + Pm + Q = 0;$$

über, und diese wird identisch, sobald man statt m einen der beiden Werthe m_1 oder m_2 setzt, der aus der Auflösung dieser quadratischen Gleichung für m hervorgeht. Also kann man

4) $$y = C_1 \cdot e^{m_1 x} + C_2 \cdot e^{m_2 x}$$

versuchen, wo C_1 und C_2 zwei willkührliche Constanten sind. — Und in der That genügt dieser Werth von y aus 4.) der gegebenen Differential-Gleichung 1.) und hat auch zwei willkührliche Constanten; folglich ist er das allgemeine Ur-Integral der 1.).

Sind die beiden Werthe m_1 und m_2 einander gleich und durch m bezeichnet, so würde die Gleichung 4.) in

5) $y = (C_1 + C_2)e^{mx} = C \cdot e^{mx}$

übergehen, und nicht mehr zwei Constanten enthalten. In diesem besonderen Falle zeigt sich aber das allgemeine Integral so:

6) $y = e^{mx} \cdot (a + bx)$,

wo a und b die beiden eingehenden willkührlichen Constanten vorstellen *).

Sind die beiden Werthe m_1 und m_2 imaginär, der eine also $= p + qi$, der andere dann $= p - qi$, wo p und q dieselben Werthe vorstellen, so geht

$$y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x}$$

vermöge der Formeln I. Bd. §. 70. III. IV.) über in

7) $y = e^{px} \cdot (a \cos qx + b \sin qx)$,

wenn man statt $C_1 + C_2$ lieber a, und statt $i(C_1 - C_2)$ lieber b schreibt, so daß a und b die beiden willkührlichen Constanten vorstellen. — Diesem Integral 7.) kann man aber auch diese Form geben

8) $y = Ce^{px} \cdot \sin(qx + \xi)$ oder $y = Ce^{px} \cdot \cos(qx + \xi)$,

wo jetzt C und ξ die beiden willkührlichen Constanten sind, in so fern man nämlich (in 7.) entweder

$$a = C \cdot \sin \xi \quad \text{und} \quad b = C \cdot \cos \xi$$

oder

$$a = C \cdot \cos \xi \quad \text{und} \quad b = -C \cdot \sin \xi$$

nehmen kann, sobald C und ξ jedesmal willkührlich constant gedacht werden.

So viel vom Integral der reducirten lineären Gleichung der zweiten Ordnung mit constanten Koefficienten P und Q. —

---

*) Man findet dies, wenn man anfänglich $m_1 = m$ und $m_2 = m + h$ setzt, dann $e^{m_2 x}$ in $e^{mx} \cdot e^{hx}$, d. h. in $e^{mx}\left(1 + hx + \frac{h^2x^2}{2!} + \cdots\right)$ verwandelt, dadurch die Gleichung 5.) in

$$y = e^{mx}\left(C_1 + C_2 + C_2 h \cdot x + C_2 \cdot \frac{h^2x^2}{2!} + \cdots\right)$$

umformt, dann a statt $C_1 + C_2$ und b statt $C_2 h$ setzt, zuletzt aber erst $h = 0$ nimmt.

Wären aber diese Koefficienten P und Q nicht constant, sondern Funktionen von x, so würde doch das Integral der reducirten Gleichung

$$1') \qquad \partial^2 y_x + P \cdot \partial y_x + Q \cdot y = 0$$

die Form

$$2') \qquad y = a \cdot R_x + b \cdot S_x$$

annehmen *).

---

*) Sucht man nämlich den integrirenden Faktor z der Gleichung 1'.), so nimmt solche die Form

$$z \cdot \partial^2 y_x + Pz \cdot \partial y_x + Qzy = 0$$

an. Integrirt man aber jedes Glied dieser Gleichung, und zwar die beiden erstern theilweise, so erhält man

$$\int z \cdot \partial^2 y_x \cdot dx = z \cdot \partial y_x - \int \partial z_x \cdot \partial y_x \cdot dx,$$

oder, indem man hier zur Rechten noch einmal theilweise integrirt,

$$\int z \cdot \partial^2 y_x \cdot dx = z \cdot \partial y_x - \partial z_x \cdot y + \int y \cdot \partial^2 z_x \cdot dz.$$

Ferner

$$\int zP \cdot \partial y_x \cdot dx = zPy - \int y \cdot \partial (zP)_x \cdot dx,$$

$$\int zQy \cdot dx = \int y \cdot zQ \cdot dx.$$

Addirt man aber diese drei letztern Gleichungen, und nimmt man statt z eine solche Funktion bloß von x, daß rechts die Summe der drei unter dem Integral-Zeichen stehenden Ausdrücke der Null gleich wird, so erhält man als Integral der Gleichung 1'.) sogleich

$$z \cdot \partial y_x - (\partial z_x - zP)y = c$$

oder

$$\partial y_x - \frac{\partial z_x - zP}{z_x} \cdot y = \frac{c}{z_x}.$$

Und da diese Gleichung lineär und von der ersten Ordnung ist, so ist ihr Integral bereits gefunden. — Diese Integrations-Methode setzt voraus, daß es gelingt, Versuchsweise einen Werth z_x zu finden, welcher der Gleichung

$$\partial^2 z_x - \partial (zP)_x + zQ = 0$$

genügt.

Findet man dagegen versuchsweise eine Funktion von x, welche statt y gesetzt der Gleichung

$$\partial^2 y_x + P \cdot \partial y_x + Q \cdot y = 0$$

genügt, so kann man solche statt R_x nehmen; und kann man dann noch eine zweite Funktion von x finden, von der erstern R_x und auch von $C_1 R_x$ verschieden, welche dieselbe Eigenschaft hat, so kann man solche statt S_x nehmen; und $y = C_1 R_x + C_2 S_x$ ist dann das gesuchte allgemeine Ur-Integral der gegebenen Differential-Gleichung.

So oft es aber gelingt, die reducirte lineäre Gleichung der zweiten Ordnung zu integriren, d. h. von der Gleichung 1'.) das Integral 2'.) herzustellen, so oft kann man das Integral der vollständigen lineären Gleichung der zweiten Ordnung, nämlich der Gleichung

3') $$\partial^2 y_x + P \cdot \partial y_x + Q \cdot y = \varphi_x,$$

ohne weiteres durch folgendes Verfahren finden, welches wir, wie so vieles, dem Lagrange verdanken.

Man nimmt nämlich auch jetzt noch

4') $$y = a \cdot R_x + b \cdot S_x,$$

nur daß man sich a und b als noch zu suchende Funktionen von x denkt, während R_x und S_x die in 2'.) bereits gefundenen, also nun bekannten Funktionen von x vorstellen. Differenziirt man aber diese Gleichung 4'.), so erhält man

5') $$\partial y_x = (\partial y_x) + [R_x \cdot \partial a_x + S_x \cdot \partial b_x],$$

wenn (∂y_x) die Ableitung desselben y (in 4'.) bedeutet, die man unter der Voraussetzung erhält, daß a und b constant sind.

Da nun zwei Funktionen a_x und b_x gesucht werden, und nur der einzigen Gleichung 3'.) zu genügen ist, so kann man noch eine beliebige Annahme machen; und wir setzen daher den in 5'.) zur Rechten in den eckigen Klammern befindlichen Theil der Null gleich. Dies giebt

6') $$R_x \cdot \partial a_x + S_x \cdot \partial b_x = 0$$

und

7') $$\partial y_x = (\partial y_x) \quad \text{d. h.} \quad \partial y_x = a \cdot \partial R_x + b \cdot \partial S_x.$$

Differenziirt man aber diese Gleichung 7'.) nun noch einmal, so ergiebt sich

8') $$\partial^2 y_x = (\partial^2 y_x) + \partial R_x \cdot \partial a_x + \partial S_x \cdot \partial b_x,$$

wenn $(\partial^2 y_x)$ die zweite Ableitung desselben y (in 4'.) bedeutet, die man unter der Voraussetzung erhält, daß a und b constant sind. Substituirt man aber diese Werthe aus 4'.), 7'.) und 8'.) statt y, ∂y_x und $\partial^2 y_x$ in die gegebene Differential-Gleichung

1′.), so wird die Gleichung, wegen $(\partial^2 y_x) + P\cdot(\partial y_x) + Q\cdot y = 0$, die nachstehende, nämlich:

9′) $$\partial R_x\cdot\partial a_x + \partial S_x\cdot\partial b_x = \varphi_x.$$

Die beiden Gleichungen 6′.) und 9′.) geben nun auf algebraischem Wege ∂a_x und ∂b_x in x ausgedrückt, und wenn man diese Funktionen von x noch integrirt, so hat man a_x und b_x, so wie sie gesucht werden, während jede dieser letztern beiden Funktionen von x noch eine willkührliche Constante in sich aufnimmt, so daß das Integral 4′.) auch zwei willkührliche Constanten in sich schließt, und daher wiederum das allgemeine Integral ist.

Sind die Koefficienten P und Q constant, so ist, wenn die beiden Werthe m_1 und m_2 von m, welche der quadratischen Gleichung

$$m^2 + Pm + Q = 0$$

genügen, reell und ungleich sind,

$$R_x = e^{m_1 x} \quad \text{und} \quad S_x = e^{m_2 x}$$

zu nehmen. Sind aber die beiden Werthe m_1 und m_2 einander gleich und gleich m, so muß

$$R_x = e^{mx} \quad \text{und} \quad S_x = x\cdot e^{mx}$$

genommen werden. Und sind die beiden Werthe m_1 und m_2 imaginär und $= p \pm qi$, so muß man

$$R_x = e^{px}\cdot \mathit{cos}\, qx \quad \text{und} \quad S_x = e^{px}\cdot \mathit{sin}\, qx$$

nehmen.

C. Betrachten wir noch die lineären Gleichungen der dritten Ordnung mit constanten Koefficienten.

Hat man zuerst die reducirte Gleichung

1) $$\partial^3 y_x + P\cdot\partial^2 y_x + Q\cdot\partial y_x + Ry = 0,$$

so setzt man

$$y = C\cdot e^{mx},$$

also

$$\partial y_x = Cm\cdot e^{mx}, \quad \partial^2 y_x = Cm^2\cdot e^{mx}, \quad \partial^3 y_x = Cm^3\cdot e^{mx},$$

und die gegebene Differential-Gleichung 1.) geht, wenn man diese Werthe statt y, ∂y_x, $\partial^2 y_x$ und $\partial^3 y_x$ substituirt, über in die algebraische Gleichung des dritten Grades

2) $$m^3 + Pm^2 + Qm + R = 0.$$

Löst man diese nach m algebraisch auf, und sind m_1, m_2, m_3 die drei Werthe von m, so sind $C_1 e^{m_1 x}$, $C_2 e^{m_2 x}$, $C_3 e^{m_3 x}$ drei besondere Ur-Integrale der 1.); dagegen weißt sich noch

3) $$y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x} + C_3 e^{m_3 x}$$

als das allgemeine Ur-Integral derselben Differential-Gleichung aus, einmal, weil dieser Werth von y die Gleichung 1.) wirklich identisch macht, und dann, weil solcher drei willkührliche Constanten enthält.

Sind zwei der Werthe z. B. m_1 und m_2, einander gleich, so wird das Integral so

4) $$y = e^{m_1 x}(a + bx) + C_3 e^{m_3 x},$$

wo a, b und C_3 die drei willkührlichen Constanten sind.

Sind aber alle drei Werthe von m einander gleich und durch m vorgestellt, so ist das allgemeine Integral so

5) $$y = e^{mx}(a + bx + cx^2),$$

wo die drei willkührlichen Constanten durch a, b und c ausgedrückt werden.

Sind endlich zwei der drei Werthe von m imaginär etwa $m_1 = p + qi$ und $m_2 = p - qi$, so nimmt das Integral auch noch die Form

6) $$y = e^{px}(a \cdot \cos qx + b \cdot \sin qx) + C_3 e^{m_3 x},$$

oder auch die Form

7) $$y = a \cdot e^{px} \cdot \cos(qx + \xi) + C_3 e^{m_3 x},$$

oder endlich auch die Form

8) $$y = a \cdot e^{px} \cdot \sin(qx + \xi) + C_3 e^{m_3 x}$$

an.

So weit die Integration der reducirten Gleichung mit constanten Koefficienten. Könnte man letztere aber auch für den Fall integriren, daß P, Q, R wirklich Funktionen von x sind, so würde ihr Integral doch immer die Form

1') $$y = aS_x + bT_x + cU_x$$

anneh-

annehmen, wie wenn P, Q, R constant sind, und solches würde also die reducirte Gleichung

$$2') \qquad \partial^3 y_x + P\cdot\partial^2 y_x + Q\cdot\partial y_x + Ry = 0$$

identisch machen.

Ist aber dann die vollständige Gleichung der dritten Ordnung

$$3') \qquad \partial^3 y_x + P\cdot\partial^2 y_x + Q\cdot\partial y_x + Ry = \varphi_x$$

zu integriren, so kann man sogleich wieder die Methode des Lagrange anwenden, welche wir bei den Gleichungen der zweiten Ordnung bereits beschrieben haben, und welche den Namen der „Methode der Variation der Constanten" erhalten hat. — Man nimmt nämlich an, daß das Integral der Gleichung 3'.) dieselbe Form 1'.) hat, wie das Integral der reducirten Gleichung 2'.), nur daß a, b, c noch Funktionen von x sind, welche gesucht werden müssen.

Zu diesem Behufe differenziirt man die Gleichung 1'.) einmal, setzt aber den Theil der von der Veränderlichkeit der a, b, c herrührt, der Null gleich; dann differenziirt man die neue Gleichung noch einmal, und setzt wieder den Theil, der von der Veränderlichkeit der a, b, c herrührt, der Null gleich. Dann sind y, ∂y_x und $\partial^2 y_x$ jetzt der Form nach genau dieselben, wie wenn a, b, c constant wären, während man außerdem noch zur Bestimmung von a, b, c angenommen hat die beiden Gleichungen

$$4') \qquad S_x\cdot\partial a_x + T_x\cdot\partial b_x + U_x\cdot\partial c_x = 0$$

und

$$5') \qquad \partial S_x\cdot\partial a_x + \partial T_x\cdot\partial b_x + \partial U_x\cdot\partial c_x = 0,$$

eine Annahme, die man deshalb machen konnte, weil man drei Unbekannte a, b, c hat, die nur einer einzigen, nämlich der Differential-Gleichung 3'.) zu genügen haben. — Differenziirt man aber nun die zuletzt erhaltene Gleichung

$$\partial^2 y_x = a\cdot\partial^2 S_x + b\cdot\partial^2 T_x + c\cdot\partial^2 U_x$$

noch einmal, so erhält man

$$\partial^3 y_x = (\partial^3 y_x) + \partial^2 S_x\cdot\partial a_x + \partial^2 T_x\cdot\partial b_x + \partial^2 U_x\cdot\partial c_x,$$

wo $(\partial^3 y_x)$ diesen dritten Differential-Koefficienten von y vorstellt, unter der Voraussetzung, daß a, b, c constant sind. — Substituirt man nun diese Werthe statt y, ∂y_x, $\partial^2 y_x$ und $\partial^3 y_x$ in die Gleichung 3′.), so geht solche, wegen

$$(\partial^3 y_x) + P\cdot(\partial^2 y_x) + Q\cdot(\partial y_x) + Ry = 0,$$

über in

$$6') \qquad \partial^2 S_x\cdot\partial a_x + \partial^2 T_x\cdot\partial b_x + \partial^2 U_x\cdot\partial c_x = \varphi_x.$$

Aus den drei Gleichungen 4′.), 5′.) und 6′.) läßt sich nun ∂a_x, ∂b_x und ∂c_x auf dem Wege der gemeinen Algebra leicht finden, in x ausgedrückt; und dann darf man diese für ∂a_x, ∂b_x und ∂c_x erhaltenen Funktionen von x nur noch nach x integriren, um die Koefficienten a, b, c in x ausgedrückt zu haben, und jeden noch mit einer willkührlichen Constante, so daß, wenn man diese Werthe statt a, b, c in die Gleichung 1′.) setzt, das allgemeine Ur-Integral der Gleichung

$$\partial^3 y_x + P\cdot\partial^2 y_x + Q\cdot\partial y_x + Ry = \varphi_x$$

mit den drei willkührlichen Constanten wirklich gefunden ist.

Anmerkung. Es ist leicht, das alles auf die lineären Gleichungen der n^{ten} Ordnung auszudehnen.

Hätte man aber die lineäre Gleichung z. B. der dritten Ordnung

$$(a+bx)^3\cdot\partial^3 y_x + (a+bx)^2 P\cdot\partial^2 y_x + (a+bx)Q\cdot\partial y_x + Ry = 0,$$

so könnte man $a+bx = t$, also $\partial y_x = \partial y_t\cdot\partial t_x = b\cdot\partial y_t$, $\partial^2 y_x = b^2\cdot\partial^2 y_t$, $\partial^3 y_x = b^3\cdot\partial^3 y_t$ setzen und die Gleichung würde die Form annehmen

$$b^3t^3\cdot\partial^3 y_t + b^2t^2 P\cdot\partial^2 y_t + btQ\cdot\partial y_t + Ry = 0.$$

Setzte man nun $y = t^m$, also $\partial y_t = mt^{m-1}$, $\partial^2 y_t = m(m-1)t^{m-2}$ und $\partial^3 y_t = m(m-1)(m-2)t^{m-3}$; so würde dieselbe Gleichung übergehen in

$$b^3 m(m-1)(m-2) + b^2 Pm(m-1) + bQm + R = 0.$$

Löst man nun diese nach m kubische Gleichung algebraisch

auf, und sind m_1, m_2, m_3 die drei Werthe von m, welche man daraus erhält, so ist

$$y = C_1(a+bx)^{m_1} + C_2(a+bx)^{m_2} + C_3(a+bx)^{m_3}$$

das vollständige Ur-Integral der gegebenen Differential-Gleichung der dritten Ordnung mit diesen veränderlichen Koefficienten.

§. 43.

Integration von m totalen Differential-Gleichungen zwischen m+1 Veränderlichen.

Sind zwei Gleichungen zwischen drei Veränderlichen t, x und y gegeben, welche auch noch die Ableitungen ∂x_t, ∂y_t, $\partial^2 x_t$, $\partial^2 y_t$ etc. etc. zweier der Veränderlichen nach dem dritten enthalten, so kann man, um daraus x und y selbst als Funktionen von t zu finden, zwei verschiedene Wege betreten.

I. Erstens kann man nämlich es versuchen, jede der beiden Gleichungen direkt zu integriren, ohne vorher einen der Veränderlichen wegzuschaffen, entweder in so fern sie den Bedingungs-Gleichungen der Integrabilität genügen, — wie z. B. die Gleichung

$$T_t + X_x \cdot \partial x_t + Y_y \cdot \partial y_t = 0,$$

welche, integrirt, sogleich

$$\int T \cdot dt + \int X \cdot dx + \int Y \cdot dy = c$$

liefert, — oder, weil sie mittelst eines integrirenden Faktors leicht integrabel gemacht werden kann, wie z. B. die Gleichung

$$\partial x_t \cdot \partial^2 y_t - \partial y_t \cdot \partial^2 x_t = 0,$$

welche, wenn man sie mit $\frac{1}{\partial x_t^2}$ multiplicirt, in

$$\frac{\partial x_t \cdot \partial^2 y_t - \partial y_t \cdot \partial^2 x_t}{\partial x_t^2} = 0$$

übergeht, während der Ausdruck links nun integrabel ist, so daß das Integral dieser Gleichung das nachstehende, nämlich

$$\frac{\partial y_t}{\partial x_t} = c$$

wird.

Sind nun beide gegebene Gleichungen nach ∂x_t und ∂y_t von der ersten Ordnung, und integrirt man jede derselben auf dem so eben beschriebenen Wege, so erhält man sogleich zwei Ur-Gleichungen zwischen x, y und t, aus denen dann auf algebraischem Wege x und y als Funktionen von t (oder t und y als Funktionen von x, oder t und x als Funktionen von y) gefunden werden.

Sind z. B. die beiden Gleichungen zu integriren

$$\begin{cases} 1) & x+y\cdot\partial y_x+z\cdot\partial z_x=0 \\ 2) & m\cdot\partial y_x+n\cdot\partial z_x=1, \end{cases}$$

so giebt die erstere sogleich

$$3) \qquad x^2+y^2+z^2=r^2,$$

wenn man die Constante durch $\frac{1}{2}r^2$ ausdrückt. Die andere Gleichung giebt dagegen, wenn man sie direkt integrirt, sogleich

$$4) \qquad my+nz=x+c.$$

Diese beiden Gleichungen 3.) und 4.) geben nun y und z in x*).

II. Die zweite Methode besteht darin, daß man aus beiden Gleichungen, x und alle Ableitungen von x eliminirt, und dadurch eine Gleichung bloß zwischen zwei Veränderlichen y und t (und ∂y_t, $\partial^2 y_t$, ...) sich verschafft, diese aber dann nach einer der früher beschriebenen Methoden zu integriren versucht.

Das Eliminiren hier, unterscheidet sich aber von dem Eliminiren in der Algebra, bloß dadurch, daß man hier außer x, auch noch alle seine Ableitungen ∂x_t, $\partial^2 x_t$ etc. etc., die in den beiden gegebenen Differential-Gleichungen vorkommen, mit wegschaffen muß, daß man also eine größere Anzahl von Gleichungen braucht, um alles eliminiren zu können. Diese fehlenden Gleichungen verschafft man sich aber dadurch, daß man

---

*) Sind z. B. x, y, z Koordinaten-Werthe, die sich auf drei auf einander senkrechte Axen beziehen, so entspricht die Gleichung 3.) einer Kugel, die Gleichung 4.) dagegen einer Ebene und beide Gleichungen in Verbindung gehören dem Kreise an, der als Durchschnittsfigur dieser Kugel mit dieser Ebene hervorgeht, wenn die Lage der beiden letztern Flächen so ist, daß wirklich ein Durchschnitt statt findet.

jede der beiden gegebenen Differential-Gleichungen noch wiederholt differenziirt. Dadurch erhält man immer neue und neue Paare von Gleichungen, während in jedem neuen Paar ein einziger neuer höherer Differential-Koefficient von x nach t eingeht. Auf diese Weise hat man bald mehr Gleichungen als zu eliminirende Ausdrücke, uud dem Elimininen stehen also keine anderen Hinderniſſe mehr entgegen, als diejenigen, welche die Algebra ſelbſt darbietet.

Es ſeyen z. B. gegeben die beiden Gleichungen

1) $$\partial^2 x_t = -m \cdot \partial y_t,$$

2) $$\partial^2 y_t = -gx - m \cdot \partial x_t;$$

und es ſollen nun ſowohl x als auch alle Ableitungen ∂x_t, $\partial^2 x_t$, etc, etc. eliminirt werden.

Differenziirt man die Gleichung 2.) nach allem t, ſo erhält man

3) $$\partial^3 y_t = -g \cdot \partial x_t - m \cdot \partial^2 x_t.$$

Nun hat man drei Gleichungen, aber auch drei zu eliminirende Ausdrücke, nämlich x, ∂x_t und $\partial^2 x_t$. — Man muß daher jede der beiden Gleichungen 1.) und 3.) noch einmal nach allem t differenziiren; dann erhält man

4) $$\partial^3 x_t = -m \cdot \partial^2 y_t;$$

5) $$\partial^4 y_t = -g \cdot \partial^2 x_t - m \cdot \partial^3 x_t.$$

Nun haben wir fünf Gleichungen, aus denen die vier Ausdrücke x, ∂x_t, $\partial^2 x_t$ und $\partial^3 x_t$ ohne Weiteres (auf algebraiſchem Wege) ſich elimininen laſſen. Man erhält zuletzt als Reſultat der Elimination (wozu man bloß die Gleichungen 1.), 3.), 4.) und 5.) zu nehmen braucht, welche alle ſchon nicht mehr x ſelbſt haben, und aus welchen alſo nur noch ∂x_t, $\partial^2 x_t$ und $\partial^3 x_t$ eliminirt wird) die Gleichung

6) $$\partial^4 y_t = gm \cdot \partial y_t + m^2 \cdot \partial^2 y_t;$$

und dieſe hat weder x noch irgend eine Ableitung von x.

Iſt aber x nebſt allen Ableitungen deſſelben eliminirt, und die entſtehende Gleichung zwiſchen y und t integrirt, und hat das Integral alle willkührlichen Conſtanten aufgenommen, die es aufnehmen kann, ſo ſubſtituirt man dieſen Ausdruck für y und die zugehörigen Ausdrücke für ∂y_t, $\partial^2 y_t$ etc. etc. in die übrigen Gleichungen und eliminirt dann aus letzteren ∂x_t, $\partial^2 x_t$ etc. etc., ſo daß nur noch x ſelbſt darin bleibt. So bekommt

man also zuletzt x selbst in t und in dieselben willkührlichen Constanten ausgedrückt, ohne auf's Neue integriren zu müssen, also auch ohne neue willkührliche Constanten.

Anmerkung 1. Bei dem Elimininen kann auch ein Fall eintreten, den wir am Besten im folgenden Beispiele aus einander setzen.

Es sey nämlich aus den beiden Gleichungen

1) $$\partial^2 x_t = -m \cdot \partial x_t \cdot \sqrt{\partial x_t^2 + \partial y_t^2}$$

und

2) $$\partial^2 y_t = -g - m \cdot \partial y_t \cdot \sqrt{\partial x_t^2 + \partial y_t^2}$$

der Veränderliche t zu elimininen, derselbe, nach welchem die Ableitungen von x und y genommen sind, so daß man eine Endgleichung zwischen x und y und ∂y_x, $\partial^2 y_x$ etc. etc., oder eine Endgleichung zwischen x, y und ∂x_y, $\partial^2 x_y$ etc. etc. verlangt.

Um diese und ähnliche Aufgaben zu lösen, muß man zuerst (nach I. Bd. §. 155.) die Unabhängigkeit des Veränderlichen t auf einen andern der Veränderlichen, z. B. auf x, übertragen. Man nimmt daher (nach dem angeführten Paragraphen)

$$\partial y_t = \partial y_x \cdot \partial x_t,$$

$$\partial^2 y_t = \partial^2 y_x \cdot \partial x_t^2 + \partial y_x \cdot \partial^2 x_t,$$

und substituirt diese Werthe statt ∂y_t und $\partial^2 y_t$ in die gegebenen Gleichungen 1.) und 2.), und man erhält

3) $$\partial^2 x_t = -m \cdot \partial x_t^2 \cdot \sqrt{1 + \partial y_x^2}$$

und

$$\partial^2 y_x \cdot \partial x_t^2 + \partial y_x \cdot \partial^2 x_t = -g - m \cdot \partial y_x \cdot \partial x_t^2 \cdot \sqrt{1 + \partial y_x^2},$$

welche letztere Gleichung jedoch, wenn man statt $\partial^2 x_t$ sogleich seinen Werth (aus 3.) substituirt, viel einfacher so wird, nämlich:

4) $$\partial^2 y_x \cdot \partial x_t^2 = -g.$$

Aus diesen Gleichungen 3.) und 4.) muß man nun noch alle Differential-Koefficienten von x nach t elimininen.

Zu dem Ende differenziirt man diese Gleichungen nach t, beachtet jedoch dabei, daß y, ∂y_x, $\partial^2 y_x$ etc. etc. als Funktionen von x, nach der Formel

$$\partial(\varphi_x)_t = \partial\varphi_x \cdot \partial x_t$$

behandelt werden müssen, so daß also $\partial(\partial y_x)_t = \partial^2 y_x \cdot \partial x_t$, $\partial(\partial^2 y_x)_t = \partial^3 y_x \cdot \partial x_t$, etc. etc. zu nehmen ist. Geschieht dies hier zunächst bloß bei der Gleichung 4.), so erhält man

$$\partial^3 y_x \cdot \partial x_t^3 + 2\partial^2 y_x \cdot \partial x_t \cdot \partial^2 x_t = 0$$

oder

5) $$\partial^3 y_x \cdot \partial x_t^2 + 2\partial^2 y_x \cdot \partial^2 x_t = 0;$$

und nun hat man schon Gleichungen genug, um (aus 3., 4. und 5.) sowohl ∂x_t als $\partial^2 x_t$ eliminiren zu können. Man erhält zuletzt als Endresultat

6) $$\partial^3 y_x - 2m \cdot \partial^2 y_x \cdot \sqrt{1 + \partial y_x^2} = 0;$$

welche Gleichung von dem Veränderlichen t keine Spur mehr hat.

Das Verfahren im Allgemeinen leuchtet aus diesem Beispiele hervor. Man substituirt zuerst die Werthe für ∂y_t, $\partial^2 y_t$, $\partial^3 y_t$ etc. etc., man differenziirt dann die Gleichungen nach allem t, indem man jedoch

$$\partial(\partial y_x)_t = \partial^2 y_x \cdot \partial x_t, \quad \partial(\partial^2 y_x)_t = \partial^3 y_x \cdot \partial x_t, \text{ etc. etc.}$$

setzt; und man eliminirt zuletzt, wenn man genug Gleichungen (durch fortgesetztes Differenziiren) sich verschafft hat, sowohl t selbst (was in dem vorliegenden Beispiel gar nicht vorkam) als auch die noch vorhandenen Differential-Koefficienten ∂x_t, $\partial^2 x_t$, $\partial^3 x_t$ etc. etc.

Anmerkung 2. Es ist leicht, diese Methoden, auf die Integration von m Gleichungen zwischen $m+1$ Veränderlichen, — namentlich aber auch das Eliminiren der Veränderlichen nebst ihren Ableitungen auf beliebig viel gegebene Gleichungen auszudehnen. Wir geben daher nur noch ein einziges Eliminations-Beispiel.

Man habe nämlich gegeben die vier Gleichungen

1) $\partial^2 x_t = y^2$; 2) $\partial^2 y_t = x^2$;

3) $x = r \cdot cos\, v$; 4) $y = r \cdot sin\, v$;

und es sollen eliminirt werden x und y, aber auch alle Ableitungen von x und y nach t, so daß zwei Gleichungen als Endresultat hervorgehen, zwischen r, v und t und den Ableitungen von r und v nach t.

Da die Differentiation der Gleichungen 1.) und 2.) nach t, allemal eben so viel neue, wieder zu eliminirende Ausdrücke einführen würde, als man dadurch neue Gleichungen erhielte, so werden wir dasmal bloß die Gleichungen 3.) und 4.) hinter einander nach t differenziiren; und wir erhalten zunächst

5) $$\partial x_t = -r \cdot \sin v \cdot \partial v_t + \partial r_t \cdot \cos v,$$

6) $$\partial y_t = r \cdot \cos v \cdot \partial v_t + \partial r_t \cdot \sin v;$$

und diese, noch einmal nach allem t differenziirt, geben

7) $$\partial^2 x_t = -r \cdot \cos v \cdot \partial v_t^2 - 2 \sin v \cdot \partial r_t \cdot \partial v_t + \partial^2 r_t \cdot \cos v - r \cdot \sin v \cdot \partial^2 v_t;$$

8) $$\partial^2 y_t = -r \cdot \sin v \cdot \partial v_t^2 + 2 \cos v \cdot \partial r_t \cdot \partial v_t + \partial^2 r_t \cdot \sin v + r \cdot \cos v \cdot \partial^2 v_t.$$

Aus den sechs Gleichungen (1—4. und 7. 8.) kann man nun die vier Ausdrücke x, y, $\partial^2 x_t$ und $\partial^3 x_t$ eliminiren; und man erhält als Endresultat die beiden Gleichungen

$$r^2 \cdot \cos v^2 = -r \cdot \cos v \cdot \partial v_t^2 - 2 \sin v \cdot \partial r_t \cdot \partial v_t + \partial^2 r_t \cdot \cos v - r \cdot \sin v \cdot \partial^2 v_t;$$

$$r^2 \cdot \sin v^2 = -r \cdot \sin v \cdot \partial v_t^2 + 2 \cos v \cdot \partial r_t \cdot \partial v_t + \partial^2 r_t \cdot \sin v + r \cdot \cos v \cdot \partial^2 v_t;$$

welche durchaus nichts mehr enthalten, was an das Daseyn von x und y erinnern könnte *).

Anmerkung 3. Die in der gemeinen Algebra schon gegebene Regel, daß man nämlich aus den gegebenen Gleichungen durch algebraische Kombinationen erst neue und bequemere Gleichungen bildet, ehe man an das weitere Geschäft des Auflösens (oder Integrirens) geht, findet natürlich auch hier statt. —

Hat man z. B. die Gleichungen

1) $\partial^2 x_t = X_{x,y}$ und 2) $\partial^2 y_t = Y_{x,y}$

---

*) Wäre vorausgesetzt gewesen, daß r kein t enthält, daß also $\partial r_t = 0$ und $\partial^2 r_t = 0$ ist, so wären diese beiden End-Gleichungen viel einfacher geworden. In den Gleichungen 5.)—8.) wären schon alle die Glieder nicht eingegangen, welche von der Veränderlichkeit des r herrühren, und man hätte diese End-Gleichungen erhalten, nämlich:

$$r \cdot \cos v^2 = -\cos v \cdot \partial v_t^2 - \sin v \cdot \partial^2 v_t$$

$$r \cdot \sin v^2 = -\sin v \cdot \partial v_t^2 + \cos v \cdot \partial^2 v_t.$$

Aus diesen beiden Gleichungen ist es nun leicht, auch noch r fortzuschaffen, und so eine Gleichung bloß zwischen v und t übrig zu behalten.

zu integriren, so kann man die 1.) mit ∂x_t, die 2.) mit ∂y_t multipliciren und beide Resultate addiren, so daß man erhält

3) $\partial x_t \cdot \partial^2 x_t + \partial y_t \cdot \partial^2 y_t = X \cdot \partial x_t + Y \cdot \partial y_t$.

Man kann aber auch die 2.) mit x multipliciren, die 1.) dagegen mit y, und letzteres vom ersteren subtrahiren, und man wird erhalten

4) $x \cdot \partial^2 y_t - y \cdot \partial^2 x_t = Yx - Xy$;

und wenn man dann von den vier Gleichungen (1.—4.) irgend zwei e nimmt, so hat man die beiden gegebenen 1.) und 2.) vollständig ersetzt.

In den Gleichungen 3.) und 4.) sind aber die Ausdrücke zur Linken integrabel, und wenn man sie integrirt, so erhält man bezüglich $\frac{1}{2}\partial x_t^2 + \frac{1}{2}\partial y_t^2$ und $x \cdot \partial y_t - y \cdot \partial x_t$. Sollte daher einer der beiden Ausdrücke zur Rechten in den Gleichungen 3.) und 4.) ebenfalls integrabel seyn (was von X und Y abhängt), sollte etwa

$$\int (X \cdot \partial x_t + Y \cdot \partial y_t) \cdot dt = \varphi_{x,y} \quad \text{und} \quad \int (Yx - Xy) \cdot dt = \psi_{x,y}$$

seyn, so hat man sogleich die Integral-Gleichungen

$$\partial x_t^2 + \partial y_t^2 = 2\varphi + c \quad \text{und} \quad x \cdot \partial y_t - y \cdot \partial x_t = \psi + c',$$

welche nur noch von der ersten Ordnung sind.

Ist z. B. $X = 2xy + y^2$ und $Y = x^2 + 2xy$, so ist

$$\int (X \cdot \partial x_t + Y \cdot \partial y_t) dt = \int ((2xy + y^2)\partial x_t + (x^2 + 2xy)\partial y_t) \cdot dt$$
$$= x^2 y + xy^2 = xy(x + y) = \varphi,$$

und das erstere Integral wird

$$\partial x_t^2 + \partial y_t^2 = 2xy(x + y) + c.$$

Für dieselbe Bedeutung von X und Y ist dagegen $Yx - Xy$ nicht integrabel.

Hätte man aber $X = x$ und $Y = y$, so würde $\varphi = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$ und $\psi = 0$, und nun fänden beide Integrale statt, nämlich

1') $\partial x_t^2 + \partial y_t^2 = x^2 + y^2 + c$ und 2') $x \cdot \partial y_t - y \cdot \partial x_t = c'$ *).

---

*) Wäre $c' = 0$, so könnte man diese beiden Gleichungen sehr leicht noch einmal integriren. In der zweiten trennten sich nämlich die Veränderlichen, wenn man sie durch xy dividirt. — Man erhält dann

$$\frac{\partial y_t}{y} = \frac{\partial x_t}{x},$$

§. 44.

Die d'Alembert'sche Methode zur Integration mehrerer gleichzeitig gegebenen lineären Differential-Gleichungen.

I. Sind gegeben die beiden lineären Gleichungen

1) $$M \cdot \partial u_t + N \cdot \partial x_t + Pu + Qx = R$$

und

2) $$M' \cdot \partial u_t + N' \cdot \partial x_t + P'u + Q'x = R',$$

so kann man sogleich von dem in der vorstehenden Anmerkung beschriebenen Verfahren Gebrauch machen, — aus diesen beiden Gleichungen abwechselnd ∂x_t und ∂u_t eliminiren, und so statt der gegebenen Gleichungen lieber diese neuen nehmen, welche die nachstehende Form haben werden, nämlich

3) $$\partial x_t + Pu + Qx = T$$

und

4) $$\partial u_t + P'u + Q'x = T'$$

wo P, Q, P', Q', T und T' Funktionen von t seyn werden, wenn auch andere als die in den ersteren Gleichungen durch dieselben Buchstaben vorgestellten.

Man multiplicirt nun, nach d'Alembert, um diese neuen Gleichungen 3.) und 4.) zu integriren, ohne den Weg der Elimination betreten zu wollen, die Gleichung 3.) mit

---

welche integrirt,

3′) $$y = Cx$$

liefert. Dies Cx statt y und $C \cdot \partial x_t$ statt ∂y_t in die erstere (1′.) der Integral-Gleichungen subst ituirt giebt

$$\partial x_t^2 = x^2 - k^2, \quad \text{wenn man} \quad \frac{-c}{1+C^2} = k^2 \quad \text{setzt.}$$

Hieraus folgt

$$\partial t_x = \frac{1}{\sqrt{x^2-k^2}}, \quad \text{also} \quad C' + t = \int \frac{1}{\sqrt{x^2-k^2}} \cdot dx = log(x + \sqrt{x^2-k^2})$$

oder

4′) $$x + \sqrt{x^2-k^2} = C_1 \cdot e^t,$$

wo C, C_1 und k drei willkührliche Constanten sind. (Die vierte Constante c′ haben wir $= 0$ vorausgesetzt.)

einer unbestimmten Funktion θ von t, und addirt solche zur 4.). Dadurch erhält man, wenn noch statt u ein neuer Veränderlicher z eingeführt wird, mittelst der Gleichung

5) $u = z - \theta x$, also $\partial u_t = \partial z_t - x \cdot \partial\theta_t - \theta \cdot \partial x_t$,

dieses Resultat, nämlich:

6) $$\left\{\begin{array}{c} \partial z_t + (P + P'\theta)z \\ -x(\partial\theta_t + (P + P'\theta)\theta - (Q + Q'\theta)) \end{array}\right\} = T + T'\theta.$$

Da man nun über θ nach Belieben disponiren kann, so setzt man hier den Faktor von x der Null gleich. Dies giebt

7) $$\partial z_t + (P + P'\theta)z = T + T'\theta,$$

8) $$\partial\theta_t + (P + P'\theta)\theta - (Q + Q'\theta) = 0.$$

Kann man nun versuchsweise oder sonst wie, einen der Gleichung 8.) genügenden Werth von θ_t finden, so giebt die Gleichung 7.) sogleich z dazu, wodurch die Gleichung 5.) in eine Ur-Gleichung zwischen u und x und einer willkührlichen Constante übergeht. Findet man daraus u in x, und setzt man dies statt u in die Gleichung 3.), so erhält man eine neue lineäre Gleichung zwischen t, x und ∂x_t, welche, auf's Neue integrirt, noch x in t dazu liefert, mit der zweiten willkührlichen Constante.

Könnte man die Gleichung 8.) allgemein integriren, so daß θ schon eine willkührliche Constante in sich aufnähme, so würde man x aus der Gleichung 4.) ohne weitere Integration sich verschaffen, weil man dann schon die zwei willkührlichen Constanten hätte, welche durch das Integriren der beiden gegebenen Gleichungen 1.) und 2.) eingehen müssen *).

---

*) Man könnte, auch wenn θ bereits eine willkührliche Constante in sich aufgenommen hat, doch auch wiederum x aus der 3.) durch neue Integration finden wollen, so daß man nun eine dritte willkührliche Constante erhielte. Weil aber die Gleichung 4.) ebenfalls identisch werden muß, so würde man in solche statt x und u ihre Werthe in t substituiren, und dann würde sich alles t von selber wegheben, und eine Gleichung bloß zwischen den drei Constanten übrig bleiben, wodurch die eine in die beiden andern ausgedrückt sich sieht, also nicht mehr willkührlich ist.

Sind P und Q, desgleichen P′ und Q′ constant, so kann man der Gleichung 8.) dadurch genügen, daß man $\partial\theta_t = 0$ setzt, und θ selbst aus der Gleichung

$$(P+P'\theta)\theta - Q + Q'\theta = 0$$

bestimmt. — Da diese Gleichung quadratisch ist, so erhält man für θ zwei Werthe, die wir durch θ_1 und θ_2 bezeichnen wollen. Bezeichnet man nun die zugehörigen Werthe von $P+P'\theta$ und $T+T'\theta$ bezüglich durch m_1, m_2 und T_1, T_2, so giebt die Gleichung 7.) diese zwei Gleichungen, nämlich

$$z = e^{-m_1 t}(\int e^{m_1 t} \cdot T_1 \cdot dt + C_1)$$

und

$$z = e^{-m_2 t}(\int e^{m_2 t} \cdot T_2 \cdot dt + C_2).$$

Und die Gleichung 5.) liefert nun auch diese zwei Gleichungen, nämlich

$$u + \theta_1 x = e^{-m_1 t}(\int e^{m_1 t} \cdot T_1 \cdot dt + C_1)$$

$$u + \theta_2 x = e^{-m_2 t}(\int e^{m_2 t} \cdot T_2 \cdot dt + C_2).$$

Auf diese Weise findet man sogleich u und x unmittelbar, ohne die Gleichung 3.) oder 4.) noch zu Hülfe nehmen zu müssen, weil die Gleichung 6.) zwei Gleichungen geliefert hat, welche die beiden Gleichungen 3.) und 4.) vollkommen ersetzen.

II. Hat man drei lineäre Gleichungen zwischen den vier Veränderlichen u, x, y und t, von der ersten Ordnung, so kann man sie auf die nachstehende Form bringen, nämlich

$$1) \quad \partial u_t + Pu + Qx + Ry = T,$$

$$2) \quad \partial x_t + P'u + Q'x + R'y = T',$$

$$3) \quad \partial y_t + P''u + Q''x + R''y = T''.$$

Multiplicirt man nun die zweite mit θ, die dritte mit θ', addirt man solche zur ersten, und setzt man

$$4) \quad u + \theta x + \theta' y = z,$$

also

$u = z - \theta x - \theta' y$ und $\partial u_t + \theta \cdot \partial x_t + \theta' \cdot \partial y_t = \partial z_t - x \cdot \partial\theta_t - y \cdot \partial\theta'_t$,

so erhält man eine Gleichung, in welcher man die Koefficienten

---

Es ist nämlich zu bemerken, daß wenn die Gleichung 6.) und eine der beiden Gleichungen 3.) und 4.) identisch ist, dann auch die andere dieser letztern beiden Gleichungen nothwendig identisch seyn müsse. Wird dagegen die 3.) integrirt, so muß das Integral noch nicht nothwendig der Gleichung 4.) genügen, wenn es auch den Gleichungen 3.) und 6.) genügt; sondern es muß noch durch gehörige Bestimmung der Constante der Gleichung 4.) erst genügt werden.

von x und von y der Null gleich setzen kann, weil man die Disposition über θ und θ' hat. Dadurch erhält man die drei Gleichungen

$$5) \quad \partial z_t + (P + P'\theta + P''\theta')z = T + T'\theta + T''\theta';$$
$$6) \quad \partial \theta_t + (P + P'\theta + P''\theta')\theta - (Q + Q'\theta + Q''\theta') = 0;$$
$$7) \quad \partial \theta'_t + (P + P'\theta + P''\theta')\theta' - (Q + Q'\theta + Q''\theta') = 0.$$

Findet man nun Werthe von θ und θ', welche den Gleichungen 6.) und 7.) genügen, so giebt die Gleichung 5.) augenblicklich z dazu. — U. s. w. f.

Betrachten wir wieder den Fall, wo P, Q, R, P', Q', R' constant sind, so kann man den Gleichungen 6.) und 7.) genügen, wenn man $\partial\theta_t$ und $\partial\theta'_t$ der Null gleich, also θ und θ' constant und so nimmt, wie sie sich jetzt aus den Gleichungen 6.) und 7.) ergeben. Man erhält dann für θ und θ' kubische Gleichungen, und diese geben drei zusammengehörige Paare von Werthen von θ und θ', die wir durch θ_1, θ'_1 und θ_2, θ'_2, endlich θ_3, θ'_3 bezeichnen wollen. Die Gleichung 5.) giebt dann drei Werthe von z; die Gleichung 4.) giebt also nun drei Gleichungen zwischen u, x, y und t mit drei willkührlichen Constanten; und diese geben dann u, x, y in t ausgedrückt.

III. D'Alembert wendet dieses Verfahren auch auf lineäre Gleichungen höherer Ordnungen an, und wir wollen dies im folgenden Beispiel erläutern.

Sind z. B. gegeben die beiden Gleichungen der zweiten Ordnung

$$1) \quad \partial^2 u_t + A\cdot\partial u_t + B\cdot\partial x_t + Cu + Dx = T$$

und

$$2) \quad \partial^2 x_t + A'\cdot\partial u_t + B'\cdot\partial x_t + C'u + D'x = T',$$

so führt er zwei neue Veränderliche p und q ein mittelst der Gleichungen

$$3) \quad \partial u_t = p \qquad \text{und} \qquad 4) \quad \partial x_t = q.$$

Dadurch hat er dann die vier Gleichungen

$$5) \quad \partial p_t + Ap + Bq + Cu + Dx = T$$
$$6) \quad \partial q_t + A'p + B'q + C'u + D'x = T'$$
$$7) \quad \partial u_t - p = 0$$
$$8) \quad \partial x_t - q = 0.$$

Dies sind nun vier lineäre Gleichungen der ersten Ordnung zwischen den vier Funktionen u, x, ṗ, q von t, welche nun nach dem kurz vorher beschriebenen Wege integrirt werden können.

§. 45.

Von den singulären Werthen.

I. Betrachten wir die Differential-Gleichung der ersten Ordnung

1) $$x \cdot \partial x_y + y = \sqrt{x^2 + y^2 - a^2}$$

und führen wir statt x einen neuen Veränderlichen u ein, mittelst der Gleichung

2) $$x^2 + y^2 - a^2 = u^2,$$

so daß

3) $$x \cdot \partial x_y + y = u \cdot \partial u_y$$

wird, und eliminiren wir nun aus 1.), 2.) und 3.) sowohl x als auch ∂x_y, so erhält man die neue Differential-Gleichung

4) $u \cdot \partial u_y - u = 0$ oder $u(\partial u_y - 1) = 0.$

Dieser Gleichung wird genügt, einmal durch $u = 0$, dann aber auch durch $\partial u_y = 1$, welche letztere, integrirt, $u = y + c$ liefert. Also wird auch der gegebenen Differential-Gleichung 1.) durch

5) $u = 0$ d. h. $x^2 + y^2 - a^2 = 0$

und noch durch

6) $u = y + c$ d. h. $x^2 + y^2 - a^2 = (y + c)^2$

genügt, während es keinen (constanten) Werth der Constante c giebt, der in 6.) statt c gesetzt, die Gleichung 5.) hervorbringen könnte. Die Gleichung 5.) genügt also der gegebenen Differential-Gleichung 1.), ohne ein besonderes Integral der letztern, d. h. ohne in dem allgemeinen Integral 6.) enthalten zu seyn.

Ein solcher, der gegebenen Differential-Gleichung genügender Werth (wie ihn z. B. die Gleichung 5. liefert), der nicht in dem allgemeinen Integral enthalten ist, der also kein besonderes Integral der gegebenen Differential-Gleichung genannt

werden kann, heißt ein singulärer Werth dieser Differential-Gleichung.

Es ist aus der Algebra bekannt, daß wenn irgend eine Aufgabe zu einer Gleichung führt von der Form $P \cdot Q = 0$, so genügt dieser Gleichung entweder $P = 0$, oder $Q = 0$. — Führt also z. B. eine Aufgabe zu der Gleichung

1′) $\quad u \cdot \partial u_y - u = 0 \quad$ d. h. $\quad u(\partial u_y - 1) = 0,$

so genügt dieser Gleichung entweder $u = 0$, oder $\partial u_y - 1 = 0$. — Führt man nun aber statt u einen neuen Veränderlichen x dergestalt ein, daß man

2′) $\quad \sqrt{x^2 + y^2 - a^2} = u, \quad$ oder $\quad x^2 + y^2 - a^2 = u^2$

setzt, so erhält man zunächst

3′) $\quad x \cdot \partial x_y + y = u \cdot \partial u_y \quad$ oder $\quad \partial u_y = \dfrac{x \cdot \partial x_y + y}{\sqrt{x^2 + y^2 - a^2}}.$

Substituirt man nun diese Werthe statt u und statt ∂u_y in die gegebene Gleichung 1′.), so geht solche über in

4′) $\quad \sqrt{x^2 + y^2 - a^2} \cdot \left[\dfrac{x \cdot \partial x_y + y}{\sqrt{x^2 + y^2 - a^2}} - 1\right] = 0;$

und diese Gleichung wird noch identisch entweder durch die Funktion x von y, welche den erstern Faktor, oder durch den Werth von x, welcher den zweiten Faktor zu Null macht. Der erste Faktor, der Null gleich gesetzt, giebt gar keine Differential-Gleichung; also bedarf es auch nicht des Integrirens, und der aus dieser Gleichung hervorgehende Werth von x (in y ausgedrückt) wird also im Allgemeinen dem Werthe von x ganz fremd bleiben, welcher aus dem andern Faktor durch Integration hervorgeht, wenn solcher der Null gleich gesetzt wird.

So weit ist alles den ersten Regeln der gemeinen Algebra völlig angemessen und nichts weiter hinzuzufügen. Wenn man aber nun in der Gleichung 4′.) die beiden Faktoren mit einander multiplicirt, so daß dieselbe Gleichung diese Form

5′) $\quad x \cdot \partial x_y + y - \sqrt{x^2 + y^2 - a^2} = 0$

annimmt, so sind die beiden Faktoren verschwunden, d. h. sie sind nicht mehr zu erkennen; und daher muß es den Anfänger überraschen, wenn er Differential-Gleichungen durch Werthe genügen sieht, welche nicht in dem allgemeinen Integral enthalten sind, da derselbe den wahren Grund davon deshalb nicht erkennen kann, weil die beiden Faktoren, in welche die Gleichung bei Einführung eines neuen Veränderlichen zuweilen ganz unmittelbar zerfällt, in der gegebenen Form der Gleichung als solche nicht hervortreten.

II. Ganz auf dieselbe Weise springt in die Augen, daß auch eine Differential-Gleichung der zweiten Ordnung neben dem

ersten allgemeinen Integral, noch einen singulären Werth haben könne, welcher selbst eine Differential-Gleichung der ersten Ordnung noch seyn kann, aber in dem ersten allgemeinen Integral (das ebenfalls eine Differential-Gleichung der ersten Ordnung ist) nicht enthalten seyn wird; eben weil es durch einen zweiten Faktor der gegebenen Differential-Gleichung bestimmt ist.

So ist z. B. von der Differential-Gleichung der zweiten Ordnung

1) $$x \cdot \partial^2 y_x^2 - 2\partial y_x \cdot \partial^2 y_x + x = 0$$

das allgemeine Ur-Integral dieses:

2) $$\frac{1}{3}x^3 + a^2 x + b - 2ay = 0;$$

denn, wenn man diese Gleichung zweimal hinter einander nach x differenziirt, und dann y, ∂y_x und $\partial^2 y_x$ als Funktionen von x herstellt, letztere aber statt y, ∂y_x und $\partial^2 y_x$ in die Gleichung 1.) substituirt, so wird solche identisch.

Aber eben so genügt der Gleichung 1.) noch diese andere Gleichung

3) $\partial y_x^2 - x^2 = 0$ oder $\partial y_x = \pm x$, oder $y = \pm \frac{1}{2}x^2 + c$;

denn dieselbe giebt $\partial^2 y_x = \pm 1$, und diese Werthe statt ∂y_x, $\partial^2 y_x$ substituirt, machen die 1.) ebenfalls identisch. Und da endlich, wenn man den Werth von y aus 3.) in die Gleichung 2.) substituirt, diese Gleichung

$$\frac{1}{2}x^3 + a^2 x + b \pm ax^2 + 2ac = 0$$

hervorgeht, diese aber, so lange a, b, c constant sind, einen Widerspruch enthält, so ist die Auflösung 3.) in der Auflösung 1.) nicht enthalten; also ist die Auflösung 3.) ein singulärer Werth der gegebenen Differential-Gleichung der zweiten Ordnung.

Eben so kann eine Differential-Gleichung der dritten und jeder höhern Ordnung neben ihrem allgemeinen Integral noch einen singulären, ihr genügenden Werth haben, der nicht in ihrem allgemeinen Integral enthalten ist.

III. Nach §. 39.) findet man die singulären Werthe einer jeden Differential-Gleichung der ersten Ordnung, wenn man letztere noch einmal differenziirt, dann $\partial^2 y_x$ findet in x, y, ∂y_x ausgedrückt, und diesen Ausdruck auf die Form $\frac{0}{0}$ bringt, d. h. Zähler und Nenner des so auf diesem Wege erhaltenen Ausdrucks für $\partial^2 y_x$ der Null gleich setzt.

Suchen

Suchen wir auf diesem Wege den singulären Werth der Differential-Gleichung

1) $$x \cdot \partial x_y + y + \sqrt{x^2 + y^2 - a^2} = 0.$$

Diese Gleichung, wenn man sie noch einmal nach allem y differenziirt, giebt

2) $$x \cdot \partial^2 x_y + \partial x_y{}^2 + 1 + \frac{x \cdot \partial x_y + y}{\sqrt{x^2 + y^2 - a^2}} = 0,$$

oder

3) $$\partial^2 x_y = - \frac{(\partial x_y{}^2 + 1)\sqrt{x^2 + y^2 - a^2} + x \cdot \partial x_y + y}{x \cdot \sqrt{x^2 + y^2 - a^2}}.$$

Setzt man nun den Nenner $= 0$, so erhält man

4) $$x^2 + y^2 - a^2 = 0,$$

und dieser Werth von x in y, macht auch den Zähler von $\partial^2 x_y$ in 3.) der Null gleich; folglich wird die Gleichung 4.) der singuläre Werth der gegebenen Differential-Gleichung 1.) seyn, wenn er nämlich überhaupt ihr genügt (was hier der Fall ist) und wenn er nicht in dem allgemeinen Integral als ein besonderes Integral steckt (was hier nicht der Fall ist, wie wir dies von dem analogen Beispiel in I. bereits gesehen haben) *).

IV. Lagrange hat gelehrt, wie man den singulären Werth einer gegebenen Differential-Gleichung der ersten Ordnung auch aus derem allgemeinen Integrale

1) $$f_{x,y,a} = 0,$$

welches die willkührliche Constante a in sich aufgenommen hat, finden könne. Da nämlich der singuläre Werth nie in dem allgemeinen Integrale steckt, so giebt es keinen constanten Werth von a, welcher bewirkte, daß $f_{x,y,a} = 0$ der singuläre Werth würde, wohl aber wird diese Gleichung, wenn man statt y seinen, aus dem singulären Werth gezogenen Ausdruck in x, substituirt, bloß a und x enthalten, also a als eine Funktion von x liefern. — Es kommt also darauf an, die Funktion von x zu finden, welche statt a gesetzt werden muß, damit das allgemeine Integral $f_{x,y,a} = 0$ in den singulären Werth übergehe.

*) Sucht man die singulären Werthe einer Differential-Gleichung der zweiten Ordnung, so findet man durch abermaliges Differenziiren $\partial^3 y_x$ oder $\partial^3 x_y$ und setzt solches $= \frac{0}{0}$.

Differenzirt man aber die Gleichung

1) $$f_{x,y,a} = 0,$$

indem man a als constant ansieht, so erhält man

2) $$\partial f_x + \partial f_y \cdot \partial y_x = 0;$$

sieht man jedoch a als eine Funktion von x an, so ergiebt sich

3) $$\partial f_x + \partial f_y \cdot \partial y_x + \partial f_a \cdot \partial a_x = 0.$$

Denkt man sich nun a als diejenige Funktion von x, welche aus

4) $$\partial f_a = 0$$

hervorgeht, so fällt die Gleichung 3.) mit der 2.) der Form nach zusammen. Wenn daher die aus 1.) und 2.) gezogenen Werthe von y und ∂y_x der gegebenen Differential-Gleichung genügen, so thun dies auch die aus 1.) und 3.) hervorgehenden Werthe von y und ∂y_x, sobald $\partial f_a = 0$ gedacht ist.

Um also aus $f_{x,y,a} = 0$ den singulären Werth zu finden, nimmt man $\partial f_a = 0$, und eliminirt aus beiden den Buchstaben a. Wenn die Gleichung $\partial f_a = 0$ nicht a constant liefert, und auch keinen Widerspruch enthält, so ist das erhaltene Resultat allemal ein singulärer Werth der gegebenen Differential-Gleichung, von welcher $f_{x,y,a} = 0$ das allgemeine Integral ist.

So ist z. B. von der Gleichung

1′) $$x \cdot \partial x_y + y = \sqrt{x^2 + y^2 - b^2}$$

das allgemeine Integral dieses:

2′) $x^2 + y^2 - b^2 = (y+a)^2$ oder $(y+a)^2 - x^2 - y^2 + b^2 = 0,$

wo a die willkührliche Constante ist. Differenzirt man nun diese Gleichung nach a, so ergiebt sich

3′) $$y + a = 0 \quad \text{oder} \quad a = -y;$$

und dieser Werth von a in das allgemeine Integral statt a substituirt, giebt

4′) $$x^2 + y^2 - b^2 = 0;$$

und dies ist in der That der singuläre Werth für diese gegebene Differential-Gleichung der ersten Ordnung.

Hätte man dem allgemeinen Integral 2′.) diese Form gegeben, nämlich

$$\sqrt{x^2 + y^2 - b^2} = y + a \quad \text{oder} \quad y + a - \sqrt{x^2 + y^2 - b^2} = 0,$$

und nun solche nach a differenzirt, so hätte man

$$1 = 0$$

erhalten, und dieser Widerspruch hätte angezeigt, daß man nun den singulären Werth nicht findet.

Man sieht hieraus, daß man dem allgemeinen Integral, ehe man nach a differenziirt, erst die zu dem Zwecke passende Form geben muß *). — Diese

---

*) Wir haben im I. Bd. §.§. 182—184.) gesehen, daß die aus $f_{x,y,a} = 0$ und $\partial f_a = 0$ hervorgehende Kurve, wenn a eliminirt wird, und wenn überhaupt die entstehende Gleichung eine Kurve vorstellt, alle aus $f_{x,y,a} = 0$ dadurch, daß man dem a alle stetig neben einander liegenden constanten Werthe giebt, hervorgehenden Kurven einhüllt, d. h. alle zugleich, jede aber an einem andern ihrer Punkte berührt. — Kommt man also bei Lösung einer dahin gehörenden Aufgabe zu einer Differential-Gleichung, so muß man ihren singulären Werth und nicht ihr Integral suchen, um die Lösung zu haben.

In dem Beispiele zu §. 184. des I. Bd.) hätte man z. B. die Lösung der Aufgabe auch so einleiten können, daß man die Kurve gesucht hätte, deren Tangente an jedem ihrer Punkte, so weit sie von den festen und auf einander senkrecht stehenden Geraden OX und OY abgeschnitten wird, beständig eine und dieselbe gegebene Länge c habe. Ist dann E ein beliebiger Punkt der gesuchten Kurve und $OF = x$, $FE = y$, so ist

$$\frac{EF}{FA} = tg\, BAO = -\partial y_x;$$

also ist auch

$$FA = -\frac{y}{\partial y_x} \quad \text{und} \quad OA = x - \frac{y}{\partial y_x}, \quad \text{folglich} \quad OB = OA \cdot tg\, BAO,$$

d. h. $OB = -x \cdot \partial y_x + y$. — Die gesuchte Gleichung ergiebt sich nun aus dem Pythagoräischen Lehrsatze

$$AB^2 = OA^2 + OB^2$$

und wird also

$$c^2 = x^2 + \frac{y^2}{\partial y_x^2} - \frac{2xy}{\partial y_x} + x^2 \cdot \partial y_x^2 - 2xy \cdot \partial y_x + y^2,$$

oder

$$x^2 \cdot \partial y_x^4 - 2xy \cdot \partial y_x^3 + (x^2 + y^2 - c^2) \cdot \partial y_x^2 - 2xy \cdot \partial y_x + y^2 = 0.$$

Dies ist eine Differential-Gleichung der gesuchten Kurve. Integrirt man sie, so erhält man als allgemeines Integral die Gleichung der Geraden

$$y = -\frac{a}{\sqrt{c^2 - a^2}} x + a$$

mit der willkührlichen Constante a. Die gesuchte Kurve steckt darin aber nicht, welchen Werth man auch der Constante a geben möchte. Also muß man den singulären Werth aufsuchen, welcher nach III.) oder auch, in so fern man das allgemeine Integral hat, nach IV.) gefunden wird.

zweckmäßige Form der Integral-Gleichung $f_{x,y,a} = 0$ muß aber so seyn, daß $\partial f_a = 0$ für a eine Funktion von x allein, oder von y allein, oder von x und y liefert. Im letztern Falle kann jedoch a wiederum constant seyn, weil diese Funktion von x und y, so wie statt y der aus $f = 0$ und $\partial f_a = 0$ gezogene Werth substituirt wird, constant werden kann. Dann wäre aber die aus $f_{x,y,a} = 0$ und $\partial f_a = 0$ gefundene Gleichung zwischen x und y kein singulärer Werth, sondern ein besonderes Integral.

V. Hat man einen, der gegebenen Differential-Gleichung genügenden Werth $y = \psi_x$ und außerdem noch das allgemeine Integral derselben Differential-Gleichung $f_{x,y,a} = 0$, so ist es leicht zu wissen, ob $y = \psi_x$ ein singulärer Werth oder ein besonderes Integral der gegebenen Differential-Gleichung ist. Man setzt ψ_x statt y in $f_{x,y,a} = 0$; fällt dann alles x heraus, so giebt die Gleichung den Werth der Constante a, für welchen aus $f_{x,y,a} = 0$, die Gleichung $y = \psi_x$ als ein besonderes Integral hervorgeht; fällt aber aus der Gleichung $f_{x,\psi,a} = 0$ nicht alles x von selber heraus, so daß a als eine Funktion von x sich ergiebt, so ist $y = \psi_x$ ein singulärer Werth.

Lagrange hat aber noch gezeigt, wie man ohne das allgemeine Integral zu haben, doch untersuchen könne, ob $y = \psi_x$ ein singulärer Werth oder ein besonderes Integral sey. Man muß nämlich aus der gegebenen Differential-Gleichung ∂y_x finden, etwa $\partial y_x = p_{x,y}$, dann ∂p_y bestimmen, hier herein aber statt y den Werth ψ_x substituiren. Nimmt dadurch ∂p_y die Form $\frac{1}{0}$ an, so ist $y = \psi_x$ ein singulärer Werth; außerdem aber ist $y = \psi_x$ ein besonderes Integral. — Näheres über die singulären Werthe findet man im „System der Mathematik." Th. VI., woselbst sie sehr vollständig behandelt sich finden.

§. 46.

Von der Integration der Gleichungen durch Reihen.

Sieht man sich gezwungen durch Reihen zu integriren, so kann man entweder das Verfahren des §. 39.) anwenden, oder aber die aus nachstehenden Beispielen ersichtlichen Methoden.

I. Soll z. B. die Gleichung

1) $$\partial y_x + y - mx^n = 0$$

mittelst Reihen integrirt werden, so setze man

2) $$y = A_0 x^\alpha + A_1 x^{\alpha+1} + A_2 x^{\alpha+2} + \text{etc. etc. etc.},$$

wo A_0, A_1, A_2 etc. etc. unbestimmte Koefficienten und α ein unbestimmter Exponent ist; finde daraus

3) $$\partial y_x = \alpha A_0 x^{\alpha-1} + (\alpha+1) A_1 x^\alpha + (\alpha+2) A_2 x^{\alpha+1} + \text{etc.etc.},$$

substituire diese Reihen statt y_x und ∂y_x in die gegebene Differential-Gleichung und ordne die Gleichung nach Potenzen von x, so daß man erhält

4) $$\left.\begin{array}{l} \alpha A_0 x^{\alpha-1} + (\alpha+1) A_1 x^\alpha + (\alpha+2) A_2 x^{\alpha+1} + (\alpha+3) A_3 x^{\alpha+2} + \text{etc.} \\ -mx^n + A_0 x^\alpha + A_1 x^{\alpha+1} + A_2 x^{\alpha+2} + \text{etc.} \end{array}\right\} = 0.$$

Diese Gleichung wird nun identisch, wenn man

$$n = \alpha - 1, \quad \text{also} \quad \alpha = n+1,$$

und die Koefficienten A_0, A_1, A_2, A_3 etc. etc. so nimmt, daß

5) $$\alpha A_0 - m = 0;\ (\alpha+1) A_1 + A_0 = 0;\ (\alpha+2) A_2 + A_1 = 0;$$
$$(\alpha+3) A_3 + A_2 = 0;$$

etc etc. wird. Dies giebt

6) $$A_0 = \frac{m}{n+1};\ A_1 = -\frac{m}{(n+1)^{2}1};\ A_2 = +\frac{m}{(n+1)^{3}1};$$
$$A_3 = -\frac{m}{(n+1)^{4}1};$$

u. s. w. f.; so daß zuletzt gefunden wird

7) $$y = \frac{m}{n+1} x^{n+1}\left(1 - \frac{x}{n+2} + \frac{x^2}{(n+2)^{2}1} - \frac{x^3}{(n+2)^{3}1} + \frac{x^4}{(n+3)^{4}1} - \cdots\right).$$

Dieser Werth von y genügt nun der gegebenen Differen-

tial-Gleichung, ist aber höchstens ein besonderes Integral, weil keine allgemeine willkührliche Constante eingegangen ist.

Will man aber, wie dies in den Anwendungen der Fall ist, dasjenige besondere Integral haben, welches $y = b$ liefert, wenn $x = a$ gesetzt wird, so führt man zwei neue Veränderliche t und u so ein, daß man

8) $$x = a + t \quad \text{und} \quad y = b + u$$

setzt, so daß, weil $\partial x_t = 1$ und $\partial y_t = \partial u_t$ wird,

$$\partial y_x = \frac{\partial y_t}{\partial x_t} = \partial u_t$$

ist. Diese Werthe in die gegebene Differential-Gleichung substituirt, geben die neue Gleichung

9) $$\partial u_t + b + u - m(a+t)^n = 0,$$

und man sucht nun u in t so auszudrücken, daß für $t = 0$ auch $u = 0$ wird. Zu dem Ende setzt man

10) $$u = A_0 t^\alpha + A_1 t^{\alpha+1} + A_2 t^{\alpha+2} + A_3 t^{\alpha+3} + \cdots,$$

findet hieraus ∂u_t und substituirt diese Werthe in die Gleichung 9.). Dadurch geht letztere über in

$$\left.\begin{array}{llllll} \alpha A_0 t^{\alpha-1} & + (\alpha+1) A_1 t^\alpha & + (\alpha+2) A_2 t^{\alpha+1} & + \text{etc.} \\ + b & + A_0 t^\alpha & + A_1 t^{\alpha+1} & + \text{etc.} \\ - m a^n & - m n a^{n-1} t & - m n_2 a^{n-2} t^2 & - \text{etc.} \end{array}\right\} = 0;$$

11)

Um nun dieser Gleichung für jedes t zu genügen, muß man

$$\alpha - 1 = 0 \qquad \text{also} \qquad \alpha = 1$$

und dann noch

$$\alpha A_0 + b - m a^n = 0; \quad (\alpha+1) A_1 + A_0 - m n a^{n-1} = 0;$$

$$(\alpha+2) A_2 + A_1 - m n_2 a^{n-2} = 0;$$

u. s. w. f. nehmen.

Aus diesen letztern Gleichungen findet man aber die Koefficienten A_0, A_1, A_2 etc. etc. ohne Weiteres. Setzt man dann $x - a$ statt t und addirt man zu der für u erhaltenen Reihe noch b hinzu, so hat man y, wie solches verlangt wurde.

II. Ist die Gleichung der zweiten Ordnung

1) $$\partial^2 y_x + ax^n y = 0$$

auf diese Weise zu integriren, so kann man

2) $$y = A_0 x^\alpha + A_1 x^{\alpha+\delta} + A_2 x^{\alpha+2\delta} + \text{etc. etc. etc.}$$

setzen. Differenziirt man nun diese Gleichung zweimal hinter einander nach x, so erhält man

$$\partial^2 y_x = \alpha^{2I-1} A_0 x^{\alpha-2} + (\alpha+\delta)^{2I-1} A_1 x^{\alpha+\delta-2} + (\alpha+2\delta)^{2I-1} A_2 x^{\alpha+2\delta-2} + \text{etc. etc.},$$

und außerdem findet sich

$$ax^n y = aA_0 x^{\alpha+n} + aA_1 x^{\alpha+\delta+n} + aA_2 x^{\alpha+2\delta+n} + \text{etc. etc.}$$

Da nun die Summe dieser beiden Reihen der Null gleich werden soll (nach 1.), so muß man $\alpha = 0$ oder $\alpha = 1$ nehmen, damit das Glied $\alpha^{2I-1} A_0 x^{\alpha-2}$ in $\partial^2 y_x$ ganz herausfällt und $(\alpha+\delta)^{2I-1} A_1 x^{\alpha+\delta-2}$ das erste Glied der Reihe für $\partial^2 y_x$ wird, welches mit dem ersten Gliede $aA_0 x^{\alpha+n}$ der andern Reihe verglichen werden kann. Dadurch erhält man, es mag $\alpha = 0$ oder $\alpha = 1$ seyn,

$$\delta - 2 = n, \quad \text{also} \quad \delta = n+2$$

und dann noch

$$(\alpha+\delta)^{2I-1} A_1 + aA_0 = 0; \quad (\alpha+2\delta)^{2I-1} A_2 + aA_1 = 0;$$

u. s. w. f.

Man findet auf diesem Wege, je nachdem $\alpha = 0$ oder $\alpha = 1$ genommen wird, zwei Reihen für y, welche die unbestimmte Constante A_0 in sich aufnehmen, wofür wir bequemer bloß A schreiben, nämlich:

$$y = A\left(1 - \frac{ax^{n+2}}{(n+1)^{2I1}} + \frac{a^2 x^{2n+4}}{(n+1)^{2I1}\cdot(2n+3)^{2I1}} - \frac{a^3 x^{3n+6}}{(n+1)^{2I1}\cdot(2n+3)^{2I1}\cdot(3n+5)^{2I1}} + \ldots\right)$$

und

$$y = Ax\left(1 - \frac{ax^{n+2}}{(n+2)^{2n}} + \frac{a^2x^{2n+4}}{(n+2)^{2n}\cdot(2n+4)^{2n}} - \frac{a^3x^{3n+6}}{(n+2)^{2n}\cdot(2n+4)^{2n}\cdot(3n+6)^{2n}} + \ldots\right).$$

Diese beiden Integrale sind jedoch nur besondere Integrale, in so fern sie nicht zwei willkührliche (unbestimmte) Constanten enthalten. Weil aber die gegebene Differential-Gleichung eine lineäre ist, so genügt ihr auch die Summe der beiden so eben gefundenen Reihen, und auch dann noch, wenn statt des zweiten A lieber B gesetzt, und dieses B als eine neue willkührliche (von A unabhängige) Constante angesehen wird. So hat man zuletzt doch das allgemeine Integral mit zwei willkührlichen Constanten.

III. Diesen Beispielen wollen wir nur noch hinzufügen, daß in den Anwendungen auf physikalisch-mathematische Probleme die Natur des Gegenstandes häufig die Form der Reihe angiebt, welche man wählen muß, um convergente Reihen zu haben. Endlich sucht man in den Anwendungen häufig nur kleine Korrektionen zu schon bekannten Näherungs-Werthen, so daß dann die Differential-Gleichung selber schon eine einfachere Gestalt annimmt und daher leichter behandelt werden kann. In den Anwendungen selbst findet man aber die, ihnen eigenthümlichen Verfahrungs-Arten auch näher beschrieben.

§. 47.

Wir beschließen dieses Kapitel, indem wir in einigen Worten noch mittheilen, wie in den Anwendungen die während der Integration eingegangenen unbestimmten Constanten näher bestimmt werden.

Gewöhnlich weiß man nämlich in den Anwendungen den Werth $y = b$, der zu einem Werth $x = a$ gehört. Ist nun

$$f_{x,y,c} = 0$$

das gefundene Integral, so muß $f_{a,b,c} = 0$ identisch werden,

und aus dieser letztern Gleichung findet sich dann c ohne Weiteres; und der gefundene Werth von c bleibt für alle die Werthe von x giltig, für welche y seine Stetigkeit nicht ändert.

Hat das Integral, weil es von einer Differential-Gleichung der zweiten Ordnung herrührt, zwei willkührliche Constanten aufgenommen, so muß man nicht bloß den Werth $y = b$, sondern auch den Werth $\partial y_x = \beta$ kennen, der in diesem Falle der Anwendung, zu $x = a$ gehört. Indem man dann dies Integral

$$f_{x,y,c,c'} = 0,$$

differenziirt, also $\partial f_x + \partial f_y \cdot \partial y_x = 0$ erhält, so müssen diese beiden Gleichungen identisch werden, wenn man in ihnen a statt x und gleichzeitig b und β statt bezüglich y und ∂y_x substituirt. Aus den dadurch entstehenden beiden Gleichungen kann man nun aber die beiden Constanten c und c' so bestimmen, wie sie seyn müssen, damit diesen letztern Bedingungen genügt werde.

Sechstes Kapitel.

Von der Integration der Gleichungen zwischen drei und mehr Veränderlichen, sowohl der totalen als auch der Partial-Gleichungen *).

Erster Abschnitt.

Integration der totalen Gleichungen mit drei Veränderlichen.

§. 48.

I. Wir haben bereits im §. 36. II.) gesehen, daß die Gleichung

$$1) \qquad P\cdot\partial x_t + Q\cdot\partial y_t + R\cdot\partial z_t = 0\ **),$$

wo P, Q und R gegebene Funktionen von x, y und z sind, nur dann integrabel ist, wenn die drei Bedingungs-Gleichungen

$$\partial P_y = \partial Q_x;\quad \partial Q_z = \partial R_y \quad \text{und} \quad \partial R_x = \partial P_z$$

erfüllt sind. Sind sie nun nicht erfüllt, so kann man (nach §. 40. II.) den integrirenden Faktor μ aus den drei Gleichungen

$$2) \quad \partial(\mu P)_y = \partial(\mu Q)_x;\quad \partial(\mu Q)_z = \partial(\mu R)_y$$

$$\text{und} \quad \partial(\mu R)_x = \partial(\mu P)_z$$

bestimmen. Diese drei Gleichungen nehmen aber die Form an

---

*) Dieses Kapitel kann bei'm ersten Lesen dieses Buches überschlagen werden.

**) Sind x, y, z als Funktionen von t gedacht, so existiren drei Gleichungen zwischen x, y, z und t. — Eliminirt man dann t aus diesen drei Gleichungen, so bleiben zwei Gleichungen zwischen x, y und z; folglich kann man dann auch y und z als Funktionen von x ansehen. Dividirt man daher die obige Gleichung 1.) durch ∂x_t, so erhält man

$$P + Q\cdot\partial y_x + R\cdot\partial z_x = 0.$$

$$3)\quad \begin{cases} \mu\cdot(\partial P_y - \partial Q_x) + P\cdot\partial\mu_y - Q\cdot\partial\mu_x = 0 \\ \mu\cdot(\partial Q_z - \partial R_y) + Q\cdot\partial\mu_z - R\cdot\partial\mu_y = 0 \\ \mu\cdot(\partial R_x - \partial P_z) + R\cdot\partial\mu_x - P\cdot\partial\mu_z = 0. \end{cases}$$

Multiplicirt man die erstere dieser Gleichungen mit R, die andere mit P, die dritte mit Q, und addirt man alle drei Gleichungen, so kann man das Resultat durch μ wegdividiren und man erhält

$$(\odot)\cdots\ R(\partial P_y - \partial Q_x) + Q(\partial R_x - \partial P_z) + P(\partial Q_z - \partial R_y) = 0.$$

Dies ist eine Bedingungs-Gleichung, welche erfüllt seyn muß, wenn die Gleichung 1.) einen integrirenden Faktor soll haben können, d. h. wenn eine Ur-Gleichung zwischen x, y und z soll existiren können, welche der gegebenen 1.) genügt.

II. Dieselbe Bedingungs-Gleichung erhält man aber auch auf folgendem Wege:

Existirt eine solche Gleichung zwischen x, y und z, so ist $z = z_{x,y}$, also, wenn man x um dx, und y um dy wachsen läßt, und wenn dann z um dz wächst,

$$4)\qquad dz = \partial z_x\cdot dx + \partial z_y\cdot dy.$$

Auf der andern Seite giebt die Gleichung 1.), wenn man sich diese Zuwachse dadurch entstanden denkt, daß t um dt wächst

$$5)\qquad P\cdot dx + Q\cdot dy + R\cdot dz = 0$$

oder

$$dz = -\frac{P}{R}\cdot dx - \frac{Q}{R}\cdot dy.$$

Vergleicht man diese beiden Gleichungen 4.) und 5.) mit einander, so folgt

$$6)\qquad \partial z_x = -\frac{P}{R} \text{ und } \partial z_y = -\frac{Q}{R}.$$

Eliminirt man aber nun aus diesen beiden Gleichungen die Ableitungen des Veränderlichen z, dadurch daß man die erstere nach y, die andere nach x differenziirt und dann die beiden Ausdrücke für $\partial^{1,1} z_{x,y}$ einander gleich setzt, so erhält man

$$7)\qquad \partial\left(\frac{P}{R}\right)_{(y)} = \partial\left(\frac{Q}{R}\right)_{(x)}$$

oder

$$R.\partial P_{(y)} - P\cdot\partial R_{(y)} = R\cdot\partial Q_{(x)} - Q\cdot\partial R_{(x)},$$

welche Gleichung identisch seyn muß, so oft man statt z die Funktion $z_{x,y}$ substituirt; so daß z. B.

$$\partial P_{(y)} = \partial P_y + \partial P_z\cdot\partial z_y = \partial P_y - \partial P_z\cdot\frac{Q}{R},$$

$$\partial R_{(y)} = \partial R_y + \partial R_z\cdot\partial z_y = \partial R_y - \partial R_z\cdot\frac{Q}{R};$$

ferner

$$\partial Q_{(x)} = \partial Q_x + \partial Q_z\cdot\partial z_x = \partial Q_x - \partial Q_z\cdot\frac{P}{R},$$

$$\partial R_{(x)} = \partial R_x + \partial R_z\cdot\partial z_x = \partial R_x - \partial R_z\cdot\frac{P}{R}$$

wird. Substituirt man aber dies in 7.), so erhält man die Gleichung ⊙.) wieder.

III. Man braucht aber auch nicht einmal Differentialien, d. h. unendlich-kleine Zuwachse zuzuziehen, um zu dieser letztern Rechnung zu gelangen. — Existirt nämlich nur eine Gleichung zwischen x, y und z, so kann man daraus zwar $z = z_{x,y}$ finden, und x und y bleiben von einander ganz unabhängig; allein man kann dann x und y doch noch als Funktionen von t denken, aber als völlig unbestimmte, beliebige, von einander unabhängige, so daß auch ∂x_t und ∂y_t völlig von einander unabhängig und völlig willkührlich bleiben, während ∂z_t durch die Gleichung 1.) mit ∂y_t und ∂x_t zusammenhängt. Dann hat man aus $z = z_{x,y}$

$$4')\qquad \partial z_t = \partial z_x\cdot\partial x_t + \partial z_y\cdot\partial y_t \quad \text{(statt der 4.)}$$

und zugleich

$$5')\qquad \partial z_t = -\frac{P}{R}\cdot\partial x_t - \frac{Q}{R}\cdot\partial y_t \quad \text{(statt der 5.).}$$

Und eben weil nun diese beiden Ausdrücke für ∂z_t, einander gleich seyn müssen, für ganz beliebige und von einander unabhängige Funktionen von t, die statt x und y nur immer gesetzt werden mögen, so finden nothgedrungen die Gleichungen 6.)

und dann auch 7.) statt, und so gelangt man also sogleich wieder zur Bedingungs-Gleichung ⊙.).

IV. Ist aber die Bedingungs-Gleichung ⊙.) erfüllt, so findet man den Faktor μ aus zweien der Gleichungen 3.), oder man integrirt auch sogleich nach folgender Methode.

Man sucht zuerst den integrirenden Faktor μ für die Funktion

$$P \cdot \partial x_t + Q \cdot \partial y_t$$

indem man sich z als constant denkt, und bestimmt

$$8) \qquad \int (\mu P \cdot \partial x_t + \mu Q \cdot \partial y_t) \cdot dt = U,$$

wo U nun eine bekannte Funktion von x und y ist, die auch noch z enthält, während Z die willkührliche unbestimmte Constante vorstellen soll, welche zu diesem Integral U noch hinzutritt und welche weder x noch y enthalten kann, welche daher bloß als eine Funktion von z allein angesehen werden darf. Man sucht nun Z so, daß

$$9) \qquad U + Z = 0$$

die gesuchte Integral-Gleichung der 1.) ist. Zu dem Ende differenziirt man letztere und erhält

$$10) \qquad \partial U_x \cdot \partial x_t + \partial U_y \cdot \partial y_t + (\partial U_z + \partial Z_z) \cdot \partial z_t = 0,$$

während aus 8.)

$$\partial U_x = \mu P \quad \text{und} \quad \partial U_y = \mu Q$$

hervorgeht, so daß die Gleichung 10.) so wird:

$$11) \qquad \mu P \cdot \partial x_t + \mu Q \cdot \partial y_t + (\partial U_z + \partial Z_z) \cdot \partial z_t = 0.$$

Da nun diese Gleichung mit der 1.) zusammenfallen soll, so muß

$$\partial U_z + \partial Z_z = \mu R \quad \text{oder} \quad \partial Z_z = \mu R - \partial U_z$$

werden, so daß man noch

$$12) \qquad Z = \int (\mu R - \partial U_z) \cdot dz$$

erhält, während aus $\mu R - \partial U_z$ alle x von selbst herausfallen müssen, sobald man statt y seinen aus 9.) genommenen Werth substituirt. Kann man nun beweisen, daß dieses allemal der Fall ist, so oft sich die Bedingungs-Gleichung ⊙.) erfüllt sieht, so ist das so eben beschriebene Verfahren zulässig.

Damit aber in $\mu R - \partial U_z$ kein x mehr enthalten sey, muß

13) $$\partial(\mu R - \partial U_z)_{(x)} = 0,$$

d. h. $$\partial(\mu R)_x + \partial(\mu R)_y \cdot \partial y_x - \partial^{1,1} U_{x,z} - \partial^{1,1} U_{y,z} \cdot \partial y_x = 0$$

seyn, während ∂y_x aus $\partial(U+Z)_{(x)} = 0$, d. h. aus

$$\partial U_x + \partial U_y \cdot \partial y_x = 0$$

entnommen werden muß. Dadurch geht nun diese Bedingungs-Gleichung 3.) über in

14) $$(\partial(\mu R)_x - \partial^{1,1} U_{x,z}) \cdot \partial U_y - (\partial(\mu R)_y - \partial^{1,1} U_{y,z}) \cdot \partial U_x = 0.$$

Nun ist aber

$$\partial U_x = \mu P \quad \text{und} \quad \partial U_y = \mu Q,$$

also $$\partial^{1,1} U_{x,z} = \partial(\mu P)_z \text{ und } \partial^{1,1} U_{y,z} = \partial(\mu Q)_z.$$

Substituirt man also diese Werthe in die Gleichung 14.), so erhält man

$$[\partial(\mu R)_x - \partial(\mu P)_z] \cdot Q - [\partial(\mu R)_y - \partial(\mu Q)_z] \cdot P = 0$$

d. h. wenn man μP, μQ, μR als Produkte differenziirt und aufhebt,

15) $$[\mu(\partial R_x - \partial P_z) + R \cdot \partial \mu_x] \cdot Q - [\mu(\partial R_y - \partial Q_z) + R \cdot \partial \mu_y] \cdot P = 0.$$

Weil aber μ ein integrirender Faktor gewesen ist von $P \cdot \partial x_t + Q \cdot \partial y_t$, so genügt er (nach §. 40. II.) der Bedingungs-Gleichung

16) $$\mu(\partial P_y - \partial Q_x) + P \cdot \partial \mu_y - Q \cdot \partial \mu_x = 0.$$

Eliminirt man aber nun aus beiden Gleichungen 15.) und 16.) $\partial \mu_x$ (dadurch daß man die 16.) mit R multiplicirt und zur 15. addirt), so kann man die entstehende Gleichung durch μ dividiren, und sie geht dann in die Bedingungs-Gleichung ⊙.) über. Die Bedingungs-Gleichung ⊙.) ist daher keine andere als die 13.), welches zu erweisen war.

Ist also Z aus 12.) und U aus 8.) gefunden, so ist die Gleichung 9.) das Integral der Gleichung 1.).

§. 49.

Ist die Bedingungs-Gleichung ⊙.) des §. 48.) nicht erfüllt, — existirt also nicht eine einzige Gleichung zwischen x, y und z, welche als Integral der Gleichung

1) $$P \cdot \partial x_t + Q \cdot \partial y_t + R \cdot \partial z_t = 0$$

angesehen werden kann, so darf man nur zwischen x, y, z noch irgend eine zweite beliebige Differential- oder Ur-Gleichung annehmen, um zwei Gleichungen zu haben, aus denen man dann nach dem Verfahren des §. 43.) y und z in x ausgedrückt finden kann. Das Problem gehört also dann zu den unbestimmten, und schließt sich an dasjenige der gemeinen Algebra an,

wo eine einzige Gleichung zwischen mehr als einen Unbekannten gegeben seyn sollte.

Die Rechnung IV. des §. 48.) läßt aber augenblicklich sehen, daß wenn man μ und U genau so wie in §. 48. IV.) findet, und statt — Z eine völlig beliebige Funktion φ_z setzt, dann die beiden Gleichungen

$$2) \quad \left\{ \begin{array}{c} U_{x,y,z} = \varphi_z \\ \partial U_z - \mu R = \partial \varphi_z \end{array} \right\}$$

in Verbindung, d. h. als zwei Gleichungen zwischen den drei Unbekannten x, y und z, der Gleichung 1.) allemal genügen, während φ_z eine ganz willkührliche Funktion von z bleibt, sobald nur μ irgend einer der integrirenden Faktoren von $P \cdot \partial x_t + Q \cdot \partial y_t$ ist.

Diese Gleichungen 2.) enthalten zwar nicht alle Auflösungen, welche die unbestimmte Aufgabe zuläßt, dagegen, wegen der Willkührlichkeit der Funktion φ_z, doch eine unendliche Menge verschiedener Auflösungen nach den unendlich vielen verschiedenen Formen, welche dem φ_z gegeben werden können. — Sehr ausführliches hierüber findet man im „System d. Mathemat." Th. VI.

Zweiter Abschnitt.

Integration der Partial-Gleichungen.

§. 50.

Integration der lineären Partial-Gleichungen der ersten Ordnung.

Wenn eine Differential-Gleichung zwischen drei Veränderlichen x, y und z, außer diesen Veränderlichen bloß noch Ableitungen von z nach x allein enthält, so ist solche nicht als eine Partial-Gleichung anzusehen, sondern als eine totale Differential-Gleichung zwischen den beiden Veränderlichen x und z, die auch noch einen constanten Parameter y enthält, gerade

so wie sie noch mehrere solche constante Parameter a, b, c, etc. etc. enthalten kann.

Unter den einfachsten Partial-Gleichungen dagegen steht die lineäre

1) $$P \cdot \partial z_x + Q \cdot \partial z_y = R$$

oben an, wo P, Q und R gegebene Funktionen von x, y und z sind. — Ihr Integral wird nach folgenden von Lagrange gegebenen praktischen Regeln gefunden.

Man integrirt nämlich die beiden totalen Gleichungen

2) $$\frac{\partial x_t}{P} = \frac{\partial y_t}{Q} = \frac{\partial z_t}{R}$$

zwischen den drei Veränderlichen x, y und z (nach §. 43.), indem man alle drei als Funktionen eines vierten t, oder, was dasselbe ist, indem man zwei derselben als Funktionen des dritten ansieht. Die beiden Integral-Gleichungen zwischen x, y und z, welche man dadurch erhält und welche zwei willkührliche Constanten c und c′ in sich aufnehmen, löst man nach letzteren algebraisch auf, so daß man

3) $c = f_{x,y,z}$ und 4) $c' = \varphi_{x,y,z}$

erhält, wo also f und φ bestimmte und bekannte Funktionen von x, y und z sind. Zuletzt nimmt man

5) $\Pi_{f,\varphi} = 0$ oder 6) $f = F_\varphi$,

wo Π eine ganz willkührliche unbestimmte Funktion von f und φ, oder wo F eine ganz willkührliche unbestimmte Funktion von φ vorstellt; — und diese Gleichung 5.) oder 6.) ist das gesuchte Integral der gegebenen lineären Partial-Gleichung 1.).

Differenziirt man nämlich $f = F_\varphi$ sowohl nach x, als auch nach y, so erhält man

7) $$\partial f_x + \partial f_z \cdot \partial z_x = \partial F_\varphi \cdot (\partial \varphi_x + \partial \varphi_z \cdot \partial z_x)$$

und

8) $$\partial f_y + \partial f_z \cdot \partial z_y = \partial F_\varphi \cdot (\partial \varphi_y + \partial \varphi_z \cdot \partial z_y),$$

und eliminirt man nachgehends aus allen drei Gleichungen 6.—8.) sowohl F_φ als auch ∂F_φ, d. h. aus den beiden Gleichungen 7.) und 8.), welche bereits F_φ nicht mehr enthalten, noch

noch ∂F_φ, so erhält man genau die gegebene lineäre Partial-Gleichung 1.) wieder; deshalb wird die Gleichung 6.) das Integral der 1.) genannt.

Zu diesem Verfahren gelangt man aber mittelst folgender Schlüsse: Wird nämlich das gesuchte Integral der Gleichung 1.) durch

9) $$\Pi_{x,y,z} = 0$$

vorgestellt, so muß, wenn man aus

$$\partial\Pi_{(x)} = 0, \quad \text{d. h.} \quad \partial\Pi_x + \partial\Pi_z \cdot \partial z_x = 0$$

und

$$\partial\Pi_{(y)} = 0, \quad \text{d. h.} \quad \partial\Pi_y + \partial\Pi_z \cdot \partial z_y = 0$$

die Ableitungen ∂z_x und ∂z_y findet, und diese Werthe in die 1.) substituirt, nothwendig eine identische Gleichung, nämlich

10) $$P \cdot \partial\Pi_x + Q \cdot \partial\Pi_y + R \cdot \partial\Pi_z = 0$$

entstehen. Die gesuchte Funktion $\Pi_{x,y,z}$ hat also die Eigenschaft, daß sie die Gleichung 10.) identisch macht (nach x allein, nach y allein, und nach z allein d. h.) während x, y, z als von einander ganz unabhängig angesehen werden. Und umgekehrt: jede Funktion $\Pi_{x,y,z}$, welche die Gleichung 10.) auf diese Weise identisch macht, liefert eine Gleichung $\Pi = 0$, welche ein, der Partial-Gleichung genügender Werth seyn muß, welche also eben so gut ein besonderes, als das allgemeine Integral der gegebenen Partial-Gleichung 1.) seyn kann. Man hat aber, sobald man sich x, y, z als Funktionen von t denkt,

11) $$\partial\Pi_{(t)} = \partial\Pi_x \cdot \partial x_t + \partial\Pi_y \cdot \partial y_t + \partial\Pi_z \cdot \partial z_t.$$

Eliminirt man nun aus den Gleichungen 10.) und 11.) einen der drei gemeinschaftlichen Koefficienten $\partial\Pi_x$, $\partial\Pi_y$ oder $\partial\Pi_z$, z. B. den letzteren, so erhält man:

12) $$R \cdot \partial\Pi_{(t)} = (R \cdot \partial x_t - P \cdot \partial z_t) \cdot \partial\Pi_x + (R \cdot \partial y_t - Q \cdot \partial z_t) \cdot \partial\Pi_y,$$

welche Gleichung nun statt der 10.) steht, und welcher daher genügt werden muß. Dieser Gleichung 12.) wird aber offenbar am allgemeinsten genügt, wenn man x, y, z als solche Funktionen von t sich denkt, welche die Koefficienten von $\partial\Pi_x$ und $\partial\Pi_y$ einzeln der Null gleich, welche also

$$R \cdot \partial x_t - P \cdot \partial z_t = 0 \quad \text{und} \quad R \cdot \partial y_t - Q \cdot \partial z_t = 0,$$

d. h. $$\frac{\partial x_t}{P} = \frac{\partial z_t}{R} \quad \text{und} \quad \frac{\partial y_t}{Q} = \frac{\partial z_t}{R}$$

machen, und wenn zuletzt statt Π eine solche Funktion von x, y, z gesetzt wird, daß man noch $\partial\Pi_{(t)} = 0$ erhält, so oft man statt x, y, z die Funktionen von t setzt, welche diesen beiden Gleichungen genügen. Diesen letztern Zweck erreicht aber das oben gegebene Verfahren, wenn man $\Pi_{f,\varphi}$ statt $\varkappa_{x,y,z}$ setzt, weil nach selbigem die gedachten Funktionen x, y, z von t, die

Ausdrücke f und φ in Constanten (nach t) verwandeln, so daß dann $\partial(\Pi_{f,\varphi})_{(t)}$ nothwendig der Null gleich wird.

Beispiel. Es sey zu integriren die Partial-Gleichung

1′) $$x \cdot \partial z_x + y \cdot \partial z_y = nz.$$

Man integrirt also zuerst die beiden totalen Gleichungen

2′) $$\frac{\partial x_t}{x} = \frac{\partial y_t}{y} = \frac{\partial z_t}{nz},$$

d. h.

3′) $$\frac{\partial x_t}{x} = \frac{\partial y_t}{y} \quad \text{und} \quad \frac{n \cdot \partial x_t}{x} = \frac{\partial z_t}{z},$$

und erhält

4′) $$y = cx \quad \text{und} \quad c'x^n = z,$$

folglich

5′) $$c = \frac{y}{x} \quad \text{und} \quad c' = \frac{z}{x^n}.$$

Man nimmt also

6′) $$\varphi = \frac{y}{x} \quad \text{und} \quad f = \frac{z}{x^n}$$

und hat dann als gesuchtes Integral

7′) $$\frac{z}{x^n} = F_{y:x} \quad \text{oder} \quad z = x^n \cdot F_{y:x}\ ^*),$$

wo F eine ganz willkührliche Funktion von $\frac{y}{x}$ vorstellt.

---

*) Setzt man also statt $F_{y:x}$ nach und nach $a\frac{y}{x}$, oder $a\frac{y}{x} + b\frac{y^2}{x^2}$, oder $sin\,\frac{y}{x}$ oder $log\,y - log\,x$ oder $a\frac{y}{x} - b\frac{x}{y}$, oder $a\frac{y^\mu}{x^\mu} - b\frac{x^\nu}{y^\nu}$, etc. etc., so erhält man nach und nach die besonderen Integrale

$z = ax^{n-1}y$; $\quad z = ax^{n-1}y + bx^{n-2}y^2$;

$z = x^n \cdot sin\,\frac{y}{x}$; $\quad z = x^n(log\,y - log\,x)$;

$z = ax^{n-1}y - b\frac{x^{n+1}}{y} + cx^n$; $\quad z = ax^{n-\mu}y^\mu - b\frac{x^{n+\nu}}{y^\nu}$;

u. s. w. f. — Jedes dieser besondern Integrale hat aber die Eigenschaft, daß wenn man solches nach x und nach y differenziirt, und dann aus allen drei Gleichungen z, ∂z_x und ∂z_y findet, solche Werthe aber in die Gleichung 1′.) substituirt, letztere identisch $0 = 0$ wird.

Anmerkung. Wollte man die lineäre Partial-Gleichung

$$P \cdot \partial u_x + Q \cdot \partial u_y + R \cdot \partial u_z = S$$

zwischen den vier Veränderlichen x, y, z und u integriren, wo P, Q, R und S gegebene Funktionen von x, y, z und u vorstellen, so würde man wie folgt verfahren:

Man integrirt die drei totalen Differential-Gleichungen

$$\frac{\partial x_t}{P} = \frac{\partial y_t}{Q} = \frac{\partial z_t}{R} = \frac{\partial u_t}{S}$$

und erhält drei Ur-Gleichungen zwischen x, y, z und u und noch drei willkührlichen Constanten c, c′ und c″. Diese letztern drei Gleichungen löst man nun nach diesen Constanten c, c′, c″ auf, so daß man erhält

$$c = f_{x,y,z,u}, \quad c' = \varphi_{x,y,z,u} \quad \text{und} \quad c'' = \psi_{x,y,z,u}.$$

Hernach nimmt man

$$\Pi_{f,\varphi,\psi} = 0 \qquad \text{oder} \qquad f = F_{\varphi,\psi},$$

wo Π eine ganz willkührliche Funktion von f, φ und ψ, oder wo F eine ganz willkührliche Funktion von φ und ψ ist, und diese Gleichung ist das allgemeine Integral der gegebenen Partial-Differential-Gleichung.

Endlich ist es leicht, dies Verfahren auf lineäre Partial-Gleichungen der ersten Ordnung zwischen beliebig viel Veränderlichen auszudehnen.

§. 51.

Integration der nicht lineären Partial-Gleichungen der ersten Ordnung.

Es ist dem Lagrange auch gelungen die Integration der nicht lineären Partial-Gleichungen der ersten Ordnung auf die der lineären zurückzuführen.

Ist nämlich die beliebige Partial-Gleichung der ersten Ordnung zwischen drei Veränderlichen

1) $$F_{x,y,z,\partial z_x,\partial z_y} = 0$$

zu integriren, so führt man zwei neue Veränderliche p und q mittelst der Gleichungen

2) $\partial z_x = p$ und $\partial z_y = q$

ein, so daß die gegebene Gleichung 1.) übergeht in

3) $F_{x,y,z,p,q} = 0;$

und man hat nun p und q als solche Funktionen von x, y und z, zu gleicher Zeit aber z als eine solche Funktion von x und y zu suchen, daß den drei Gleichungen 2.) und 3.) am allgemeinsten ein Genüge geschieht. Findet man aber aus der Gleichung 3.) q in x, y, z und p ausgedrückt, also

4) $q = q_{x,y,z,p}$,

so ist dieser Gleichung 3.) genügt, sobald man nur überall unter q diese Funktion $q_{x,y,z,p}$ vorgestellt sich denkt. — Es bleibt daher jetzt nur noch, unter dieser letztern Voraussetzung, den Gleichungen 2.), d. h. wenn man x, y und z als Funktionen von t sich denkt, der einzigen totalen Differential-Gleichung

5) $\partial z_t - p \cdot \partial x_t - q_{x,y,z,p} \cdot \partial y_t = 0$

zu genügen übrig *), d. h. man darf jetzt nur noch die totale Gleichung 5.) integriren, dabei aber statt p eine ganz beliebige Funktion von x, y und z setzen, welche jedoch die Gleichung 5.) integrabel macht, d. h. welche der Bedingungs-Gleichung der Integrabilität (§. 48. I. ⊙.) genügt, nämlich der Gleichung

6) $\partial p_y - \partial q_{(x)} + q \cdot \partial p_z - p \cdot \partial q_{(z)} = 0.$

Nun ist aber (nach 4.)

7) $\partial q_{(x)} = \partial q_x + \partial q_p \cdot \partial p_x$ und $\partial q_{(z)} = \partial q_z + \partial q_p \cdot \partial p_z$;

und weil q durch die Gleichung 3.) gegeben ist, solche Gleichung 3.) also identisch wird, wenn man statt q die Funktion

---

*) Denkt man sich nämlich x, y, z als Funktionen von t, so ist allemal, wenn z die gesuchte Funktion von x und y vorstellt,

$$\partial z_t = \partial z_x \cdot \partial x_t + \partial z_y \cdot \partial y_t,$$

d. h. $\partial z_t = p \cdot \partial x_t + q \cdot \partial y_t,$

oder $\partial z_t - p \cdot \partial x_t - q \cdot \partial y_t = 0,$

und das Integral dieser totalen und integrablen Differential-Gleichung giebt wieder die Ur-Gleichung zwischen x, y und z, welche die gesuchte Funktion z von x und y liefert.

$q_{x,y,z,p}$ subſtituirt ſich denkt, ſo giebt ſie noch, wenn man ſie nach allem x, nach allem z, und nach allem p differenziirt:

8) $\partial F_x + \partial F_q \cdot \partial q_x = 0$, $\partial F_z + \partial F_q \cdot \partial q_z = 0$

und $\partial F_p + \partial F_q \cdot \partial q_p = 0$.

Dadurch geht aber die Gleichung 6.), in ſo fern man ſtatt $\partial q_{(x)}$ und $\partial q_{(z)}$ ihre Werthe aus 7.) und dann ſtatt ∂q_x, ∂q_z und ∂q_p ihre Werthe aus 8.) ſubſtituirt, über in

9) $\partial F_q \cdot \partial p_y + \partial F_p \cdot \partial p_x + (q \cdot \partial F_q + p \cdot \partial F_p) \cdot \partial p_z = -(\partial F_x + p \cdot \partial F_z)$,

wo man ſich unter q die in 4.) gefundene Funktion $q_{x,y,z,p}$ zu denken hat.

Man hat daher nun der lineären Gleichung 9.) nach §. 50.) zu genügen, dann q aus 4.) dazu zu finden, — beide in x, y und z ausgedrückt, — dann aber dieſe Werthe in die totale Differential-Gleichung

10) $\partial z_t - p \cdot \partial x_t - q \cdot \partial y_t = 0$,

ſtatt p und q zu ſubſtituiren und letztere nach Anleitung des vorhergehenden Abſchnittes zu integriren und man hat die geſuchte Ur-Integral-Gleichung zwiſchen x, y und z, welche der gegebenen Partial-Gleichung zukommt.

Findet man nur ein beſonderes Integral der Gleichung 9.), ſo erhält man auch nur ein beſonderes Integral aus 10.) für die Gleichung 1.). — Findet man aber das allgemeinſte Integral der Gleichung 9.), ſo erhält man aus 10.) auch das allgemeinſte Integral der Gleichung 1.). Weil aber dann p und q eine willkührliche Funktion von einer beſtimmten Funktion von x, y und z in ſich aufnehmen, ſo erfordert das Integriren der totalen Differential-Gleichung 10.) dann noch beſondere Umformungen, wegen welcher wir auf das „Syſtem der Mathematik" Th. VII. §. 436 seqq. verweiſen müſſen.

Anmerkung 1. Man hat dieſe Methode des Lagrange lange vergebens auf Gleichungen zwiſchen vier oder mehr Veränderlichen zu erweitern geſucht, bis es endlich dem Jacobi gelungen iſt, dieſe Erweiterung in ſo fern durchzuſetzen, als er

solche von einer andern durch Pfaff gegebenen Methode abhängig machte. In dem „System der Mathematik Th. VII §. 439. seqq." findet man neben dem Verfahren des Jacobi auch noch die ganz unabhängige Erweiterung dieser Methode, welche jedoch im Wesentlichen mit der des Jacobi zusammenfällt und nur zuletzt von ihr abweicht, so daß sie vermöge dieser Abweichung selbstständig wird.

Anmerkung 2. Für besondere Fälle hat man auch besondere Methoden aufgefunden.

Ist z. B., wenn

1) $$\partial z_x = p \quad \text{und} \quad \partial z_y = q$$

gesetzt wird, die gegebene Partial-Gleichung auf die Form

2) $$f_{p,x} = F_{q,y}$$

zu bringen, so setze man jede dieser beiden gleichen Funktionen einem neuen Veränderlichen w gleich, und finde aus

3) $$f_{p,x} = w \quad \text{und} \quad F_{q,y} = w$$

zunächst

4) $$p = \varphi_{x,w} \quad \text{und} \quad q = \psi_{y,w}.$$

Sind nun x und y als willkührliche von einander ganz unabhängige Funktionen von t gedacht, so sind auch z, p, q und w (von diesen erstern abhängige) Funktionen von t, dergestalt, daß man hat (aus $\partial z_t = \partial z_x \cdot \partial x_t + \partial z_y \cdot \partial y_t$)

5) $$\partial z_t = \varphi_{x,w} \cdot \partial x_t + \psi_{y,w} \cdot \partial y_t.$$

Findet man nun, indem man w als constant ansieht,

6) $$\int \varphi_{x,w} \cdot dx = P_{x,w} \quad \text{und} \quad \int \psi_{y,w} \cdot dy = Q_{y,w},$$

so ist, wenn jetzt w auch als Funktion von t angesehen wird,

$$\partial P_{(t)} = \partial P_x \cdot \partial x_t + \partial P_w \cdot \partial w_t,$$

also

7) $$\varphi_{x,w} \cdot \partial x_t = \partial P_x \cdot \partial x_t = \partial P_{(t)} - \partial P_w \cdot \partial w_t;$$

und

$$\partial Q_{(t)} = \partial Q_x \cdot \partial x_t + \partial Q_w \cdot \partial w_t,$$

also

8) $$\psi_{y,w} \cdot \partial y_t = \partial Q_y \cdot \partial y_t = \partial Q_{(t)} - \partial Q_w \cdot \partial w_t.$$

Die Gleichung 5.) geht dadurch über in

9) $\partial z_t = \partial P_{(t)} + \partial Q_{(t)} - (\partial P_w + \partial Q_w) \cdot \partial w_t$,

während ∂P_w und ∂Q_w auch noch bezüglich x und y enthalten, welche ebenfalls als Funktionen von t gedacht worden sind, so daß, wenn man $(\partial P_w + \partial Q_w) \cdot \partial w_t$ nach allem t integriren sollte, man nicht P+Q erhalten würde, wie dies der Fall seyn müßte, wenn ∂P_w kein x, und ∂Q_w kein y mehr enthielte. Setzt man aber

10) $$\partial P_w + \partial Q_w = \partial \Pi_w,$$

indem man sich unter Π_w, also auch unter $\partial \Pi_w$ eine ganz beliebige Funktion von w allein denkt, die weder x noch y noch z enthält, so kann man von der Gleichung 9.) links und rechts das Integral nach allem t nehmen, und man erhält dann

11) $$z = P + Q - \Pi_w.$$

Denkt man sich nun Π ganz willkührlich, und dann aus den Gleichungen 10.) und 11.) den Veränderlichen w eliminirt, so hat man die Gleichung zwischen x, y und z, welche auch noch eine willkührliche Funktion Π enthält, und welche als das Integral der Gleichung 2.) angesehen werden kann *).

Anmerkung 3. Ist, um ein zweites Beispiel zu geben, die zu integrirende Partial-Gleichung noch einfacher, nämlich bloß

1) $$f_{p,q} = 0 \quad \text{d. h.} \quad p = p_q,$$

während

---

*) Sind x, y und z rechtwinkliche Koordinaten-Werthe im Raume, so stellt die Gleichung 11.) nach den verschiedenen Werthen von w eine Reihe von Flächen vor, von denen je zwei unendlich wenig verschieden sind; und da die Gleichung 10.) nichts weiter ist als das, was aus der 11.) sich ergiebt, wenn man sie nach dem Parameter w differenziirt, so drücken die Gleichungen 10.) und 11.) in Verbindung, wenn w eliminirt wird, die Einhüllungs-Fläche aller der Flächen 11.) aus (nach I. Bd. §. 186.). — Und da in 11.) die Funktion Π jede beliebige ist, so drücken die Gleichungen 10.) und 11.) in Verbindung unendlich viele solche Einhüllungs-Flächen aus, welche alle der gegebenen Partial-Gleichung $f_{p,x} = F_{q,y}$ angehören; d. h. letztere Gleichung drückt eine Eigenschaft aus, welche allen diesen unendlich vielen Einhüllungs-Flächen gemein ist.

2) $\partial z_x = p$ und $\partial z_y = q$

vorausgesetzt wird, so hat man zu integriren die totale Differential-Gleichung

3) $\partial z_t = p_q \cdot \partial x_t + q \cdot \partial y_t$.

Nimmt man nun links und rechts die Integrale nach allem t, und integrirt man rechts beide Glieder theilweise (d. h. wendet man die Formel §. 4. N. 3.) an, so erhält man

4) $z = p_q \cdot x + q \cdot y - \int (x \cdot \partial p_q + y) \cdot \partial q_t \cdot dt$.

Nimmt man daher die beiden Gleichungen

5) $\begin{cases} z = p_q \cdot x + q \cdot y - \Pi_q \\ 0 = x \cdot \partial p_q + y - \partial \Pi_q, \end{cases}$

in denen Π_q eine ganz willkührliche Funktion vorstellt, und eliminirt man q aus ihnen, so erhält man das verlangte Integral der Gleichung 1.)

§. 52.

Allgemeine Betrachtungen über die Partial-Gleichungen der ersten Ordnung.

1) Während die totale Differential-Gleichung der ersten Ordnung bei ihrer Integration eine willkührliche Constante einführt, nimmt das allgemeine Integral einer Partial-Gleichung der ersten Ordnung zwischen x, y und z, allemal eine willkührliche Funktion Π_ω von ω auf, wobei ω eine bestimmte und aus der gegebenen Partial-Gleichung selbst zu findende Funktion von x, y und z vorstellt. —

In der That, wenn man eine Gleichung

1) $f_{x,y,z,\Pi_\omega} = 0$

nach x und nach y differenziirt, so erhält man

2) $\partial f_x + \partial f_z \cdot \partial z_x + \partial f_\Pi \cdot \partial \Pi_\omega \cdot (\partial \omega_x + \partial \omega_z \cdot \partial z_x) = 0$

3) $\partial f_y + \partial f_z \cdot \partial z_y + \partial f_\Pi \cdot \partial \Pi_\omega \cdot (\partial \omega_y + \partial \omega_z \cdot \partial z_y) = 0$.

Aus diesen drei Gleichungen, da ω, also auch $\partial\omega_x$, $\partial\omega_y$ und $\partial\omega_z$ bekannte Funktionen von x, y und z sind, kann man die beiden willkührlichen Ausdrücke Π_ω und $\partial\Pi_\omega$ eliminiren, und man wird eine Gleichung bloß zwischen x, y, z, ∂z_x und ∂z_y erhalten, welche von Π_ω keine Spur mehr hat, und welche die gegebene Partial-Gleichung der ersten Ordnung seyn muß, von welcher die Gleichung 1.) das allgemeine Ur-Integral ist.

Das allgemeine Integral der Partial-Gleichung der ersten Ordnung zwischen vier Veränderlichen x, y, z, t nimmt dagegen eine willkührliche Funktion $\Pi_{\omega,\omega'}$ in sich auf, während ω und ω' bestimmte Funktionen von x, y und z vorstellen. — U. s. w. f.

2) In dem allgemeinen Integral einer Partial-Gleichung zwischen drei Veränderlichen stecken alle besonderen, und diese letzteren können beliebig viele willkührliche Constanten in sich aufnehmen, in so fern man statt Π_ω einen Ausdruck setzen kann, der neben der bestimmten Funktion ω (von x, y und z) noch beliebig viele Constanten in sich aufnimmt. — Lagrange hat unter den besonderen Integralen dasjenige hervorgehoben, welches zwei willkührliche Constanten enthält, solches ein vollständiges Integral genannt und gezeigt, wie aus selbigem das allgemeine Integral wiederum gefunden werden könne.

Ist nämlich $f_{x,y,z,a,b} = 0$ das vollständige Integral, so setzt er statt b eine ganz willkührliche Funktion Π_ω, statt a aber ω selbst, und eliminirt dann aus

$$f_{x,y,z,\omega,\Pi_\omega} = 0 \quad \text{und} \quad \partial f_{(\omega)} = 0 \quad \text{d. h.} \quad \partial f_\omega + \partial f_\Pi \cdot \partial \Pi_\omega = 0$$

den Parameter ω; und hat dann das allgemeine Integral.

3) Zu diesen Arbeiten des Lagrange haben wir noch die merkwürdige Thatsache hinzugefügt (Syst. d. Mathem. Th. V. Kap. XIII.), daß man schon aus einem besonderen Integral, welches nur eine einzige willkührliche Constante a enthält, und welches wir ein ausreichendes genannt haben, das allgemeine Integral finden könne. — Man setzt nämlich in dem ausreichenden Integral

$$f_{x,y,z,a} = 0,$$

statt a eine willkührliche Funktion Π_ω und man hat das allgemeine Integral, sobald es noch gelingt ω zu finden. Um aber ω zu finden, setzt man in $f_{x,y,z,a} = 0$ bloß ω statt a, so daß man erhält

$$f_{x,y,z,\omega} = 0$$

und eliminirt aus dieser Gleichung und aus deren beiden ersten Ableitungs-Gleichungen

$$\partial f_x + \partial f_z \cdot \partial z_x + \partial f_\omega \cdot (\partial \omega_x + \partial \omega_z \cdot \partial z_x) = 0$$
$$\partial f_y + \partial f_z \cdot \partial z_y + \partial f_\omega \cdot (\partial \omega_y + \partial \omega_z \cdot \partial z_y) = 0,$$

sowohl ∂z_x als auch ∂z_y, und es bleibt eine Gleichung übrig zwischen x, y, z, ω, $\partial \omega_x$, $\partial \omega_y$ und $\partial \omega_z$, welche, da ihr $\omega = const.$ genügt, allemal in eine lineäre verwandelt und daher nach §. 50.) integrirt werden kann, während man ihr Integral nicht einmal braucht, sondern nur irgend einen ihr genügenden Werth statt ω nehmen kann, der weder eine willkührliche Funktion noch eine willkührliche Constante in sich aufzunehmen braucht. Diesen letztern findet man aber in den meisten Fällen versuchsweise am schnellsten.

4) In den Anwendungen erst lassen sich die willkührlichen Funktionen, welche die Integration einführt, nach den verschiedenen Nebenbedingungen der Aufgabe näher bestimmen, und kann solches in der Integral-Rechnung selber nicht geschehen.

§. 53.

Einiges über Integration der Partial-Gleichungen der zweiten Ordnung.

Da jede totale Differential-Gleichung der zweiten Ordnung zunächst ein erstes Integral mit einer willkührlichen Constante, und dieses, als Differential-Gleichung der ersten Ordnung, wiederum ein Integral mit einer zweiten willkührlichen Constante hat, so könnte man analoges auch von den Partial-Gleichungen der zweiten Ordnung vermuthen. Man könnte also glauben, daß eine Partial-Gleichung der zweiten Ordnung zwischen x, y und z allemal ein erstes Integral mit einer willkührlichen Funktion φ_ω zulasse, welches jedoch, als Partial-Gleichung der ersten Ordnung, abermals integrirt werden kann und dann noch eine willkührliche Funktion $\psi_{\omega'}$ einführt. —

Wie häufig aber diese Vermuthung in Einzelfällen sich gerechtfertigt sehen mag, so ist sie doch im Allgemeinen falsch.

I. Zuerst wollen wir zeigen, daß nicht jede Partial-Gleichung $F = 0$ der zweiten Ordnung zwischen drei Veränderlichen ein erstes Integral hat, obgleich von jeder ein Ur-Integral existirt. Existirte nämlich ein erstes Integral von $F = 0$, und wäre solches

$$W_{x,y,z,p,q} = 0, \text{ wo } \partial z_x = p \text{ und } \partial z_y = q$$

gesetzt worden ist, so enthielte $\partial W_{(x)} = 0$ die Ableitung ∂p_x d. h. $\partial^2 z_x$ und noch die Ableitung ∂q_x d. h. $\partial^{1,1} z_{x,y}$; während $\partial W_{(y)} = 0$ sowohl $\partial^{1,1} z_{x,y}$ als auch $\partial^2 z_y$ enthalten würde. Soll nun aus $F = 0$, $W = 0$, $\partial W_{(x)} = 0$ und $\partial W_{(y)} = 0$, dadurch daß man $\partial^2 z_x$, $\partial^{1,1} z_{x,y}$ nnd $\partial^2 z_y$ eliminirt, eine identische Gleichung hervorgehen können, so muß, wenn aus $F = 0$, $\partial W_{(x)} = 0$ und $\partial W_{(y)} = 0$ die beiden Ausdrücke $\partial^2 z_x$ und $\partial^2 z_y$ eliminirt werden, aus der entstehenden Eliminations-Gleichung die Ableitung $\partial^{1,1} z_{x,y}$, die wir durch s bezeichnen, von selbst herausfallen, weil sie in $W = 0$ ohnedies nicht vorkommt.

Nimmt nun die Eliminations-Gleichung im Allgemeinen die Form

$$A + B \cdot s + C \cdot s^2 + \cdots = 0$$

an, so muß $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, etc. etc. seyn, wenn ein solches erstes Integral $W = 0$ von $F = 0$ soll existiren können. — Diese Gleichungen $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, etc. etc. sind also die Bedingungs-Gleichungen der Existenz eines ersten Integrals, und diese kann man zur Auffindung dieses ersten Integrals selbst wieder benutzen. (S. Syst. d. Mathem. Th. V. §. 322.)

II. Ferner würde man aus einer Ur-Gleichung $W_{x,y,z} = 0$, und deren fünf Ableitungs-Gleichungen $\partial W_{(x)} = 0$, $\partial W_{(y)} = 0$, $\partial^2 W_{(x)} = 0$, $\partial^{1,1} W_{(x,y)} = 0$ und $\partial^2 W_{(y)} = 0$ nicht die sechs willkührlichen Funktionen φ_ω, $\psi_{\omega'}$, $\partial\varphi_\omega$, $\partial\psi_{\omega'}$ $\partial^2\varphi_\omega$ und $\partial^2\psi_{\omega'}$ eliminiren, und so zu einer Partial-Gleichung der zweiten Ordnung gelangen können. — Im Gegentheil kann das allgemeine

Ur-Integral einer Partial-Gleichung der zweiten Ordnung zwischen drei Veränderlichen, wenn es in geschlossener Form existirt, nur diese Form haben

$$W_{x,y,z,v} = 0, \quad \text{wo} \quad \begin{cases} \text{entweder} & v = \varphi_\omega + \psi_{\omega'} \\ \text{oder} & v = \omega' \cdot \varphi_\omega + \psi_\omega \end{cases}$$

ist, während ω und ω' gegebene Funktionen von x, y und z vorstellen; weil nur dann aus den sechs Gleichungen alles von den willkührlichen Funktionen abhängige eliminirt, also die gegebene Partial-Gleichung wieder erhalten werden kann.

§. 54.

Fortsetzung.

Uebrigens wollen wir hier nur einige Beispiele der Integration von Partial-Gleichungen der zweiten Ordnung (in geschlossener Form) mittheilen.

I. Ist

1) $$\partial^{1,1} z_{x,y} + P_{x,y} \cdot \partial z_x = Q_{x,y}$$

zu integriren, so führt man einen neuen Veränderlichen v ein, mittelst der Gleichung

2) $$\partial z_x = v;$$

und die Gleichung 1.) nimmt dann die Form an:

3) $$\partial v_y + P_{x,y} \cdot v = Q_{x,y}.$$

Diese Gleichung kann nun als eine totale Gleichung zwischen y und v (in welcher x als eine Constante angesehen wird) nach §. 40.) integrirt werden und giebt eine Gleichung zwischen v, y, x und einer Constante, welche auch x in sich aufnehmen kann, und welche wir durch X bezeichnen können, so daß X eine willkührliche Funktion von x vorstellt. Diese letztere Gleichung giebt dann v in y, x und X ausgedrückt, nämlich

4) $$v = v_{y,x,X};$$

und die Gleichung 2.) d. h. die Gleichung

5) $$\partial z_x = v_{y,x,X}$$

ist dann wiederum eine totale Differential-Gleichung zwischen z und x, in welcher y als constant angesehen werden muß,

wenn sie nach §. 40.) integrirt wird. Dann geht noch eine willkührliche Constante ein, welche y in sich aufnehmen kann, und welche wir daher als eine willkührliche Funktion von y ansehen müssen. Und weil die Gleichung 4.) in diesem Beispiele zugleich allemal die Form

$$v = v_{x,y} + X$$

annimmt, so giebt die Gleichung 5.) allemal sogleich

6) $$z = \int v \cdot dx + \int X \cdot dx + Y_y,$$

während $\int X \cdot dx$ nichts weiter als eine willkührliche Funktion von x ist, die durch X vorgestellt seyn kann, so daß man zuletzt hat

7) $$z = \int v \cdot dx + X + Y,$$

wo X und Y zwei ganz willkührliche Funktionen, die erstere von x, die andere von y, vorstellen.

Ganz auf analoge Weise würde man die Partial-Gleichung

$$\partial^{1,1} z_{x,y} + P_{x,y} \cdot \partial z_y = Q_{x,y}$$

integriren.

II. Nehmen wir nun zunächst die Gleichung der zweiten Ordnung von der Form

1) $$R \cdot \partial^2 z_x + S \cdot \partial^{1,1} z_{x,y} + T \cdot \partial^2 z_y = V,$$

wo R, S, T und V gegebene Funktionen von x, y, z, ∂z_x und ∂z_y vorstellen. Führt man neue Veränderliche p und q mittelst der Gleichungen

2) $\partial z_x = p$ und 3) $\partial z_y = q$

ein; denkt man sich x und y, also auch z und p und q selber wieder als Funktionen eines neuen Veränderlichen t; nimmt man dann von den Gleichungen 2.) und 3.) die Ableitungen nach allem t, so daß man erhält:

4) $$\partial^2 z_x \cdot \partial x_t + \partial^{1,1} z_{x,y} \cdot \partial y_t = \partial p_t$$

und

5) $$\partial^{1,1} z_{x,y} \cdot \partial x_t + \partial^2 z_y \cdot \partial y_t = \partial q_t;$$

findet man endlich hieraus die Werthe von $\partial^2 z_x$ und $\partial^2 z_y$, um solche in die Gleichung 1.) zu substituiren, so geht letztere über in

6) $$R\cdot\partial p_t\cdot\partial y_t+T\cdot\partial q_t\cdot\partial x_t-V\cdot\partial x_t\cdot\partial y_t = \partial^{1,1}z_{x,y}\cdot[R\cdot\partial y_t^2-S\cdot\partial x_t\cdot\partial y_t+T\cdot\partial x_t^2],$$

welche Gleichung nun durch die für z, p und q gesuchten Funktionen von x und y identisch werden muß.

Monge hat nun, im Sinne eines von ihm für Partial-Gleichungen der ersten Ordnung gegebenen Verfahrens (vgl. „Syst. d. Mathem." Th. VII. §. 451.) dieser Gleichung 6.) dadurch zu genügen gesucht, daß er jede Seite derselben für sich der Null gleich setzt. Dies giebt ihm die beiden Gleichungen

7) $$\begin{cases} R\cdot\partial y_t^2-S\cdot\partial x_t\cdot\partial y_t+T\cdot\partial z_t^2=0 \\ R\cdot\partial p_t\cdot\partial y_t+T\cdot\partial q_t\cdot\partial x_t-V\cdot\partial x_t\cdot\partial y_t=0. \end{cases}$$

Verbindet man nun damit die, vermöge der 2.) und 3.) allemal existirende Gleichung

8) $$\partial z_t-p\cdot\partial x_t-q\cdot\partial y_t=0,$$

so hat man drei totale Differential-Gleichungen zwischen den fünf Veränderlichen x, y, z, p und q.

Findet man nun aus der erstern der Gleichungen 7.) zunächst

9) $$\partial y_t=m\cdot\partial x_t,$$

wo m eine Funktion der fünf Veränderlichen x, y, z, p und q seyn wird, gegeben durch die Gleichung

10) $$R\cdot m^2-S\cdot m+T=0;$$

und substituirt man dann für ∂y_t den Werth $m\cdot\partial x_t$ in die zweite der Gleichungen 7.), so erhält man

11) $$Rm\cdot\partial p_t+T\cdot\partial q_t-Vm\cdot\partial x_t=0.$$

Die Gleichung 8.) dagegen wird, vermöge derselben Substitution

12) $$\partial z_t-(p+qm)\cdot\partial x_t=0,$$

so daß an die Stelle der zu integrirenden Gleichungen 7.) und 8.) jetzt die Gleichungen 9.—12.) getreten sind.

Gelingt es nun aus den drei Gleichungen 9.), 11.) und 12.) zwei integrirbare Gleichungen zu erhalten (etwa dadurch, daß man aus ihnen abwechselnd den einen oder den andern der Veränderlichen, nebst dessen Ableitungen, eliminirt), aus denen

man zwei Integrale erhält, die nach den beiden eingehenden willkührlichen Constanten a und b aufgelöst, die Form

13) $M_{x,y,z,p,q} = a$ und $N_{x,y,z,p,q} = b$

annehmen; — so kann man wieder a und b als neue Veränderliche einführen, letztere Gleichungen nach allem t differenziiren, daraus ∂p_t und ∂q_t finden (in ∂x_t, ∂y_t, ∂z_t, ∂a_t und ∂b_t ausgedrückt) und diese Werthe in die Gleichung 6.) substituiren. Diese letztere wird dann, weil ihr $a = const.$ und $b = const.$, also $\partial a_t = \partial b_t = 0$ bereits genügen, nothwendig die Form

$$\mathfrak{A} \cdot \partial a_t^2 + \mathfrak{B} \cdot \partial a_t \cdot \partial b_t + \mathfrak{C} \cdot \partial b_t^2 = 0,$$

oder die Form

14) $$\partial b_t = w \cdot \partial a_t$$

annehmen, wo w unter anderen auch die Ableitung $\partial^{1,1} z_{x,y}$ in sich aufnimmt. Da man nun letztere ganz beliebig nehmen kann, wenn nur so, daß die Gleichung 6.) d. h. die Gleichung 14.) integrabel wird, so darf man nur, wenn ψ_a eine ganz willkührliche Funktion von a vorstellt, $w = \partial \psi_a$ nehmen, um die Gleichung 6.) oder 14.) integrabel gemacht, und ihr Integral selbst in der Form $b = \psi_a$ oder

15) $$N = \psi_M$$

gefunden zu haben. — Und da m zwei Werthe hat, so findet man meist sogleich zwei solche Integrale.

Da übrigens dieses Integral 15.) in der Regel außer x, y, z auch noch p und q enthalten, folglich noch eine Differential-Gleichung der ersten Ordnung seyn wird, so ist solches in der Regel ein erstes Integral; und die ganze Methode also nur in den Fällen anwendbar, wo ein solches erstes Integral wirklich existirt; und in diesem Falle kann man, um es zu finden, die Bedingungs-Gleichungen seiner Existenz selbst noch zu Hülfe nehmen. Aber auch außerdem ist das hier beschriebene Verfahren in seltenen Fällen von Nutzen, weil die Gleichungen 9.—12.) selten so integrabel sind, daß die Gleichungen 13.) gefunden werden könnten. — Schon in dem einfachen Beispiele

$$a \cdot \partial^2 z_x = \partial z_y \quad \text{oder} \quad a \cdot \partial^2 z_x = q$$

bleibt sie ohne Erfolg.

Man findet jedoch auf diesem Wege für die Partial-Gleichung

$$A \cdot \partial^2 z_x + B \cdot \partial^{1\cdot 1} z_{x,y} + C \cdot \partial^2 z_y = V,$$

wo A, B, C constant sind, und wo nur V eine Funktion von x und y ist, weil m zwei constante Werthe m' und m'' erhält, die beiden Integrale

$$Am' \cdot \partial z_x + C \cdot \partial z_y - m'U' = \varphi'_{y-m'x}$$

und

$$Am'' \cdot \partial z_x + C \cdot \partial z_y - m''U'' = \varphi''_{y-m''x},$$

wo φ' und φ'' zwei ganz willkührliche Funktionen von bezüglich $y - m'x$ und $y - m''x$ sind, während

$$U = \int V \cdot dx$$

ist, wenn in V vor der Integration statt y sein Werth $mx + a$ gesetzt wird, und wenn man dann V nach allem x integrirt, zuletzt aber statt a wieder seinen Werth $y - mx$ substituirt; — und wo zuletzt U' und U'' die beiden Ausdrücke vorstellen, welche aus U hervorgehen, wenn bezüglich m' oder m'' statt m gesetzt wird.

Diese Gleichungen der ersten Ordnung kann man dann aufs Neue noch integriren (nach §. 50.).

So findet man z. B. das allgemeine Ur-Integral von

$$A \cdot \partial^2 z_x + B \cdot \partial^{1\cdot 1} z_{x,y} + C \cdot \partial^2 z_y = x \cdot y$$

so:

$$z = \frac{1}{6A} x^3 y - \tfrac{1}{24} \frac{B}{A} x^4 + \varphi_{y-m'x} + \psi_{y-m''x},$$

während m' und m'' die beiden Werthe von m sind, welche aus der Gleichung

$$A \cdot m^2 - B \cdot m + C = 0$$

hervorgehen, und wo φ und ψ zwei ganz willkührliche Funktionen der bestimmten Funktionen (bezüglich) $y - m'x$ und $y - m''x$ sind.

Von der Gleichung

$$\partial^2 z_x = c^2 \cdot \partial^2 z_y$$

welche bei den schwingenden Saiten vorkommt (vgl. d. „Lehrbuch der Mechanik“ III. Th. Berlin 1838. Kap. XV.) findet man auf diesem Wege als allgemeines Ur-Integral

$$z = \varphi_{y-cx} + \psi_{y+cx},$$

wo φ eine willkührliche Funktion von $y - cx$, und ψ eine willkührliche Funktion von $y + cx$ vorstellt.

§. 55.

§. 55.

Von der Integration der Partial-Gleichungen der zweiten und höhern Ordnung mittelst unendlicher Reihen.

I. In allen den Fällen, wo algebraische oder transcendente geschlossene, endliche Formen des allgemeinen Integrals nicht existiren, kann das Integral in den mannichfaltigsten übrigen Formen erscheinen, und es ist deshalb meist nichts schwieriger, als die Ueberzeugung sich zu verschaffen, daß ein gefundenes Integral einer gegebenen Partial-Gleichung, das allgemeine sey.

II. Dieser Schwierigkeit geht man aber oft dadurch aus dem Wege, daß man in den wirklichen Einzelfällen der Anwendung auf ein allgemeines Integral ganz Verzicht leistet, sondern nur ein Integral aufzufinden sich bemüht, welches allen und jeden Bedingungen der speciellen Aufgabe genügt.

III. Will man nun Integrale haben, in Form von unendlichen Reihen, welche nach Potenzen eines Veränderlichen θ fortlaufen, wo θ irgend eine Funktion eines oder mehrerer der in der gegebenen Partial-Gleichung vorkommenden unabhängigen Veränderlichen ist, so wird man die „Methode der unbestimmten Koefficienten und Exponenten" mit dem besten Erfolge anwenden.

Man setzt zu dem Ende, wenn die Partial-Gleichung

1) $$F_{t,x,y,z,u,\partial u_t,\partial u_x,\partial u_y,\partial u_z,\text{ etc. etc. etc.}} = 0$$

integrirt werden soll,

2) $$u = P\cdot\theta^{\alpha} + Q\cdot\theta^{\beta} + R\cdot\theta^{\gamma} + \cdots,$$

substituirt solchen Werth statt u, und seine Differential-Koefficienten statt ∂u_t, ∂u_x, etc. etc. in die gegebene Partial-Gleichung $F = 0$, ordnet die Gleichung nach Potenzen von θ (zu welchem Behufe zuweilen erst die unbestimmt gelassenen Exponenten α, β, γ etc. etc. zweckmäßig angenommen werden müssen, jedoch so, daß $\alpha < \beta < \gamma <$ etc. etc. wird), und setzt dann die einzelnen Koefficienten der Null gleich. Aus diesen einzelnen Gleichungen müssen dann P, Q, R etc. etc. gefunden werden.

IV. Ist also z. B. die Gleichung

1) $$\partial u_t = a \cdot \partial^2 u_x$$

zu integriren, wo u eine gesuchte Funktion von x und t, wo dagegen a eine gegebene Constante ist, so erhält man sogleich, je nachdem man eine nach ganzen Potenzen von t, oder nach ganzen Potenzen von x fortlaufende Reihe für u sucht, einmal

2) $$u = \varphi_x + at \cdot \partial^2 \varphi_x + \frac{a^2 t^2}{2!} \cdot \partial^4 \varphi_x + \frac{a^3 t^3}{3!} \cdot \partial^6 \varphi_x + \cdots,$$

das andere Mal

3) $$\left.\begin{aligned} u = {} & \psi_t + \frac{x^2}{2!a} \cdot \partial \psi_t + \frac{x^4}{4!a^2} \cdot \partial^2 \psi_t + \cdots \\ & + x \cdot \pi_t + \frac{x^3}{3!a} \cdot \partial \pi_t + \frac{x^5}{5!a^2} \cdot \partial^2 \pi_t + \cdots \end{aligned}\right\}.$$

In dem erstern Integral 2.) kommt nur eine einzige willkührliche Funktion φ_x (mit deren Ableitungen) vor, die den Werth von u vorstellt, für $t = 0$, welche daher, so oft dieser letztere Werth bekannt ist, sogleich ihre Bestimmung findet. — In dem andern Integrale 3.) dagegen kommen zwei willkührliche Funktionen ψ_t und π_t vor, welche die Werthe von u und ∂u_x vorstellen für $t = 0$, welche daher, so oft letztere bekannt sind, augenblicklich ihre Bestimmung finden.

Dieselben Resultate bekommt man auch durch den Maclaurin'schen Lehrsatz, nur in noch allgemeinerer Form, nämlich nach Potenzen von $t - \alpha$ oder $x - \beta$ entwickelt. Diese letzteren Formen erhält man jedoch auch, wenn man entweder $\theta = t - \alpha$, oder $\theta = x - \beta$ setzt, und dann

$$u = A_0 + A_1 \cdot \theta + A_2 \cdot \theta^2 + A_3 \cdot \theta^3 + \cdots$$

setzt, und die unbestimmten Koefficienten dergestalt bestimmt, daß der gegebenen Differential-Gleichung genügt wird.

Von den beiden Integralen 2.) und 3.) ist das eine so allgemein als das andere, denn sie gehen in einander über. Nimmt man z. B. das erstere, nach Potenzen von t fortlaufende Integral 2.) und entwickelt man alle seine Koefficienten selber wieder in Reihen, die nach Potenzen von x fortlaufen,

so erhält man eine Doppel-Reihe; und ordnet man diese Doppel-Reihe nach Potenzen von x, so daß die Koefficienten dann, nach t fortlaufende Reihen werden, so lassen sich letztere dergestalt summiren, daß man sogleich die Form des Integrals 3.) erhält, und dies Verfahren muß jedem geübten Anfänger gelingen, der solches versucht. — Durch das ganz analoge Verfahren kann man aber auch aus dem Integral 3.) wiederum die Form 2.) erhalten.

V. Wir wollen nun von derselben gegebenen lineären Partial-Gleichung

1) $$\partial u_t = a \cdot \partial^2 u_x$$

neue Formen des Integrals aufsuchen, indem wir $\theta = e^x$ nehmen und

2) $$u = P \cdot \theta^\alpha + Q \cdot \theta^\beta + R \cdot \theta^\gamma + \cdots$$

setzen, dabei aber P, Q, R etc. etc., so wie α, β, γ etc. etc. zu bestimmen suchen. Man hat dann, indem wir P, Q, R etc. etc. als bloße Funktionen von t voraussetzen,

$$u = P \cdot e^{\alpha x} + Q \cdot e^{\beta x} + R \cdot e^{\gamma x} + \cdots$$
$$\partial u_t = \partial P_t \cdot e^{\alpha x} + \partial Q_t \cdot e^{\beta x} + \partial R_t \cdot e^{\gamma x} + \cdots$$
$$\partial^2 u_x = \alpha^2 P \cdot e^{\alpha x} + \beta^2 Q \cdot e^{\beta x} + \gamma^2 R \cdot e^{\gamma x} + \cdots.$$

Diese Werthe, in die gegebene Partial-Gleichung substituirt, geben, wenn man die Koefficienten von $e^{\alpha x}$, $e^{\beta x}$, $e^{\gamma x}$ etc. etc. einzeln der Null gleich setzt,

$$\partial P_t = a\alpha^2 P, \quad \partial Q_t = a\beta^2 Q, \quad \partial R_t = a\gamma^2 R \text{ etc. etc.}$$

Integrirt man nun diese Gleichungen, in so fern sie zu den lineären totalen Differential-Gleichungen gehören, nach §. 42.), so erhält man

$$P = A \cdot e^{a\alpha^2 t}, \quad Q = B \cdot e^{a\beta^2 t}, \quad R = C \cdot e^{a\gamma^2 t}, \text{ etc. etc.}$$

wo A, B, C etc. etc. willkührliche Constanten sind, während α, β, γ etc. etc. ebenfalls constant sind und noch gänzlich unbestimmt bleiben. Zuletzt hat man als gesuchtes Integral

3) $$u = A \cdot e^{a\alpha^2 t} \cdot e^{\alpha x} + B \cdot e^{a\beta^2 t} \cdot e^{\beta x} + C \cdot e^{a\gamma^2 t} \cdot e^{\gamma x} + \text{etc. etc.},$$

wo A, B, C etc. etc., α, β, γ etc. etc. ganz willkührliche Constanten sind *), welche die Stelle der willkührlichen Funktionen vertreten, und welche in den verschiedenen Anwendungen, nach den verschiedenen Nebenbedingungen der einzelnen Aufgabe ihre verschiedene Bestimmung erhalten.

VI. Die meisten lineären Partial-Gleichungen, zu welchen die Physik und namentlich die Mechanik führt, sind Gleichungen zwischen der Zeit t, und noch einem, zwei oder drei Koordinaten-Werthen x, oder x und y, oder x, y und z, und endlich der Größe u, welche von den eben genannten Elementen abhängig ist; z. B. wenn u die Menge von Wärme oder von Elektricität vorstellt, welche zu einer bestimmten Zeit t, an der, in einer gegebenen Geraden durch x, oder in einer gegebenen Ebene durch x und y, oder endlich im körperlichen Raume durch x, y und z gegebenen Stelle (bei gewissen Voraussetzungen) statt finden wird. — Sie lassen sich gewöhnlich am bequemsten, obgleich in Form von unendlichen Reihen dadurch integriren, daß man

$$1) \qquad u = P_0 \cdot e^{\alpha_0 t} + P_1 \cdot e^{\alpha_1 t} + P_2 \cdot e^{\alpha_2 t} + \cdots$$

setzt, wo das allgemeine b^{te} Glied $P_b \cdot e^{\alpha_b t}$ ist, und wo man α_0, α_1, α_2 etc. etc. constant, dagegen P_0, P_1, P_2 etc. etc. als Funktionen von x, y und z ansieht; — diesen Werth, nebst seinen Ableitungen in die gegebene Partial-Gleichung substituirt und letztere dann in lauter einzelne Gleichungen von der Form

$$(C) \cdots \qquad M_b \cdot \alpha_b^2 + N_b \cdot \alpha_b + O_b = 0$$

zerfällt, wo jede bloß den einzigen Koefficienten P_b enthält, so daß jede solche Gleichung, je nachdem man 0, 1, 2, 3, oder

---

*) Entwickelt man in diesem Resultate 3.) die Koefficienten von $e^{\alpha x}$, $e^{\beta x}$, $e^{\gamma x}$, etc., nach Potenzen von t, und faßt man die Summe

$$A \cdot e^{\alpha x} + B \cdot e^{\beta x} + C \cdot e^{\gamma x} + \cdots$$

in den Ausdruck φ_x zusammen, so hat man wieder das Integral IV. 2.). — Auf ähnliche Weise geht auch das Integral IV. 3.) aus dem hiesigen 3.) hervor.

irgend eine der folgenden ganzen Zahlen statt b gesetzt sich denkt, nach und nach die Koefficienten P_0, oder P_1, oder P_2, oder etc. etc. bestimmt.

Da bei diesem Verfahren α_0, α_1, α_2 etc. etc. als ganz willkührliche Constanten eingehen, so müssen sie aus den Nebenbedingungen der Aufgabe (also z. B. in der Mechanik aus dem Anfangs-Zustande, wo $t = 0$ ist, so wie überhaupt aus den, für bestimmte Werthe der Veränderlichen vorhandenen Bedingungen) ihre Bestimmung erhalten. — Zuweilen zeigen sie sich imaginär, und in diesem Falle müssen die Exponential-Ausdrücke, wenn bequeme Rechnungen statt finden sollen, in Sinus- und Kosinus-Ausdrücke verwandelt werden. In demselben Falle wird man daher überhaupt besser thun, gleich vom Anfange an, statt die Form 1.) für u zu wählen, lieber

$$2)\quad u = \begin{cases} p_0 \cdot cos\,\lambda_0 t + p_1 \cdot cos\,\lambda_1 t + p_2 \cdot cos\,\lambda_2 t + \cdots \\ + q_0 \cdot sin\,\lambda_0 t + q_1 \cdot sin\,\lambda_1 t + q_2 \cdot sin\,\lambda_2 t + \cdots \end{cases}$$

zu setzen, — in dieser Reihe die Werthe λ_0, λ_1, λ_2 etc. etc. als constant, dagegen p_0, q_0, p_1, q_1, p_2, q_2 etc. etc. als Funktionen von x, y, z sich zu denken und das vorbeschriebene Verfahren, zur Bestimmung der Koefficienten, zu wiederholen.

Anwendungen dieser letztern Methode findet man vorzüglich in der Théorie de la chaleur p. Fourier, Paris 1822, und in späteren über denselben oder einen ähnlichen Gegenstand erschienenen Werken von Poisson, Cauchy etc.

Anmerkung. Wir beschließen dieses Kapitel mit folgender nicht unwichtigen Bemerkung.

Eine Partial-Gleichung zwischen drei Veränderlichen t, x und u (und den Ableitungen ∂u_t, ∂u_x, $\partial^2 u_t$ etc. etc.) ist allemal einer unendlich großen Anzahl von totalen Differential-Gleichungen bloß zwischen den beiden Veränderlichen x und u und den Ableitungen ∂u_x, $\partial^2 u_x$, $\partial^3 u_x$ etc. etc. von u nach x, gleich zu achten, welche alle aus ihr hervorgehen, wenn man sich in ihr nach und nach unendlich viele und alle Werthe ge-

setzt denkt, welche t nur immer haben kann. Jede dieser unendlich vielen totalen Gleichungen, wenn sie integrirt wird, liefert dann für dieses bestimmte t den zugehörigen Werth u in x ausgedrückt, während statt ∂u_t, $\partial^2 u_t$, $\partial^{1,1} u_{x,t}$ etc. etc., weil sie ebenfalls Funktionen von x und t sind, für jeden bestimmten Werth von t bloß Funktionen von x zu stehen kommen.

Auf dieselbe Weise ist eine Partial-Gleichung zwischen vier Veränderlichen t, x, y und der gesuchten Funktion u (von t, x und y), als ein Aggregat von einer unendlichen Anzahl von Partial-Gleichungen mit den drei Veränderlichen x, y und u anzusehen, welche letztere aus ersterer dadurch hervorgehen, daß man statt des Veränderlichen t nach und nach alle seine stetig neben einander liegenden Werthe gesetzt denkt. — U. s. w. f. —

Schluß-Anmerkung. Wir dürfen nicht unerwähnt lassen, daß auch die Partial-Differential-Gleichungen ihre singulären Werthe haben, d. h. daß ihnen zuweilen durch Funktionen $z_{x,y\,\text{etc.}}$ genügt werde, welche nicht in dem allgemeinen Integral enthalten sind. — Auch hier sind die singulären Werthe nichts anders als Faktoren der gegebenen Partial-Differential-Gleichung selbst, die hervortreten würden, wenn man passende neue Veränderliche einführen wollte. — (Man vgl. noch „System der Math." Th. V. §. 317.).

Siebentes Kapitel.

Geometrische Aufgaben, welche zu Differential-Gleichungen führen.

§. 56.

Aufgaben, welche zu totalen Differential-Gleichungen führen.

Aufgabe 1.

Man soll die Gleichung zwischen den rechtwinklichen Koordinaten-Werthen x und y einer Kurve finden, deren Subtangente allemal das Doppelte der Abscisse x ist.

Nach I. Bd. §§. 170. 171.) ist die Subtangente $= \frac{y}{\partial y_x}$; also hat man für die gesuche Kurve die Differential-Gleichung

$$\frac{y}{\partial y_x} = 2x.$$

Diese Gleichung muß nun nach y aufgelöst d. h. integrirt werden. Man trennt in ihr die Veränderlichen, indem man sie so schreibt

$$\frac{\partial y_x}{y} = \frac{1}{2x},$$

und erhält dann zum Integral

$$\int \frac{1}{y} \cdot dy = \int \frac{1}{2x} \cdot dx + C \quad \text{d. h.} \quad log\, y = \tfrac{1}{2} log\, x + C$$

d. h.

$$y^2 = ax,$$

wo a eine willkührliche Constante ist. Diese Gleichung stellt alle Parabeln vor; und wir sehen also 1) daß alle Parabeln diese Eigenschaft haben, und 2) daß außer den Parabeln keine andere Kurve diese Eigenschaft hat. — Die Constante a bleibt hier unbestimmt.

Würde aber eine Kurve gesucht, welche durch einen, mittelst der Koordinaten-Werthe α und β gegebenen Punkt hin-

durch geht, und dabei noch die obige Eigenschaft hat, so würde man zur Bestimmung der obigen Constante a die Bedingung haben, daß die Gleichung $y^2 = ax$ für $x = \alpha$ auch $y = \beta$ geben muß. Dies giebt die Gleichung

$$\beta^2 = a\alpha, \qquad \text{also} \qquad a = \frac{\beta^2}{\alpha};$$

und die gesuchte Kurve ist nun die durch die Gleichung

$$y^2 = \frac{\beta^2}{\alpha} \cdot x \qquad \text{oder} \qquad \frac{y^2}{\beta^2} = \frac{x}{\alpha}$$

gegebene Parabel, welche den Parameter $\frac{\beta^2}{\alpha}$ hat.

Wäre der Punkt (α, β) nicht gegeben, sondern sollte die Tangene der Kurve, an dem zu $x = \alpha$ gehörigen Punkte, mit der Abscissen-Axe den gegebenen Winkel ψ machen, so müßte ∂y_x für $x = \alpha$ der $tg\,\psi$ gleich werden (nach I. Bd. §§. 170. 171.). Nun folgt aber aus $y^2 = ax$, $2y \cdot \partial y_x = a$, also $\partial y_x = \frac{a}{2\sqrt{ax}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{x}}$; folglich wird jetzt

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{\alpha}} = tg\,\psi, \quad \text{und} \quad a = 4\alpha \cdot tg\,\psi^2.$$

Die Gleichung der gesuchten Kurve ist daher nun die durch die Gleichung

$$y^2 = 4\alpha x \cdot tg\,\psi^2$$

gegebene Parabel.

Anmerkung. Sollte die Subtangente das m fache der Abscisse x werden, so würde man auf demselben Wege als Gleichung der gesuchten Kurve finden

$$y^m = ax,$$

und diese Kurve gehört zu den Parabeln der höhern Ordnung, wenn m nicht negativ ist. — Wäre aber m negativ, so würde man die Kurve zu den Hyperbeln der höhern Ordnung zählen.

Aufgabe 2.

Es wird die Kurve gesucht, deren Subnormale an jedem ihrer Punkte constant und $= a$ ist.

Nach §. 170. d. I. Bds.) hat man die Subnormale $= y \cdot \partial y_x$; also ist dasmal

$$y \cdot \partial y_x = a.$$

In dieser Gleichung sind bereits die Veränderlichen getrennt; sie giebt daher, wenn man links und rechts die Integrale nach x nimmt,

$$\int y \cdot dy = ax + c \quad \text{oder} \quad \tfrac{1}{2}y^2 = ax + c \quad \text{oder} \quad y^2 = 2ax + c,$$

wo c eine willkührliche Constante ist. Diese Gleichung ist allemal die einer Parabel *), und welchen Werth man auch der Constante c geben mag, so hat man immer eine Kurve, welche die verlangte Eigenschaft hat.

Soll aber der zu $x = \alpha$ gehörige Punkt der Parabel die Ordinate β haben, so hat man noch die Gleichung

$$\beta^2 = 2a\alpha + c, \quad \text{also} \quad c = \beta^2 - 2a\alpha;$$

und dann erhält man

$$y^2 - \beta^2 = 2a(x - \alpha)$$

für die Gleichung der gesuchten Kurve.

Wird $\alpha = \beta = 0$ gegeben, d. h. soll die Kurve durch den Anfangs-Punkt der Koordinaten durchgehen, so erhält man die Gleichung

$$y^2 = 2ax.$$

Aufgabe 3.

Es werde die Kurve gesucht, deren Subnormale an jedem ihrer Punkte dem Abscissen-Werthe x gleich ist.

Man hat als Ansatz dieser Aufgabe die Gleichung

$$y \cdot \partial y_x = x;$$

und solche, integrirt, giebt $\int y \cdot dy = \int x \cdot dx$ d. h.

$$y^2 = x^2 + c,$$

wo c die willkührliche Constante ist. Diese Gleichung drückt, so lange c nicht Null wird, eine gleichseitige Hyperbel, für $c = 0$ dagegen zwei gerade Linien aus. Wie man aber c nehmen mag, so hat man immer der Aufgabe genügt.

Soll jedoch die Kurve noch durch den Punkt hindurch gehen, dessen Koordinaten-Werthe α und β sind, so hat man noch die Gleichung

$$\beta^2 = \alpha^2 + c, \quad \text{oder} \quad c = \beta^2 - \alpha^2,$$

---

*) Daß in der Parabel die Subnormale constant und dem halben Parameter gleich ist, ist in der Lehre der Kegelschnitte nachgewiesen. Die Lösung der hiesigen Aufgabe zeigt dagegen, daß die Parabel unter allen Kurven die einzige ist, welche sich dieser Eigenschaft erfreut.

und die Gleichung unserer gesuchten Kurve wird nun

$$y^2 - \beta^2 = x^2 - \alpha^2.$$

Für $\alpha = \beta = 0$ geht dieselbe in

$$y^2 = x^2, \quad \text{oder} \quad y = \pm x$$

über. Diese letztere Gleichung stellt aber zwei gerade Linien vor, welche mit der Abscissen-Axe einen halben rechten Winkel machen, und auf einander senkrecht stehen. — Dies letztere Ereigniß tritt übrigens allemal ein, so oft der Punkt, durch welchen die Kurve hindurchgehen soll, so liegt, daß man $\beta = \pm\alpha$ hat.

Aufgabe 4.

Die Kurve zu finden, welche alle Kurven einer und derselben Art unter einem und demselben Winkel schneidet *).

Es stelle

1) $$f_{x',y',\alpha} = 0$$

die Gleichung aller geschnittenen Kurven DN, D′N′, D_1N_1, etc. etc. (Fig. 19.) vor, und x und y seyen die Koordinaten eines beliebigen Punktes M der gesuchten Kurve $M_1MM'U$; ferner sey MX′ mit der Abscissen-Axe OX parallel gedacht, während immer rechtwinkliche Koordinaten-Axen vorausgesetzt werden. Sind endlich MV, MZ die Tangenten der gegebenen und der gesuchten Kurve in ihrem Durchschnitts-Punkte M, so ist ZMV der gegebene Winkel, welcher bei allen übrigen geschnittenen Kurven, also für jeden andern Werth von α, immer derselbe bleiben soll. Nun ist aber

2) $$\text{W. ZMV} = \text{W. ZMX}' - \text{W. VMX}',$$

also

3) $$tg\,\text{ZMV} = \frac{tg\,\text{ZMX}' - tg\,\text{VMX}'}{1 + tg\,\text{ZMX}' \cdot tg\,\text{VMX}'}.$$

Zu gleicher Zeit ist noch

$$tg\,\text{ZMX}' = \partial y_x \quad \text{und} \quad tg\,\text{VMX}' = p,$$

---

*) Unter „Kurven einer gegebenen Art" werden hier alle Kurven verstanden, deren Gleichung aus einer einzigen gegebenen Gleichung $f_{x,y,\alpha} = 0$ dadurch hervorgeht, daß man der Constante α alle stetig neben einander liegenden verschiedenen Werthe ertheilt.

sobald man unter p das versteht, was aus der Ableitung $\partial y'_{x'}$ hervorgeht, wenn man solche als Funktion von x', y' und α herstellt, dann aber bezüglich x und y statt x' und y' substituirt (weil in dem Durchschnitts-Punkte M die Koordinaten-Werthe beider Kurven dieselben sind).

Wird nun die Tangente des gegebenen Winkels ZMV durch a bezeichnet, so daß a selbst gegeben ist, so geht die Gleichung 3.) über in

$$6)\quad a = \frac{\partial y_x - p}{1 + p \cdot \partial y_x}, \quad \text{oder} \quad a(1 + p \cdot \partial y_x) + p - \partial y_x = 0.$$

Zur Bestimmung von p hat man aber für den Durchschnitts-Punkt aus

$$7)\qquad f_{x,y,\alpha} = 0$$

noch

$$8)\qquad \partial f_x + \partial f_y \cdot p = 0.$$

Eliminirt man daher aus den Gleichungen 6.), 7.) und 8.) nicht bloß p, sondern auch α, so hat man eine Gleichung, welche für jeden Werth von α gilt, welche also für alle die übrigen geschnittenen Kurven D_1N_1, $D'N'$ etc. etc. gilt, daher auch für alle übrigen Durchschnitts-Punkte M_1, M' etc. etc., wenn unter x und y dessen Koordinaten-Werthe verstanden werden. Diese zuletzt erhaltene Gleichung ist also die Gleichung der gesuchten Kurve. Wird diese Gleichung noch integrirt, so ist die Auflösung der Aufgabe beendigt.

Beispiel 1. Ist statt $f_{x',y',\alpha} = 0$ gegeben die Gleichung der Parabel

$$y^2 = \alpha x,$$

so hat man, wenn man diese Gleichung differenziirt,

$$2y \cdot p = \alpha, \quad \text{also} \quad p = \frac{y}{2x}.$$

Dieser Werth in die 6.) substituirt, giebt

$$a\left(1 + \frac{y \cdot \partial y_x}{2x}\right) + \frac{y}{2x} - \partial y_x = 0$$

oder

$$1')\qquad 2ax + y + (ay - 2x) \cdot \partial y_x = 0.$$

Dies ist also die Differential-Gleichung der gesuchten Kurve.

Um solche zu integriren, bemerke man, daß sie nach x und y homogen ist, setze also (nach §. 40. IV.)

2′) $$y = xv, \quad \text{folglich} \quad \partial y_x = x \cdot \partial v_x + v.$$

Die Gleichung 1′.) geht dadurch über in

3′) $$\frac{\partial x_v}{x} + \frac{av - 2}{av^2 - v + 2a} = 0,$$

in welcher Gleichung die Veränderlichen getrennt sind. Nimmt man nun von jedem Gliede das Integral nach allem v, so erhält man (nach §. 5. und §. 8.)

$$log\, x + \frac{-3+\sqrt{1-8a^2}}{2\sqrt{1-8a^2}} \cdot log\left(v - \frac{1+\sqrt{1-8a^2}}{2a}\right) + \frac{3+\sqrt{1-8a^2}}{2\sqrt{1-8a^2}} \cdot log\left(v - \frac{1-\sqrt{1-8a^2}}{2a}\right) = log\, c.$$

wo c die willkührliche Constante ist. Setzt man statt v seinen Werth $\frac{y}{x}$ und schafft man die Logarithmen weg, so erhält man

$$x \cdot \left(\frac{y}{x} - \frac{1+\sqrt{1-8a^2}}{2a}\right)^{\frac{-3+\sqrt{1-8a^2}}{2\sqrt{1-8a^2}}} \cdot \left(\frac{y}{x} - \frac{1-\sqrt{1-8a^2}}{2a}\right)^{\frac{3+\sqrt{1-8a^2}}{2\sqrt{1-8a^2}}} = c$$

für die Gleichung der gesuchten Kurve *).

Beispiel 2. Ist statt $f_{x',y',\alpha} = 0$ bloß die Gleichung einer geraden Linie, nämlich

$$y = \alpha x$$

gegeben, so hat man hieraus

$$\partial y_x = \alpha, \quad \text{also} \quad p = \alpha = \frac{y}{x}.$$

Setzt man nun diesen Werth von p in die Gleichung 6.), so erhält man

$$a\left(1 + \frac{y}{x} \cdot \partial y_x\right) + \frac{y}{x} - \partial y_x = 0$$

oder

$$ax + y + (ay - x) \cdot \partial y_x = 0.$$

Setzt man nun, um diese Gleichung zu integriren,

$$y = x \cdot v, \quad \text{also} \quad \partial y_x = x \cdot \partial v_x + v,$$

so geht solche über in

---

*) Ist $8a^2 > 1$, also $a > \frac{1}{2\sqrt{2}}$, so kann man die imaginären Potenzen in reelle Bogen übertragen; oder man kann das Integral $\int \frac{av-2}{av^2-v+2a} \cdot dv$ sogleich direkt in Bogen ausdrücken (nach §. 11.).

$$\frac{\partial x_v}{x} + \frac{av-1}{av^2+a} = 0$$

und giebt nun, integrirt,

$$log\, x + \int \frac{av-1}{av^2+a} \cdot dv + log\, c = 0,$$

wo $log\, c$ die willkührliche Constante vorstellt. Nun ist aber

$$\frac{av-1}{av^2+a} = \frac{v-1:a}{1+v^2} = \frac{v}{1+v^2} - \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1+v^2};$$

also ist auch

$$\int \frac{av-1}{av^2+a} \cdot dv = \int \frac{v}{1+v^2} \cdot dv - \frac{1}{a} \cdot \int \frac{1}{1+v^2} \cdot dv$$

$$= \tfrac{1}{2} log(1+v^2) - \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{tg}\, v.$$

Setzt man daher statt v wieder seinen Werth $\frac{y}{x}$, so geht das gefundene Integral über in

$$a \cdot log(c\sqrt{x^2+y^2}) = \frac{1}{tg}\ \frac{y}{x}$$

oder

$$\frac{y}{x} = tg(a \cdot log\, c\sqrt{x^2+y^2})$$

als Gleichung der gesuchten Kurve.

Und weil allemal in das Integral eine willkührliche Constante eingeht, so kann man die Kurve an einer bestimmten Stelle noch einer neu hinzutretenden Bedingung unterwerfen, z. B. der Bedingung, daß sie durch einen, mittelst seiner Koordinaten-Werthe gegebenen Punkt hindurch gehe, oder daß die Tangente an einem bestimmten zu $x = g$ gehörigen Punkte der Kurve eine gegebene Lage habe; oder einer ähnlichen.

Weitere Bemerkungen zur Integration der für die Trajektorien gefundenen Differential-Gleichungen.

In den Fällen, wo sich aus den Gleichungen 6.), 7.) und 8.) der Veränderliche α nicht leicht eliminiren läßt, ist es zuweilen vortheilhaft, in die Gleichung 6.), nämlich in

6) $$a(1+p \cdot \partial y_x) + p - \partial y_x = 0$$ *),

---

*) Man nennt die hier gesuchten Kurven Trajektorien, und rechtwinkliche Trajektorien, wenn der gegebene Winkel ein rechter, also

α als einen neuen Veränderlichen (statt y) einzuführen, der durch die Gleichung

7) $$f_{x,y,\alpha} = 0$$

selbst (in x und y) gegeben ist, und dann y zu elimininen, um die neue Differenzial-Gleichung zwischen x und α zu erhalten.

Läßt sich z. B. die Gleichung $f_{x,y,\alpha} = 0$ leichter nach y als nach α algebraisch auflösen, so daß sie

$$y = \varphi_{x,\alpha} \quad \text{und} \quad \partial y_{(x)} = p + \partial\varphi_\alpha \cdot \partial\alpha_x$$

giebt, wo p die frühere Bedeutung hat, also $\partial\varphi_x$ vorstellt; oder $\partial y_{(x)} = p + q \cdot \partial\alpha_x$ giebt, wenn $\partial\varphi_\alpha = q$ gesetzt wird, — so geht die Gleichung 6.) über in

9) $$a(1+p^2) - (1-ap)q \cdot \partial\alpha_x = 0,$$

wo p und q bloße Funktionen von x und α vorstellen. Wird nun diese Gleichung zwischen x und α, integrirt, so kann man dann aus dem Integral und $f_{x,y,\alpha} = 0$, noch α elimininen, und man hat die gesuchte Gleichung zwischen x und y für die Trajektorie.

Man kann aber natürlich auch statt dieses Veränderlichen α wiederum einen neuen Veränderlichen z einführen, immer in

---

wenn $\frac{1}{\alpha} = 0$ ist. — Für die rechtwinklichen Trajektorien wird die Gleichung 6.) bloß diese, nämlich $1 + p \cdot \partial y_x = 0$.

In dem zweiten Beispiel, wo $p = \frac{y}{x}$ ist, hat man für die rechtwinkliche Trajektorie die Gleichung $1 + \frac{y}{x} \cdot \partial y_x = 0$, oder $x + y \cdot \partial y_x = 0$. Diese giebt, integrirt, $x^2 + y^2 = r^2$, wo r^2 eine willkührliche Constante vorstellt, so daß diesmal die gesuchte Kurve eine Kreislinie ist; wie solches voraus zu sehen war.

Wird der gegebene Winkel immer kleiner und kleiner, und zuletzt unendlich klein gedacht, so geht die Trajektorie in die Einhüllungs-Kurve über (vgl. I. Bd. §. 182.) und die Gleichung 6.) wird nun wegen $a = 0$, diese:

$$p - \partial y_x = 0.$$

Die Einhüllungs-Kurve ist aber, nach I. Bd. §. 182.) und nach §. 45.), nie das Integral dieser Differential-Gleichung, sondern immer nur ein singulärer Werth derselben. —

der Hoffnung, daß sich die neue Gleichung bequemer integriren läßt.

Man suche z. B. die Trajektorien für alle Cykloiden, welche aus der Differential-Gleichung

$$1') \qquad \partial y_x = \frac{x}{\sqrt{2\alpha x - x^2}}$$

dadurch hervorgehen, daß man den Radius α des Erzeugungs-Kreises sich stetig ändern läßt. Die Ur-Gleichung derselben Cykloide, wenn man integrirt, und wenn man voraussetzt, daß für $x = 0$ auch $y = 0$ werden soll, wird aber diese:

$$2') \qquad y = -\sqrt{2\alpha x - x^2} + \alpha \cdot \frac{1}{cos}\left(1 - \frac{x}{\alpha}\right).$$

Die Gleichung der Trajektorie ist also dasmal (aus 6.):

$$3') \qquad a\left(1 + \frac{x \cdot \partial y_x}{\sqrt{2\alpha x - x^2}}\right) + \frac{x}{\sqrt{2\alpha x - x^2}} - \partial y_x = 0,$$

sobald statt α der aus 2'.) zu ziehende Werth in y und x gesetzt gedacht wird.

Führt man dagegen α als neuen Veränderlichen ein, der selbst durch die Gleichung 2'.) gegeben ist, so hat man

$$p = \frac{x}{\sqrt{2\alpha x - x^2}} \quad \text{und} \quad q = \frac{1}{cos}\left(1 - \frac{x}{\alpha}\right);$$

und die Gleichung 9.) der Trajektorie wird nun

$$4') \qquad a \cdot \frac{2\alpha x}{2\alpha x - x^2} - \left(1 - a \cdot \frac{x}{\sqrt{2\alpha x - x^2}}\right) \cdot \frac{1}{cos}\left(1 - \frac{x}{\alpha}\right) \cdot \partial \alpha_x = 0.$$

Weil man aber diese Gleichung immer noch nicht direkt integriren kann, so führe man noch einen neuen Veränderlichen z ein (statt α), mittelst der Gleichung

$$5') \qquad x = \alpha z, \quad \text{also} \quad 1 = \alpha \cdot \partial z_x + z \cdot \partial \alpha_x,$$

und eliminire nun aus 4'.) und 5'.) sowohl α als $\partial \alpha_x$. Dadurch erhält man diese neue Gleichung

$$6') \qquad \frac{2a}{2 - z} - \left(\frac{1}{z} - \frac{a}{\sqrt{2z - z^2}}\right) \frac{1}{cos}(1 - z)$$
$$+ \frac{x \cdot \partial z_x}{z}\left(\frac{1}{z} - \frac{a}{\sqrt{2z - z^2}}\right) \cdot \frac{1}{cos}(1 - z) = 0,$$

oder, wenn man $\frac{1}{\partial x_z}$ statt ∂z_x schreibt, und schicklich wegdividirt,

$$7') \quad \frac{\partial x_z}{x} + \frac{\left(\frac{1}{z} - \frac{a}{\sqrt{2z-z^2}}\right)\cdot\frac{1}{\cos}(1-z)}{z\left[\frac{2a}{2-z} - \left(\frac{1}{z} - \frac{a}{\sqrt{2z-z^2}}\right)\cdot\frac{1}{\cos}(1-z)\right]} = 0.$$

In dieser Gleichung sind die Veränderlichen getrennt, so daß nun von jedem Gliede das Integral nach allem z genommen werden kann, sobald man nur das Integral der Funktion von z im zweiten Gliede auf irgend einem der im Kap. I.) beschriebenen Wege, auswerthet.

Hat man aber integrirt, so muß man aus dem Integral, welches noch eine willkührliche Constante c in sich aufnimmt; — aus der Gleichung 5.') und aus der Gleichung 2'.), noch z und α eliminiren, um die gesuchte Gleichung der Trajektorie zwischen x und y zu haben *).

Aufgabe 5.

Man soll die Kurve finden, in welcher an jedem ihrer Punkte der Krümmungs-Halbmesser, der Normale (bis zur Abscissen-Axe genommen) gleich ist.

Aus der Subnormale $y\cdot\partial y_x$ und der Ordinate y findet sich die Normale nach dem Pythagoräischen Lehrsatze

$$= \sqrt{y^2 + y^2\cdot\partial y_x{}^2} = y\cdot\sqrt{1+\partial y_x{}^2},$$

während der Krümmungs-Halbmesser (I. Bd. §. 170.)

$$= \frac{(1+\partial y_x{}^2)^{\frac{3}{2}}}{\partial^2 y_x}$$

gefunden worden ist. Die Gleichung der gesuchten Kurve ist daher diese:

$$\frac{(1+\partial y_x{}^2)^{\frac{3}{2}}}{\partial^2 y_x} = y\cdot\sqrt{1+\partial y_x{}^2}, \text{ oder } \mp y\cdot\partial^2 y_x + \partial y_x{}^2 + 1 = 0,$$

in so fern die Zweideutigkeit der Zeichen zu berücksichtigen ist. — Dies ist aber eine Differential-Gleichung der zweiten Ordnung, welche noch integrirt werden muß.

A.

---

*) Uebrigens bemerken wir hier noch den Anfängern, daß die Trajektorien keine eigenthümliche Gattung von Kurven sind, so wenig z. B. wie die Evoluten, und daß jede gegebene Kurve eine Trajektorie seyn kann, in Bezug auf eine gegebene Reihe von Kurven einer und derselben Art. Man kann sogar die Aufgabe umkehren und die Reihen der Kurven einer und derselben Art aufsuchen, zu welcher irgend eine gegebene Kurve als Trajektorie gehört.

A. Nehmen wir zunächst die Gleichung

1) $$+y\cdot\partial^2 y_x+\partial y_x{}^2+1=0,$$

und führen wir, um sie zu integriren, einen neuen Veränderlichen v ein, mittelst der Gleichung

2) $$y\cdot\partial y_x=v\ ^*),$$

so daß aus 2.), wenn man differenziirt,

3) $$y\cdot\partial^2 y_x+\partial y_x{}^2=\partial v_x$$

hervorgeht; so geht die Gleichung 1.) über in

4) $$\partial v_x+1=0$$

und giebt, nach allem x integrirt,

5) $$v+x=c \qquad \text{d. h.} \qquad y\cdot\partial y_x+x-c=0.$$

Dies ist ein erstes Integral der Gleichung 1.) mit der willkührlichen Constante c, aber noch immer eine Differential-Gleichung der ersten Ordnung, die nun noch einmal integrirt werden muß. Weil jedoch in ihr die Veränderlichen bereits getrennt sind, so darf man nur noch jedes Glied für sich nach allem x integriren, und man erhält

6) $$y^2+(x-c)^2=r^2,$$

wo r^2 die neue willkührliche Constante ist. Diese Gleichung ist aber die Gleichung einer Kreis-Linie, welche ihren Mittel-Punkt in der Abscissen-Axe hat, und deren Radius $=r$ ist.

Soll diese Kreislinie durch zwei Punkte hindurchgehen, deren Koordinaten-Werthe α, β für den einen, und γ, δ für den andern sind, so müssen diese Koordinaten-Werthe bezüglich statt x und y gesetzt, die Gleichung 6.) identisch machen. Dies giebt die Gleichungen

7) $$\beta^2+(\alpha-c)^2=r^2 \quad \text{und} \quad \delta^2+(\gamma-c)^2=r^2;$$

und aus diesen Gleichungen bestimmen sich die beiden Constanten c und r.

Man hätte auch die Bedingung machen können, daß die gesuchte Kurve einmal durch den Punkt (α, β) hindurchgehe, und dann daß die Tangente an diesem Punkte mit der Abscissen-Axe einen gegebenen Winkel ψ mache. Dann hätte man die Gleichung 6.) differenziiren, also zur Gleichung 5.) zurückkehren müssen, und in 5.) und 6.) α statt x, β statt y, und $tg\,\psi$

---

*) Man bemerkt nämlich sogleich (bei dem Anblick der Gleichung 1.), daß die beiden ersten Glieder derselben nichts anders als die Ableitung von $y\cdot\partial y_x$ sind.

statt ∂y_x setzen. Man erhielt dann zur Bestimmung der beiden Constanten c und r, die Gleichungen

8) $\beta \cdot tg\,\psi + \alpha - c = 0$ und $\beta^2 + (\alpha - c)^2 = r^2$.

B. Nehmen wir die andere Gleichung

1) $-y \cdot \partial^2 y_x + \partial y_x^2 + 1 = 0$,

und führen wir wieder, um sie zu integriren, einen neuen Veränderlichen v ein, aber dasmal mittelst der Gleichung

2) $\partial y_x = v$, also $\partial^2 y_x = \partial v_x$,

so geht die Gleichung 1.) über in

3) $-y \cdot \partial v_x + 1 + v^2 = 0$, oder $\frac{\partial v_x}{1+v^2} = \frac{1}{y}$,

oder, wenn man durch ∂y_x, welches $= v$ ist, dividirt, wegen $\frac{\partial v_x}{\partial y_x} = \partial v_y$ (I. Bd. §. 155.)

4) $\frac{\partial v_y}{1+v^2} = \frac{1}{v \cdot y}$,

oder, wegen $\partial y_v = \frac{1}{\partial v_y}$,

5) $\frac{v}{1+v^2} = \frac{\partial y_v}{y}$.

In dieser Gleichung sind die Veränderlichen getrennt, und sie giebt, wenn man links und rechts die Integrale nach allem x nimmt,

6) $y = a\sqrt{1+v^2}$ oder $\frac{y^2}{a^2} = 1 + v^2$,

wo a eine willkührliche Constante ist *).

---

*) Diese Gleichung $y = a \cdot \sqrt{1+\partial y_x^2}$ giebt, wenn man links und rechts die Integrale nach x nimmt,

$$\int_{x \div \alpha} y \cdot dx = a \cdot \int_{x \div \alpha} \sqrt{1+\partial y_x^2} \cdot dx$$

und diese Gleichung lehrt, daß der Inhalt das a fache des Bogens ist, d. h. daß die Inhalte mit den Bogen in Proportion stehen, gerade wie bei'm Kreise die Inhalte der Sektoren, wie die Bogen sich verhalten. — Die hier gefundenen Kurven haben übrigens noch mehr Eigenschaften mit dem Kreise gemein. (Vgl. Nova Acta acad. Petrop. T. IX. pag. 178.)

Um nun dieses erste Integral der Gleichung 1.) noch einmal zu integriren, setzt man wieder statt v seinen Werth ∂y_x, und man hat die Gleichung

7) $$y^2 = a^2(1+\partial y_x{}^2).$$

Diese giebt dann sogleich, wegen $\frac{1}{\partial y_x} = \partial x_y$,

8) $$\partial x_y = \frac{a}{\sqrt{y^2-a^2}},$$

also, wenn man integrirt,

9) $$x = a\int \frac{1}{\sqrt{y^2-a^2}}\cdot dy = b + a\cdot log\frac{y+\sqrt{y^2-a^2}}{a},$$

wo b eine zweite willkührliche Constante ist. Die Gleichung 9.) giebt noch

$$y+\sqrt{y^2-b^2} = a\cdot e^{\frac{x-b}{a}},$$

also

10) $$y = \tfrac{1}{2}a\cdot\left(e^{\frac{x-b}{a}} + e^{-\frac{x-b}{a}}\right),$$

wo a und b die beiden eingehenden willkührlichen Constanten sind *). Deshalb kann man dieselbe Kurve noch zweien Bedingungen unterwerfen, denen bestimmte Punkte der Kurve zu genügen haben.

---

*) Der Unterschied zwischen den Gleichungen

$$+y\cdot\partial^2 y_x + \partial y_x{}^2 + 1 = 0$$

und

$$-y\cdot\partial^2 y_x + \partial y_x{}^2 + 1 = 0$$

besteht offenbar darin, daß in der erstern $y\cdot\partial^2 y_x$ negativ, die Kurve daher gegen die Abscissen-Axe concav ist, daß dagegen in der andern Gleichung dasselbe $y\cdot\partial^2 y_x$ positiv wird, die Kurve also gegen die Abscissen-Axe convex liegt. Die Normale, die immer von der Kurve zur Abscissen-Axe geht, fällt also im erstern Falle mit der Richtung des Krümmungshalbmessers zusammen, ist aber im andern Falle in der Verlängerung des Krümmungshalbmessers.

Aufgabe 6.

Man sucht die Kurve, in welcher an jedem ihrer Punkte der Krümmungs-Halbmesser zu dem Würfel der Normale (bis zur Abscissen-Axe gerechnet) ein constantes Verhältniß hat, d. h. in welcher sich die Krümmungs-Halbmesser zu einander verhalten, wie die Würfel der zugehörigen Normalen.

Die Differential-Gleichung der gesuchten Kurve ist dasmal

$$\frac{(1+\partial y_x^{\,2})^{\frac{3}{2}}}{\partial^2 y_x} = a\cdot y^3\cdot\sqrt{1+\partial y_x^{\,2}}^{\,3},$$

oder

$$\partial^2 y_x = \pm\frac{1}{ay^3}.$$

A. Nehmen wir zunächst die Gleichung

$$1)\qquad \partial^2 y_x = +\frac{1}{ay^3};$$

multipliciren wir sie mit dem integrirenden Faktor ∂y_x (§. 40. II.), und wir erhalten

$$2)\qquad \partial y_x\cdot\partial^2 y_x = \frac{\partial y_x}{ay^3},$$

oder, wenn man links und rechts nach allem x integrirt,

$$3)\qquad \partial y_x^{\,2} = -\frac{1}{ay^2}+b,$$

wo b eine willkührliche Constante ist.

Um dieses erste Integral auf's Neue zu integriren, setze man $\frac{1}{\partial x_y}$ statt ∂y_x und löse die Gleichung nach ∂x_y algebraisch auf; man erhält dann:

$$4)\qquad \partial x_y = \frac{y\cdot\sqrt{a}}{\sqrt{aby^2-1}},$$

woraus, wenn man integrirt, hervorgeht

$$5)\qquad x = \frac{1}{b\cdot\sqrt{a}}\sqrt{aby^2-1}+c,$$

wo c eine zweite willkührliche Constante ist. Dieser Gleichung kann man auch die Form geben:

6) $$(x-c)^2 = \frac{1}{b}y^2 - \frac{1}{ab^2};$$

und nun erkennt man, daß die gesuchte Kurve von der zweiten Ordnung, also ein Kegelschnitt ist.

Löst man diese Gleichung nach y algebraisch auf, so erhält man

7) $$y^2 = bx^2 - 2bcx + bc^2 + \frac{1}{ab^2};$$

und setzt man

8) $$-2bc = C \quad \text{und} \quad bc^2 + \frac{1}{ab^2} = C',$$

so hat man die Gleichung der gesuchten Kurve in der Form

9) $$y^2 = bx^2 + Cx + C',$$

und dies ist die Gleichung einer Parabel, Ellipse oder Hyperbel, je nachdem b Null, negativ oder positiv ist. — Differenziirt man diese Gleichung 9.) zweimal hinter einander, so erhält man

10) $$y \cdot \partial y_x = bx + \tfrac{1}{2}C \quad \text{und} \quad y \cdot \partial^2 y_x + \partial y_x{}^2 = b.$$

Weil aber diese Werthe der Gleichung 1.) genügen müssen, so muß man eine identische Gleichung erhalten, wenn man aus diesen beiden Gleichungen 10.), und der 1.), und der 9.), sowohl y als auch ∂y_x und $\partial^2 y_x$ eliminirt. Man erhält aber dann

11) $$\frac{1}{a} = bC' - \tfrac{1}{4}C^2.$$

Bestimmt man daher zwei der drei Constanten b, C und C′ so, daß die Kurve in einzelnen Punkten noch zweien Bedingungen genügt, so findet sich die dritte Constante aus der Gleichung 11.) dazu.

B. Betrachten wir jetzt die andere Gleichung

1) $$\partial^2 y_x = -\frac{1}{ay^3}.$$

Da sie aus der A. 1.) hervorgeht, wenn man daselbst —a statt a setzt, so erhält man als Ur-Integral der jetzigen Gleichung die Gleichung A. 6.) wieder, nur daß —a gesetzt werden muß, wo dort a steht. Das Integral der 1.) wird also jetzt

2) $$(x-c)^2 = \frac{1}{b}y^2 + \frac{1}{ab^2};$$

und man bekommt also wiederum einen Kegelschnitt.

Aufgabe 7.

Es wird die Kurve gesucht, in welcher an jedem ihrer Punkte die Normale zur Quadrat-Wurzel aus der Summe des Abscissen-Werthes x und der Subnormale $y \cdot \partial y_x$, ein constantes Verhältniß hat.

Die Gleichung der gesuchten Kurve ist dasmal

1) $$y \cdot \sqrt{1 + \partial y_x^2} = a\sqrt{x + y \cdot \partial y_y}$$

oder

2) $$y^2 \cdot \partial y_x^2 - a^2 y \cdot \partial y_x + y^2 - a^2 x = 0.$$

Um diese Gleichung, welche bloß eine Differential-Gleichung der ersten Ordnung ist, zu integriren, löse man solche zuerst nach $y \cdot \partial y_x$ algebraisch auf. Man erhält dann

3) $$y \cdot \partial y_x = \tfrac{1}{2}a^2 \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}a^4 + a^2 x - y^2}.$$

Führt man nun einen neuen Veränderlichen v ein, mittelst der Gleichung

4) $$\sqrt{\tfrac{1}{4}a^4 + a^2 x - y^2} = v \quad \text{oder} \quad \tfrac{1}{4}a^4 + a^2 x - y^2 = v^2,$$

so erhält man, wenn diese Gleichung nach allem x differenziirt wird,

5) $$\tfrac{1}{2}a^2 - y \cdot \partial y_x = v \cdot \partial v_x;$$

und dadurch geht die 3.) über in

6) $$\partial v_x = \mp 1.$$

Diese Gleichung, integrirt, giebt

7) $$v = C \mp x,$$

d. h. wegen der 4.)

8) $$\tfrac{1}{4}a^4 + a^2 x - y^2 = (C \mp x)^2,$$

oder

9) $$y^2 + x^2 - (a^2 + 2C)x + C^2 - \tfrac{1}{4}a^4 = 0,$$

in so fern statt der willkührlichen Constante $\mp C$, auch bloß C geschrieben werden kann. Diese Gleichung 9.) ist aber die Gleichung einer Kreislinie, deren Halbmesser $= a\sqrt{\tfrac{1}{2}a^2 + C}$ ist und deren Mittelpunkt in der Abscissen-Axe liegt, vom Anfangspunkt der Koordinaten um $\tfrac{1}{2}a^2 + C$ entfernt.

Aufgabe 8.

Es wird die Kurve gesucht, in welcher sich die Ordinate y zur Subtangente $\frac{y}{\partial y_x}$ verhält, wie eine Constante a zur Differenz $y - x$ zwischen dem Ordinaten-Werth und dem Abscissen-Werth.

Der Ansatz der Aufgabe giebt dasmal die Gleichung

1) $$\partial y_x = \frac{a}{y-x}.$$

Um sie zu integriren, führe man einen neuen Veränderlichen v ein, mittelst der Gleichung

2) $$y-x=v, \quad \text{also} \quad \partial y_x - 1 = \partial v_x.$$

Dadurch geht die 1.) über in

3) $$\partial v_x = \frac{a}{v} - 1 = \frac{a-v}{v}, \quad \text{also} \quad \partial x_v = \frac{v}{a-v};$$

und diese giebt, integrirt,

4) $$x = a - v - a \cdot log(a-v) + C$$

d. h.

5) $$y - a + a \cdot log(a+x-y) = C,$$

wo C die willkührliche Constante ist.

Soll die Kurve durch den Anfangspunkt der Koordinaten durchgehen, so bestimmt sich die Constante C aus der Bedingung, daß für $x=0$, auch $y=0$ werden muß. Die Gleichung 5.) giebt aber für $x=y=0$,

6) $$-a + a \cdot log\, a = C,$$

so daß, wenn man diesen Werth von C in die 5.) substituirt, letztere sich verwandelt in

7) $$y + a \cdot log \frac{a+x-y}{a} = 0,$$

oder

$$y = a \cdot log \frac{a}{a+x-y}, \quad \text{oder} \quad (a+x-y) \cdot e^{y:a} = a$$

oder

8) $$x = a \cdot e^{-y:a} + y - a;$$

und dies ist die Gleichung einer transcendenten Kurve.

Aufgabe 9.

Eine Kurve AMN (Fig. 20.) zu finden, für welche das Verhältniß jedes Bogens $AM = s$ zu der Geraden OC, welche die Tangente BMC an M von OX abschneidet, constant und $= a$ ist *).

---

*) Befindet sich in A ein Hund, und in O sein Herr; geht der Herr von O nach X und läuft zu gleicher Zeit der Hund dem Herrn nach, so nämlich, daß er seine Richtung immer nach dem Herrn zu nimmt, also mit jedem Schritte, den der Herr macht, seine Richtung ändert; denkt man sich ferner, daß Herr und Hund gleichzeitig aus O und A abgehen und daß

Es sey $OP = x$, $PM = y$; so ist die Gleichung der Tangente BMC, wenn x_1 und y_1 die Koordinaten-Werthe eines beliebigen Punktes derselben vorstellen (nach I. Bd. §. 170.)

$$y_1 - y = \partial y_x (x_1 - x);$$

und OC ist der Werth von x_1 für $y_1 = 0$; also ist

$$OC = x - \frac{y}{\partial y_x},$$

während sich findet

$$s = \int_{x \div \alpha} \sqrt{1 + \partial y_x{}^2} \cdot dx,$$

sobald nur α der Abscissen-Werth OA_1 des Punktes A ist. — Unsere Aufgabe ist daher angesetzt in der Gleichung

$$1) \qquad \int_{x \div \alpha} \sqrt{1 + \partial y_x{}^2} \cdot dx = a\left(x - \frac{y}{\partial y_x}\right),$$

welche jedoch in eine gewöhnliche Differential-Gleichung dadurch verwandelt werden muß, daß man sie nach allem x differenziirt. Man erhält daher als Ansatz der Aufgabe die folgende Differential-Gleichung der zweiten Ordnung, nämlich

$$2) \qquad \sqrt{1 + \partial y_x{}^2} = a \cdot \frac{y \cdot \partial^2 y_x}{\partial y_x{}^2}.$$

Weil aber diese Gleichung den Veränderlichen x selbst nicht enthält, so betrachte man y als den unabhängig Veränderlichen, setze $\frac{1}{\partial x_y}$ statt ∂y_x, und $\frac{-\partial^2 x_y}{\partial x_y{}^3}$ statt $\partial^2 y_x$ (nach I. Bd. §. 155.), und man erhält die Gleichung

$$3) \qquad \sqrt{1 + \partial x_y{}^2} = -ay \cdot \partial^2 x_y.$$

Nun setze man

$$4) \qquad \partial x_y = v, \qquad \text{also} \qquad \partial^2 x_y = \partial v_y,$$

und die Gleichung 3.) wird folgende:

$$5) \qquad \sqrt{1 + v^2} = -ay \cdot \partial v_y \quad \text{oder} \quad \frac{1}{y} = -a \frac{\partial v_y}{\sqrt{1 + v^2}}.$$

---

beider Bewegungen gleichförmig oder constant sind, und daß die Geschwindigkeit des Hundes das a fache der Geschwindigkeit des Herrn ist, so wird der Hund die hier gesuchte Kurve durchlaufen.

Selbige giebt nun integrirt

$$log\, y = -\int \frac{1}{\sqrt{1+v^2}} \cdot dv = -a \cdot log\, C(v+\sqrt{1+v^2}),$$

d. h.

$$6) \qquad (by)^{-1:a} = v+\sqrt{1+v^2},$$

wo C^a oder b eine willkührliche Constante ist. — Setzt man hier statt v wieder seinen Werth ∂x_y, so erhält man

$$7) \qquad (by)^{-\frac{1}{a}} = \partial x_y + \sqrt{1+\partial x_y{}^2}.$$

Diese Gleichung muß nun noch einmal integrirt werden. Weil aber wieder x selbst nicht in ihr vorkommt, so darf man sie nur nach ∂x_y algebraisch auflösen, so daß man erhält

$$8) \qquad \partial x_y = \tfrac{1}{2}(by)^{-\frac{1}{a}} - \tfrac{1}{2}(by)^{\frac{1}{a}},$$

und diese Gleichung nach y integriren. Dies giebt

$$9) \qquad x+c = \tfrac{1}{2}a \cdot \left(\frac{b^{-\frac{1}{a}} y^{-\frac{1}{a}+1}}{a-1} - \frac{b^{\frac{1}{a}} y^{\frac{1}{a}+1}}{a+1} \right),$$

wo c die zweite willkührliche Constante ist.

Von diesen beiden Constanten c und b bestimmt sich aber die eine dadurch, daß der Punkt A gegeben ist, der die Abscissen-Werthe α und β haben mag; und die andere dadurch, daß der Gleichung 1.) genügt werden muß, während bis jetzt erst der Gleichung 2.) genügt ist. Setzt man aber α statt x und β statt y, so erhält man, wenn diese Gleichung von der 9.) subtrahirt, also die Constante c eliminirt wird,

$$10) \qquad \frac{2}{a}(x-\alpha) = \frac{b^{-\frac{1}{a}}\left(y^{-\frac{1}{a}+1} - \beta^{-\frac{1}{a}+1}\right)}{a-1} - \frac{b^{\frac{1}{a}}\left(y^{\frac{1}{a}+1} - \beta^{\frac{1}{a}+1}\right)}{a+1},$$

so daß jetzt nur noch die Constante b bestimmt zu werden braucht.

Die Bestimmung dieser zweiten Constante b aus der Gleichung 1.) kann man sich durch nachstehende geometrische Betrachtung erleichtern. Da nämlich, wenn der Bogen s, $=0$ ist, auch $OC=0$ werden muß, so folgt aus der Gleichung 1.), wenn man ihr diese andere Form giebt,

$$11) \qquad \int_{y\div\beta} \sqrt{1+\partial x_y{}^2} \cdot dy = a(x - y \cdot \partial x_y),$$

daß der Ausdruck $x - y \cdot \partial x_y$ der Null gleich werden muß, wenn man bezüglich α und β statt x und y setzt. Dies giebt, wenn man statt ∂x_y seinen Werth aus 8.) hier substituirt, die Gleichung

$$\alpha-\beta\left((\beta b)^{-\frac{1}{a}}-(b\beta)^{+\frac{1}{a}}\right)=0;$$

und diese Gleichung, nach b aufgelöst, giebt

$$(b\beta)^{\frac{1}{a}}=\frac{-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\beta},$$

also

12) $$b=\frac{1}{\beta}\left(\frac{-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\beta}\right)^a.$$

Dabei kann man noch bemerken, daß $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=OA$ ist und daß, wenn man den Winkel $AOX=\varphi$ setzt, dann

$$\frac{-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\beta}=\frac{-\cos\varphi\pm 1}{\sin\varphi}=\left\{\begin{matrix}+tg\,\frac{1}{2}\varphi\\-cotg\,\frac{1}{2}\varphi\end{matrix}\right\}$$

ist.

§. 57.

Aufgaben, welche zu Partial-Differential-Gleichungen führen.

Aufgabe 10.

Man soll die Fläche finden, deren Tangential-Ebenen alle durch einen und denselben, mittelst der Koordinaten-Werthe x, y, z gegebenen Punkt hindurch gehen.

Sind x, y, z die rechtwinklichen Koordinaten-Werthe eines beliebigen Punktes dieser gesuchten Fläche, so ist die Gleichung der Tangential-Ebene an diesem Punkte (nach I. Bd. §. 176.) diese:

1) $$z'-z=\partial z_x(x'-x)+\partial z_y(y'-y).$$

Weil aber diese Fläche durch den Punkt (x, y, z) hindurch gehen soll, so wird diese Gleichung 1.) identisch, so oft man statt x', y' und z' bezüglich x, y und z schreibt. Also hat man

2) $$z-z=\partial z_x(x-x)+\partial z_y(y-y),$$

welche Gleichung identisch wird, so oft man statt z die Funktion von x und y setzt, welche die gesuchte Fläche vorstellt. Diese Gleichung 2.) ist also eine Partial-Differential-Gleichung für die gesuchte Fläche, welche auch so geschrieben werden kann:

3) $$z-z=\partial z_x\cdot(x-x)+\partial z_y\cdot(y-y),$$

und welche nun noch integrirt werden muß.

Man kann diese Gleichung sogleich einfacher gestalten, wenn man sich Koordinaten-Axen OX, OY und OZ denkt, welche wie gewöhnlich auf einander senkrecht stehen, welche aber durch den gegebenen Punkt hindurch gehen, in dem sich alle Tangential-Ebenen vereinigen sollen; dann wird nämlich $x = y = z = 0$ und die Gleichung der gesuchten Fläche, auf diese Axen bezogen, nimmt nun die Form an:

4) $$z - y \cdot \partial z_y - x \cdot \partial z_x = 0.$$

Sie gehört zu den lineären Partial-Gleichungen, wird deshalb nach §. 50.) integrirt, und giebt zum allgemeinen Integral (nach dem Beispiel zu §. 50., sobald daselbst $n = 1$ genommen wird)

5) $\frac{z}{x} = F_u$, wenn $u = \frac{y}{x}$ gesetzt wird,

wo F_u eine ganz willkührliche Funktion von u vorstellt. — Unsere Aufgabe hat daher unendlich viele Auflösungen nach den unendlich vielen Formen, welche statt F_u gesetzt werden.

Setzt man z. B. $F_u = a + bu$, so wird die Gleichung 5.) jetzt diese

$$\frac{z}{x} = a + b \cdot \frac{y}{x} \quad \text{oder} \quad z = ax + by;$$

und dies ist die Gleichung einer jeden, durch den Punkt O hindurchgehenden Ebene, die nach den verschiedenen Werthen von a und b immer anders und anders zu liegen kommt. —

Nimmt man aber

$$F_u = a + bu + cu^2,$$

so geht die Gleichung 5.) über in

$$\frac{z}{x} = a + b\frac{y}{x} + c\frac{y^2}{x^2}$$

oder $$xz = ax^2 + bxy + cy^2$$

und dies ist eine Fläche der zweiten Ordnung, deren Durchschnitte mit Ebenen, Linien der zweiten Ordnung oder sogenannte Kegelschnitte geben (I. Bd. §. 141.), und welche selbst unzählich viele senkrechte oder schiefe Kegel vorstellt, nach den verschiedenen Werthen, welche statt der Constanten a, b, c gesetzt werden.

Giebt man dem F_u nach und nach immer andere solche Formen, so bekommt man noch immer andere und andere Geschlechter von krummen Flächen, welche der Bedingung unserer Aufgabe entsprechen, während in jedem dieser Geschlech-

ter wiederum viele Arten von Flächen seyn können, nach den besonderen Bedingungen, denen man die Constanten a, b, c etc. etc. unterwirft; und während in jeder Art wieder unendlich viele einzelne bestimmte Flächen enthalten sind, nach den verschiedenen bestimmten Werthen, die statt der Constanten a, b, c etc. etc. gesetzt werden können.

So kann man z. B. $F_u = \frac{a}{u} + b + cu^2$ nehmen, und man erhält dann aus 5.) die Gleichung

$$\frac{z}{x} = a\frac{x}{y} + b + c\frac{y^2}{x^2} \quad \text{oder} \quad xyz = ax^3 + bx^2y + cy^3,$$

welches die Gleichung einer allgemeineren Kegelfläche ist, die man eine Kegelfläche der dritten Ordnung nennen könnte, in so fern Ebenen durchgelegt werden können, welche diese Fläche in Linien der dritten Ordnung schneiden.

Nimmt man aber $F_u = log\, u$, so hat man aus 5.)

$$\frac{z}{x} = log\, y - log\, x \quad \text{oder} \quad z = x(log\, y - log\, x),$$

welche wiederum die Gleichung einer allgemeineren Kegelfläche ist, die wiederum ihre Spitze in O hat, und welche zu den transcendenten Kegelflächen gezählt werden muß.

Es kann aber unsere Aufgabe gleich von vorn herein, näher bestimmt werden. Macht man z. B. zur Bedingung, daß die gesuchte Fläche, außer daß sie die obige Eigenschaft hat, auch noch durch die durch die Gleichungen

$$6) \qquad z = ax^2 + bx + c \qquad \text{und} \qquad y = x^2 + \beta x$$

gegebene Kurve gehen soll (so daß letztere Kurve ganz in ihr liegt), so muß die Gleichung 5.) identisch werden, so oft $ax^2 + bx + c$ statt z, und $x^2 + \beta x$ statt y gesetzt wird. Die Gleichung 5.) geht aber durch diese Substitutionen über in

$$ax + b + \frac{c}{x} = F_u, \qquad \text{wo} \qquad u = x + \beta \qquad \text{ist.}$$

Findet man aus letzterer Gleichung $x = u - \beta$ und substituirt man diesen Werth von x in die erstere, so erhält man

$$7) \qquad a(u - \beta) + b + \frac{c}{u - \beta} = F_u,$$

so daß nun die Form F_u völlig bestimmt ist. Die Gleichung 5.) giebt daher dasmal, weil $\frac{c}{\frac{y}{x}-\beta} = \frac{cx}{y-\beta x}$ ist,

$$\frac{z}{x} = a\left(\frac{y}{x}-\beta\right)+b+\frac{cx}{y-\beta x}$$

oder

8) $$(y-\beta x)z = a(y-\beta x)^2+bx(y-\beta x)+cx^2;$$

und dies ist die Gleichung einer völlig bestimmten Fläche der zweiten Ordnung.

Daß übrigens, wie auch die Funktion F_u genommen werden mag, die Gleichung 5.) allemal eine Fläche ausdrückt, welche durch Bewegung einer durch O hindurchgehenden Geraden beschrieben wird, geht daraus hervor, weil für alle Punkte der Fläche, für welche $\frac{y}{x}$ denselben constanten Werth α behält, auch allemal $\frac{z}{x}$ denselben constanten Werth F_α hat, was nur dann der Fall ist, wenn alle diese Punkte der Fläche in einer und derselben, durch die Gleichungen $\frac{y}{x}=\alpha$ und $\frac{z}{x}=F_\alpha$ oder

$$y-\alpha x=0 \quad \text{und} \quad z-F_\alpha\cdot x=0$$

gegebenen Geraden liegen.

Man vergleiche hiermit noch den §. 188. des I. Bds.).

Anmerkung. Hätte man unter den Flächen der zweiten Ordnung, also unter den durch die allgemeine Gleichung

1) $$az^2+by^2+cx^2+dxz+eyz+fxy+gz+hy+kx+l=0$$

gegebenen Flächen diejenigen gesucht, welche der in der Aufgabe gestellten Bedingung entsprechen, nämlich der Bedingung, daß alle ihre Tangential-Ebenen durch einen und denselben Punkt hindurch gehen sollen, den man zum Anfangs-Punkt der Koordinaten nehmen kann, — so wäre die Form von F_u bereits gegeben gewesen, und man hätte dann am besten sein Ziel erreicht, wenn man die Gleichung 1.) nach x und nach y differenziirt, aus den dadurch erhaltenen Gleichungen und der 1.), und der Partial-Gleichung 4.) sowohl z, als auch ∂z_x und

∂z_y eliminirt hätte. Die dann entstehende Gleichung muß nämlich identisch werden für jedes x und für jedes y. Ordnet man sie also und setzt man dann die Koefficienten von x, y, x^2, xy, y^2 einzeln der Null gleich, so erhält man die Bedingungs-Gleichungen zwischen den Koefficienten a, b, c, d, e, f, g, h, k, l, welche erfüllt seyn müssen, damit die Gleichung 1.) alle Kegelflächen der zweiten Ordnung vorstelle, während die Koordinaten-Axen durch die Spitze derselben gelegt sind.

Aufgabe 11.

Man sucht eine Fläche, deren Tangential-Ebenen alle mit einer und derselben gegebenen Geraden parallel laufen.

Nimmt man letztere Gerade zur Axe OY, und nimmt man durch einen beliebigen Punkt O derselben, OX und OZ senkrecht auf OY und auch senkrecht auf einander; — sind ferner x, y, z die auf diese Koordinaten-Axen bezogenen Koordinaten-Werthe eines beliebigen Punktes der gesuchten Fläche, so ist die Gleichung einer Tangential-Ebene an diesem Punkte

1) $$z' - y' \cdot \partial z_y - x' \cdot \partial z_x + a = 0.$$

Damit aber diese Ebene mit der Axe OY parallel sey, muß man, weil jede mit OY parallele Ebene durch eine Gleichung von der Form

$$z' - bx' + a = 0$$

ausgedrückt ist,

2) $$\partial z_y = 0$$

nehmen. Diese Gleichung 2.) ist also die Partial-Gleichung der dasmal gesuchten Fläche. Sie liefert, wenn man sie integrirt,

3) $$z = F_x,$$

wo F_x eine ganz willkührliche Funktion von x vorstellt.

Diese Gleichung 3.) läßt sehen, daß die gesuchte Fläche eine allgemeine Cylinder-Fläche ist, deren Seiten auf der Koordinaten-Ebene XOZ senkrecht stehen.

Soll aber die gesuchte Fläche noch der Bedingung genügen, daß eine durch die Gleichungen

$$\varphi_{x,y,z} = 0 \quad \text{und} \quad \psi_{x,y,z} = 0$$

gegebene Kurve ganz und mit allen ihren Punkten in ihr liegt, so finde man aus diesen letztern beiden Gleichungen y und z, in x ausgedrückt, und setze den für z gefundenen Werth z_x statt z in die Gleichung 3.) und man hat F_x so bestimmt, daß die Gleichung 3.) die Cylinder-Fläche giebt, welche auch noch dieser letztern Bedingung genügt.

Anmerkung 1. Hätte man unter den Flächen der zweiten Ordnung alle diejenigen gesucht, deren Tangential-Ebenen alle mit der zur Axe OY angenommenen Geraden parallel laufen, so hätte man aus der allgemeinen Gleichung der Flächen der zweiten Ordnung, zuerst z, dann ∂z_y gesucht, letzteres aber der Null gleich gesetzt, diese Gleichung nach x und nach y geordnet, und zuletzt die Koefficienten von x, y, x^2, xy, y^2 etc. etc. einzeln der Null gleich gesetzt. Dann hätte man die Bedingungs-Gleichungen (zwischen den Koefficienten der allgemeinen Gleichung für die Flächen der zweiten Ordnung) erhalten, welche erfüllt seyn müssen, damit man jedesmal die Gleichung einer Cylinder-Fläche habe, deren Seiten mit OY parallel laufen.

Anmerkung 2. Hätte man in der allgemeinen Aufgabe des Paragraphen, die Axe OY nicht mit der gegebenen Geraden zusammen fallen lassen, sondern hätte man die Koordinaten-Axen beliebig gelegt, die Gerade aber dann durch die Gleichungen

1) $y'' = mx'' + h \quad \text{und} \quad z'' = nx'' + k$

gegeben, so hätte man die Gleichung einer jeden mit dieser Geraden parallelen Ebene so schreiben müssen, nämlich (nach I. Bd. pag. 465. Note)

2) $z' = (n - bm)x' + by' + c.$

Damit aber diese Ebene Tangential-Ebene an dem durch x, y, z bestimmten Punkte der gesuchten Fläche sey, muß man

3) $\partial z_x = n - bm \quad \text{und} \quad \partial z_y = b$

nehmen; und diese beiden Gleichungen, wenn man b eliminirt, geben

4) $$\partial z_x + m \cdot \partial z_y = n$$

als die Partial-Gleichung der gesuchten Fläche.

Diese Gleichung wird wieder nach §. 50.) integrirt und giebt

5) $z - nx = F_u$, wo $u = y - mx$ ist,

während F_u jede beliebige Funktion von u vorstellt.

Diese Gleichung giebt für alle Werthe von x und y, für welche $y - mx$ denselben constanten Werth α hat, auch für $z - nx$ einen und denselben constanten Werth F_α. Daher liegen alle diese Punkte in einer und derselben Geraden, die mit der 1.) parallel ist. Die in 5.) gefundene Fläche wird also durch Bewegung einer mit der 1.) parallelen Geraden beschrieben; sie ist daher allemal eine (allgemeine) Cylinderfläche.

Soll nun die Funktion F_u näher bestimmt werden, so muß man auch die Aufgabe selbst näher bestimmen. Soll z. B. die gesuchte Fläche noch durch die, mittelst der Gleichungen

6) $y = \alpha x + \beta$ und $z = \gamma x^2 + \delta x + \varepsilon$

gegebene Kurve hindurch gehen, so setze man, um F_u dieser Bedingung gemäß zu bestimmen, diese Werthe aus 6.) statt y und z in die Gleichung 5.); und man erhält

7) $\gamma x^2 + (\delta - n)x + \varepsilon = F_u$, wo $u = (\alpha - m)x + \beta$.

Findet man aber aus der letztern Gleichung $x = \frac{u - \beta}{\alpha - m}$, und setzt man diesen Werth von x in die erstere der Gleichungen 7.), so ergiebt sich

8) $$\frac{\gamma}{(\alpha - m)^2}(u - \beta)^2 + \frac{\delta - n}{\alpha - m}(u - \beta) + \varepsilon = F_u,$$

wodurch die Form der Funktion F_u gefunden ist.

Die Gleichung 5.) der gesuchten Fläche wird nun

9) $$z - nx = \frac{\gamma}{(\alpha - m)^2}(y - mx - \beta)^2 + \frac{\delta - n}{\alpha - m}(y - mx - \beta) + \varepsilon;$$

und diese Fläche genügt also nun allen Bedingungen der Aufgabe. Sie ist eine Cylinder-Fläche der zweiten Ordnung, welche von jeder Ebene in einer Ellipse (wenn nicht in zwei parallelen Geraden) geschnitten wird.

Auf-

Aufgabe 12.

Man soll eine Fläche finden, welche die Eigenschaft hat, daß jede Tangential-Ebene an irgend einem Punkte derselben, sie längs einer Linie berührt, so daß die Tangential-Ebenen an allen Punkten dieser Linie in eine und dieselbe zusammen fallen.

Da diese Aufgabe bereits in der Note zu pag. 461. des I. Bds.) gelöst ist, so schreiben wir bloß hier die dort für diese Fläche bereits gefundene Partial-Gleichung (der zweiten Ordnung) her, nämlich

$$1) \qquad \partial^2 z_x \cdot \partial^2 z_y - (\partial^{1,1} z_{x,y})^2 = 0.$$

Ihr allgemeines Integral muß zwei willkührliche Funktionen in sich aufnehmen.

Wir wollen diese Gleichung 1.) dadurch integriren, daß wir zunächst ein besonderes Integral aufsuchen, und dann aus diesem ein allgemeines abzuleiten trachten (nach dem Muster des §. 52. N. 2.). Man bemerkt aber leicht, daß der Gleichung 1.) genügt ist, wenn man

$$\partial^2 z_x = \partial^2 z_y = \partial^{1,1} z_{x,y} = 0$$

nimmt. Aus $\partial^2 z_x = 0$ folgt aber $\partial z_x = f_y$ d. h. ∂z_x nach x constant; und aus $\partial^{1,1} z_{x,y} = 0$ folgt $\partial z_x = \varphi_x$, d. h. ∂z_x auch nach y constant. Also muß man

$$\partial z_x = a$$

nehmen, wo a constant ist nach x und nach y. — Aus ganz analogen Gründen muß

$$\partial z_y = b$$

genommen werden, wo b constant ist nach x und nach y. Also muß man

$$2) \qquad z - ax - by - c = 0 \qquad \text{oder} \qquad F_{x,y,z} = 0$$

nehmen, wenn man ein besonderes Integral der Gleichung 1.) haben will, wo a, b, c nach x und nach y constant sind, und

wo man den Ausdruck $z - ax - by - c$ durch $F_{x,y,z}$ bezeichnet hat.

Denkt man sich nun a, b und c als ganz willkührliche Funktionen von α, und α selbst als die durch

3) $\partial F_\alpha = 0$ oder $x \cdot \partial a_\alpha + y \cdot \partial b_\alpha + \partial c_\alpha = 0$

gegebene Funktion von x und y (und z), so wird die Gleichung 2.) der Partial-Gleichung 1.) noch genügen, aber willkührliche Funktionen a_α, b_α und c_α von einer bestimmten Funktion α von x und y (und z) enthalten. Man hat also nun eine Art allgemeines Integral der Partial-Gleichung 1.), wenn auch in einer wenig bequemen Form.

Die Gleichung 3.), wenn man solche durch ∂a_α, oder durch ∂b_α, oder durch ∂c_α dividirt, läßt übrigens sehen, daß man je zwei der drei Buchstaben a, b, c als Funktionen des dritten ansehen könne, und daß dann nur dieser dritte aus den Gleichungen 2.) und 3.) eliminirt werden dürfe, um die gesuchte Integral-Gleichung, welche jetzt nur noch zwei willkührliche Funktionen enthält, zu erhalten *).

Setzt man also etwa $c = \alpha$, so erhält man die Gleichung der hier gesuchten Fläche, wenn man aus

4) $z - a_\alpha \cdot x - b_\alpha \cdot y - \alpha = 0$

und

5) $x \cdot \partial a_\alpha + y \cdot \partial b_\alpha + 1 = 0$

den Veränderlichen α eliminirt.

Weil aber die Gleichung 4.), so oft α irgend einen bestimmten Werth hat, die Gleichung einer Ebene ist, so stellen die beiden Gleichungen 4.) und 5.), wenn sie für jedes α ge-

---

*) Dieselbe Partial-Gleichung der zweiten Ordnung hat auch ein erstes Integral, nämlich

$$q = F_p$$

wenn $\partial z_y = q$, $\partial z_x = p$ gesetzt wird, und wenn F_p eine ganz willkührliche Funktion von p vorstellt.

meinschaftlich statt finden sollen, die Gleichung jeder Fläche vor, welche durch Bewegung einer Ebene entsteht, d. h. jeder abwickelbaren Fläche (nach I. Bd. §. 187.). — Benutzt man diese Bemerkung, so kann man auch leicht noch die beiden willkührlichen Funktionen a_α und b_α so bestimmen, daß die Fläche selbst noch zweien Bedingungen genügt.

Soll z. B. die gesuchte Fläche noch durch zwei, mittelst der Gleichungen

6) $y = \varphi_x$ und $z = \psi_x$

und

7) $y = \varphi'_x$ und $z = \psi'_x$

gegebene Kurven hindurch gehen, so wird bei irgend einer festen Lage der sich bewegenden Ebene, die Tangente der erstern Kurve, an einem Punkte, welcher den Abscissen-Werth β hat, ganz in dieser Ebene liegen, während dasselbe auch von der Tangente der andern Kurve gilt, nur daß ein anderer Berührungs-Punkt seyn wird, welcher den Abscissen-Werth γ haben mag. Dabei sind β und γ offenbar unbekannte Funktionen von α.

Da nun die Gleichungen der erstern Tangente (nach §. 180. d. I. Bds.) diese sind:

8) $y - \varphi_\beta = \partial\varphi_\beta \cdot (x - \beta)$ und $z - \psi_\beta = \partial\psi_\beta \cdot (x - \beta)$,

und die Gleichung der Ebene 4.), weil sie durch denselben Berührungs-Punkt gehen soll, diese ist:

9) $z - \psi_\beta = a_\alpha \cdot (x - \beta) + b_\alpha \cdot (y - \varphi_\beta)$,

so müssen diese aus 8.) gezogenen Werthe von y und z, die Gleichung 9.) identisch machen. Dies giebt aber die Gleichung

I. $\partial\psi_\beta = a_\alpha + \partial\varphi_\beta \cdot b_\alpha$.

Die Gleichungen der zweiten Tangente sind

10) $y - \varphi'_\gamma = \partial\varphi'_\gamma \cdot (x - \gamma)$ und $z - \psi'_\gamma = \partial\psi'_\gamma \cdot (x - \gamma)$;

und diese Werthe von y und z in die 9.) substituirt, müssen letztere wieder identisch machen. Dies giebt aber die Gleichung

II. $$\partial\psi'_\gamma = a_\alpha + \partial\varphi'_\gamma \cdot b_\alpha.$$

Zur Bestimmung von β und γ hat man endlich die Gleichung 4.), welche identisch werden muß, einmal wenn die Koordinaten-Werthe des einen Berührungs-Punktes $(\beta, \varphi_\beta, \psi_\beta)$, dann aber auch wenn die Koordinaten-Werthe des andern Berührungs-Punktes $(\gamma, \varphi'_\gamma, \psi'_\gamma)$ bezüglich statt x, y, z gesetzt werden. Dies giebt die Gleichungen

III. $$\psi_\beta - \beta \cdot a_\alpha - \varphi_\beta \cdot b_\alpha - \alpha = 0$$

IV. $$\psi'_\gamma - \gamma \cdot a_\alpha - \varphi'_\gamma \cdot b_\alpha - \alpha = 0.$$

Eliminirt man nun aus den vier Gleichungen I.—IV.) sowohl β als auch γ, so bleiben zwei Gleichungen übrig, welche a_α und b_α in α ausgedrückt liefern, so daß nun diese anfänglich willkührlichen Funktionen den jetzigen Bedingungen gemäß bestimmt sind.

Substituirt man zuletzt diese Werthe statt a_α und b_α in die Gleichungen 4.) und 5.), und eliminirt man dann α aus diesen beiden Gleichungen, so hat man die Gleichung der Fläche, welche allen gegebenen Bedingungen entspricht.

Es seyen z. B. die Kurven gegeben

$$y = \varphi_x = mx^2, \quad z = \psi_x = nx^2,$$
$$y = \varphi'_x = m'x^2, \quad z = \psi'_x = n'x^2;$$

so hat man $\partial\varphi_x = 2mx$, $\partial\psi_x = 2nx$, $\partial\varphi'_x = 2m'x$ und $\partial\psi'_x = 2n'x$.

Die vier Gleichungen I.—IV.) werden nun folgende:

1′) $$2n\beta = a + 2m\beta \cdot b,$$
2′) $$2n'\gamma = a + 2m'\gamma \cdot b,$$
3′) $$n\beta^2 - \beta \cdot a - m\beta^2 \cdot b - \alpha = 0,$$
4′) $$n'\gamma^2 - \gamma \cdot a - m'\gamma^2 \cdot b - \alpha = 0.$$

Findet man aus den beiden erstern Gleichungen

$$\beta = \frac{a}{2n - 2mb} \quad \text{und} \quad \gamma = \frac{a}{2n' - 2m'b},$$

und substituirt man diese Werthe in die Gleichungen 3′.) und 4′.); dividirt man letztere durch a^2 weg, und subtrahirt man sie dann von einander, um a zu eliminiren, so erhält man eine kubische Gleichung zur Bestimmung von b, welche kein α enthält, welche also b constant liefert. — Die eine der letztern beiden Gleichungen giebt dann $a = c \cdot \sqrt{\alpha}$, wo c auch eine in m, n, m′, n′ ausgedrückte Constante vorstellt.

Die Gleichungen 4.) und 5.) werden nun, weil $\partial b_\alpha = 0$ ist,

$$z - cx \cdot \sqrt{\alpha} - by - \alpha = 0 \quad \text{und} \quad \frac{cx}{2\sqrt{\alpha}} + 1 = 0.$$

Eliminirt man α aus beiden, so ergiebt sich zuletzt

$$z + \tfrac{1}{4}c^2x^2 - by = 0.$$

Dies ist also die Gleichung der hier gesuchten (abwickelbaren) Fläche, welche letztere dasmal von der zweiten Ordnung ist.

Achtes Kapitel.

Noch einiges über bestimmte Integrale; als Fortsetzung des zweiten Kapitels.

Vorerinnerung.

Es ist oft wünschenswerth, daß man in den Fällen, wo das allgemeine Integral entweder nur in unendlichen Reihen, oder in anderer unbequemer Form hergestellt werden kann, den Werth eines bestimmten Integrals zwischen völlig bestimmten, in Ziffern-Werthen gegebenen Grenzen, z. B. zwischen 0 und ∞, oder zwischen $-\infty$ und $+\infty$, oder zwischen 0 und 1, u. d. gl. anzugeben wisse. — Wir wollen daher hier einige Methoden geben, die man zu diesem Behufe anwenden kann.

§. 58.

Eine sehr einfache Methode, Werthe von bestimmten Integralen zu erhalten, besteht aber darin, daß man von bekannten, oder leicht zu findenden Integralen und ihren Werthen ausgeht, und solche nach einem zweiten Buchstaben, den sie noch enthalten, integrirt oder differenziirt. Nachstehende Beispiele werden dies näher erläutern.

Es ist

$$1) \qquad \int e^{-kx} \cdot dx = -\frac{e^{-kx}}{k}.$$

Daraus folgt, wenn k positiv ist, weil dann e^{-kx} für $x = \infty$ der Null gleich wird,

$$I. \qquad \int_{\infty \div 0} e^{-kx} \cdot dx = \frac{1}{k} \text{ (wenn k positiv).}$$

Denkt man sich also z positiv und statt k gesetzt, und

dann links und rechts das Integral nach z genommen zwischen den positiven Grenzen a und b, so erhält man:

$$2)\quad \int_{b\div a}\left(\int_{\infty\div 0} e^{-xz}\cdot dx\right)\cdot dz = log\, b - log\, a = log\,\frac{b}{a}.$$

Weil man aber links dasselbe Resultat erhält, wenn man die Ordnung der Integration umkehrt (nach §. 23.) und weil (nach 1.)

$$\int_{b\div a} e^{-xz}\cdot dz = \frac{-e^{-bx}+e^{-ax}}{x}$$

ist, so giebt die 2.) noch

$$\text{II.}\quad \int_{\infty\div 0}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\cdot dx = log\,\frac{b}{a}$$ (wenn a und b positiv),

so daß man nun II.) aus I.) auf dem beschriebenen Wege erhalten hat.

Es ist ferner (nach 1.), wenn i die $\sqrt{-1}$ vorstellt,

$$\int e^{-(k+\theta\cdot i)x}\cdot dx = -\frac{e^{-(k+\theta\cdot i)x}}{k+\theta\cdot i} = -\frac{(k-\theta\cdot i)\cdot e^{-(k+\theta\cdot i)x}}{k^2+\theta^2}.$$

Setzt man hier links und rechts statt $e^{-(k+\theta\cdot i)x}$ den gleichen Ausdruck $e^{-kx}\cdot(cos\,\theta x - i\cdot sin\,\theta x)$ oder $e^{-kx}\cdot cos\,\theta x - i\cdot e^{-kx}\cdot sin\,\theta x$, und zerlegt man links und rechts die Ausdrücke in zwei Theile, wovon der eine kein i, der andere aber i als Faktor enthält; — und setzt man dann die reellen Theile einzeln und die imaginären Theile einzeln einander gleich, so erhält man

$$\int e^{-kx}\cdot cos\,\theta x\cdot dx = -\frac{k\cdot cos\,\theta x-\theta\cdot sin\,\theta x}{k^2+\theta^2}\cdot e^{-kx}$$

$$\int e^{-kx}\cdot sin\,\theta x\cdot dx = -\frac{\theta\cdot cos\,\theta x+k\cdot sin\,\theta x}{k^2+\theta^2}\cdot e^{-kx}$$ *).

---

*) Dieselben beiden Resultate erhält man auf ganz direktem Wege, indem man statt $cos\,\theta x$ und $sin\,\theta x$ ihre Werthe $\frac{e^{\theta x\cdot i}+e^{-\theta x\cdot i}}{2}$ und $\frac{e^{\theta x\cdot i}-e^{-\theta x\cdot i}}{2i}$ setzt, mit e^{-kx} wirklich multiplicirt und dann geradezu integrirt.

Ist nun k positiv, so wird für $x = \infty$, e^{-kx} der Null gleich; und man erhält

$$\left.\begin{aligned} \text{III.}\quad & \int_{\infty \div 0} e^{-kx} \cdot \cos \theta x \cdot dx = \frac{k}{k^2 + \theta^2} \\ \text{IV.}\quad & \int_{\infty \div 0} e^{-kx} \cdot \sin \theta x \cdot dx = \frac{\theta}{k^2 + \theta^2} \end{aligned}\right\} \text{(wenn k positiv).}$$

Will man nun aus diesen bestimmten Integralen, noch neue bestimmte Integrale finden, so darf man nur die erhaltenen Gleichungen links und rechts nach einem darin vorkommenden Buchstaben differenziiren oder integriren (letzteres zwischen gegebenen Grenzen). Integrirt man z. B. die III.) links und rechts nach θ, so erhält man, weil

$$\int e^{-kx} \cdot \cos \theta x \cdot d\theta = \frac{e^{-kx} \cdot \sin \theta x}{x} \quad \text{und} \quad \int \frac{k}{k^2 + \theta^2} \cdot d\theta = \frac{1}{tg} \frac{\theta}{k}$$

ist, und wenn man die Integrale zwischen den Grenz-Werthen a und b von θ, nimmt,

$$\text{V.}\quad \int_{\infty \div 0} \frac{e^{-kx} \cdot (\sin bx - \sin ax)}{x} \cdot dx = \frac{1}{tg} \frac{b}{k} - \frac{1}{tg} \frac{a}{k} \text{ (wenn k positiv).}$$

Dieselben Resultate ergeben sich auch noch leichter, wenn man theilweise integrirt, d. h. die Formel §. 4. N. 3.) anwendet. Dadurch bekommt man Gleichungen, aus denen sich die Integrale auf algebraischem Wege finden. Man erhält nämlich durch theilweise Integration

$$\int e^{-kx} \cdot \cos \theta x \cdot dx = \frac{e^{-kx} \cdot \sin \theta x}{\theta} + \frac{k}{\theta} \int e^{-kx} \cdot \sin \theta x \cdot dx$$

und

$$\int e^{-kx} \cdot \sin \theta x \cdot dx = -\frac{e^{-kx} \cdot \cos \theta x}{\theta} - \frac{k}{\theta} \int e^{-kx} \cdot \cos \theta x \cdot dx.$$

Bezeichnet man nun die beiden gesuchten Integrale bezüglich durch u und durch v, so hat man zwei Gleichungen zwischen u und v (algebraische vom ersten Grade), aus denen nun sogleich (durch algebraische Auflösung derselben nach den beiden Unbekannten u und v) diese Unbekannten u und v gefunden werden.

Für $a = 0$ folgt hieraus, weil $\frac{1}{tg} 0 = 0$ ist,

VI. $$\int_{\infty \div 0} \frac{e^{-kx} \cdot \sin bx}{x} \cdot dx = \frac{1}{tg} \frac{b}{k}$$ (wenn k positiv).

Denkt man sich nun k zwar positiv, aber unendlich klein, so wird $\frac{b}{k}$ unendlich groß und mit b zugleich positiv oder negativ; also nähert sich $\frac{1}{tg} \frac{b}{k}$ unendlich nahe dem $+\frac{\pi}{2}$, wenn b positiv, und dem $-\frac{\pi}{2}$, wenn b negativ; und so kann man folgern, daß für $k = 0$ als Uebergang hervorgeht

VII. $$\int_{\infty \div 0} \frac{\sin bx}{x} \cdot dx = \pm \frac{\pi}{2}$$ (je nachdem b $\begin{matrix}\text{positiv} \\ \text{negativ}\end{matrix}$ ist).

Dieses Integral wird in vielen Fällen mit Erfolg angewendet.

Integrirt man die IV.) nach θ zwischen den Grenzen a und b, so erhält man, weil

$$\int e^{-kx} \cdot \sin \theta x \cdot d\theta = - \frac{e^{-kx} \cdot \cos \theta x}{x}$$

und $$\int \frac{\theta}{k^2 + \theta^2} \cdot d\theta = \tfrac{1}{2} \log (k^2 + \theta^2)$$

ist,

VIII. $$\int_{\infty \div 0} \frac{e^{-kx} \cdot (\cos ax - \cos bx)}{x} \cdot dx$$
$$= \tfrac{1}{2} \log \frac{k^2 + b^2}{k^2 + a^2}$$ (wenn k positiv ist).

Integrirt man dagegen die IV.) nach k, so erhält man, wegen

$$\int_{k \div 0} e^{-kx} \cdot \sin \theta x \cdot dk = - \frac{e^{-kx} \cdot \sin \theta x}{x} + \frac{\sin \theta x}{x},$$

sogleich (wenn man links und rechts die Integrale zwischen 0 und k nimmt)

$$\int_{\infty \div 0} \frac{\sin \theta x}{x} \cdot dx - \int_{\infty \div 0} \frac{e^{-kx} \cdot \sin \theta x}{x} \cdot dx = \frac{1}{tg} \frac{k}{\theta},$$

sobald nur k positiv ist. Addirt man aber hierzu die Gleichung VI.), nachdem man in letzterer vorher θ statt b gesetzt hat, so erhält man

$$\int_{\infty \div 0} \frac{\sin \theta x}{x} \cdot dx = \frac{1}{tg} \frac{k}{\theta} + \frac{1}{tg} \frac{\theta}{k},$$

während die beiden Bogen zur Rechten positiv sind, wenn θ positiv, und negativ, wenn θ negativ ist, — die Summe derselben Bogen aber allemal $\frac{1}{2}\pi$ ist. Also hat man das Resultat VII.) noch einmal, und ohne daß man das dortige k, welches immer positiv ist, der Null gleich zu nehmen braucht, wie dort geschehen ist.

Integrirt man eben so die III.) nach k zwischen den Grenzen 0 und k, so erhält man sogleich:

IX. $$\int_{\infty \div 0} \frac{(1 - e^{-kx}) \cdot \cos \theta x}{x} \cdot dx = \tfrac{1}{2} log \frac{k^2 + \theta^2}{\theta^2}$$ (wenn k positiv).

Wird nun hier h statt k gesetzt, und dieses neue Resultat von der IX.) selbst wieder subtrahirt, so ergiebt sich noch

X. $$\int_{\infty \div 0} \frac{(e^{-hx} - e^{-kx}) \cdot \cos \theta x}{x} \cdot dx = \tfrac{1}{2} log \frac{k^2 + \theta^2}{h^2 + \theta^2}$$ (wenn h u. k positiv).

Setzt man in VI.) h statt k, und subtrahirt man die III.) von diesem neuen Resultate, so ergiebt sich dagegen, wenn noch θ statt b gesetzt wird,

XI. $$\int_{\infty \div 0} \frac{(e^{-hx} - e^{-kx}) \cdot \sin \theta x}{x} \cdot dx$$

$$= \frac{1}{tg} \frac{\theta}{h} - \frac{1}{tg} \frac{\theta}{k}$$

$$= \frac{1}{tg} \frac{k}{\theta} - \frac{1}{tg} \frac{h}{\theta}$$ *) (wenn k und h positiv).

Differenziirt man alle diese Resultate wieder nach h, nach k, oder nach θ, oder nach b, oder nach a, etc. etc., so erhält man immer wieder richtige Resultate, jedoch hier meist

---

*) Da $\frac{1}{tg} \frac{\theta}{h} = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{tg} \frac{h}{\theta}$ ist.

die vorher schon bekannten, oder aus diesen leicht zusammensetzbaren *).

§. 59.

Diese vorstehende Methode besteht also zum Theil darin, daß man das gesuchte Integral $= y$ setzt, dann für ∂y_k seinen Werth f_k zu finden trachtet, um dann aus der gefundenen Gleichung

$$\partial y_k = f_k$$

durch Integration nach k, den Werth von y zu erhalten.

Dieses Verfahren verallgemeinert man aber, wenn man, statt sich die einfachste Differential-Gleichung $\partial y_k = f_k$ zu verschaffen, überhaupt eine Differential-Gleichung zwischen ∂y_k und k, in welcher aber auch y selbst noch vorkommt, zu er-

---

*) Nimmt man das Resultat VII.) und differenziirt man solches nach b, so erhält man

$$\int_{\infty \div 0} cos\, bx \cdot dx = 0;$$

und dies Resultat ist offenbar unrichtig, weil man nach §. 20.) das Integral als eine Summe aller stetig neben einander liegenden Werthe von $cos\, bx \cdot dx$ ansehen muß, solche Summe aber für alle Werthe von x von 0 bis $\frac{2\pi}{b}$, dann wieder von $\frac{2\pi}{b}$ bis $\frac{4\pi}{b}$, dann wieder von $\frac{4\pi}{b}$ bis $\frac{6\pi}{b}$, u. s. f., überhaupt von $\frac{2n\pi}{b}$ bis $\frac{2(n+1)\pi}{b}$, einzeln der Null gleich wird, also im Ganzen allerdings ebenfalls der Null gleich werden müßte, wenn man annehmen könnte, daß ∞ von der Form $\frac{2n\pi}{b}$ ist, wo n selbst unendlich groß ist. Nimmt man aber ∞ von der Form $\frac{2n\pi+\varphi}{b}$, indem man n unendlich groß sich denkt, so erhält man wegen

$$\int cos\, bx \cdot dx = \frac{1}{b} \cdot sin\, bx,$$

sogleich $\int_{\infty \div 0} cos\, bx \cdot dx = \frac{1}{b} \cdot sin\, \varphi$, wo φ beliebig groß ist.

Der Grund der obigen Unrichtigkeit liegt hiernach darin, daß $\int_{\infty \div 0} cos\, bx \cdot dx$ überhaupt keinen bestimmten Werth hat, so daß natürlich auch keiner gefunden werden kann.

halten und diese dann zu integriren sucht. Dies Verfahren mögen nachstehende Beispiele näher nachweisen.

A. Sucht man z. B.

$$1)\qquad \int_{\infty \div 0} \frac{\sin \alpha x}{x} \cdot \frac{1}{b^2 + x^2} \cdot dx = y,$$

so erhält man, wenn diese Gleichung zweimal hinter einander nach α differenziirt wird, einmal

$$2)\qquad \int_{\infty \div 0} \frac{\cos \alpha x}{b^2 + x^2} \cdot dx = \partial y_\alpha$$

und dann

$$3)\qquad -\int_{\infty \div 0} \sin \alpha x \cdot \frac{x}{b^2 + x^2} \cdot dx = \partial^2 y_\alpha,$$

während das letztere Integral auch so geschrieben werden kann

$$\int \frac{\sin \alpha x}{x} \cdot \frac{(b^2 + x^2) - b^2}{b^2 + x^2} \cdot dx$$

$$= \int \frac{\sin \alpha x}{x} \cdot dx - b^2 \int \frac{\sin \alpha x}{x} \cdot \frac{1}{b^2 + x^2} \cdot dx.$$

Denkt man sich also α positiv, so daß $\int_{\infty \div 0} \frac{\sin \alpha x}{x} \cdot dx = +\frac{1}{2}\pi$ (nach §. 58. VII.) genommen werden kann, so führt die 3.) zu der Differential-Gleichung

$$4)\qquad \partial^2 y_\alpha - b^2 y + \tfrac{1}{2}\pi = 0.$$

Integrirt man nun diese Gleichung, welche lineär und von der zweiten Ordnung ist nach §. 42.), so erhält man y mit zwei willkührlichen Constanten; und bestimmt man nachgehends diese beiden Constanten, den vorhandenen Bedingungen gemäß, so hat man das gesuchte y selbst.

Um diese lineäre vollständige Gleichung in eine reducirte zu verwandeln, setze man

$$5)\quad y - \frac{\frac{1}{2}\pi}{b^2} = z, \quad \text{also} \quad \partial y_\alpha = \partial z_\alpha \quad \text{und} \quad \partial^2 y_\alpha = \partial^2 z_\alpha.$$

Dann erhält man aus 4.)

$$6)\qquad \partial^2 z_\alpha - b^2 z = 0,$$

und diese, integrirt, giebt

7) $$z = C \cdot e^{b\alpha} + C' \cdot e^{-b\alpha},$$

wo C und C′ die beiden willkührlichen Constanten sind, welche jetzt noch bestimmt werden müssen. Weil aber der Werth von y, wenn auch $\alpha = \infty$ gedacht wird, nicht selbst unendlich groß werden kann, dies aber hier der Fall seyn würde, wenn nicht $C = 0$ wäre, so hat man hieraus

8) $$C = 0 \quad \text{und} \quad z = C' \cdot e^{-b\alpha},$$

wo bloß noch die Constante C′ zu bestimmen bleibt. Um diese zu bestimmen, nehme man die Gleichung 2.). Sie giebt

$$\int_{\infty \div 0} cos\, \alpha x \cdot \frac{1}{b^2 + x^2} \cdot dx = \partial y_\alpha = \partial z_\alpha = -bC' \cdot e^{-b\alpha}.$$

Und weil dies Integral für $\alpha = 0$ zur Linken in

$$\int_{\infty \div 0} \frac{1}{b^2 + x^2} \cdot dx = \left[\frac{1}{b} \cdot \mathit{tg}^{-1} \frac{x}{b}\right]_{\infty \div 0} = \frac{\frac{1}{2}\pi}{b} \quad \text{(wenn b positiv ist)},$$

zur Rechten aber in $-bC'$ übergeht, so folgt $-bC' = \frac{\frac{1}{2}\pi}{b}$, also

9) $$C' = -\frac{\frac{1}{2}\pi}{b^2} \text{*)} \quad \text{und} \quad z = -\frac{\frac{1}{2}\pi}{b^2} \cdot e^{-b\alpha};$$

also

10) $$y = \frac{\frac{1}{2}\pi}{b^2}(1 - e^{-b\alpha}),$$

---

*) Es könnte scheinen, daß man nicht $\alpha = 0$ setzen dürfe, weil vorher α positiv vorausgesetzt worden ist. Man kann sich aber bloß α positiv und unendlich klein denken, dann aber $\int_{\infty \div 0} cos\, \alpha x \cdot \frac{1}{b^2 + x^2} \cdot dx$ in zwei Integrale zerlegen, wovon das eine von 0 bis k, das andere von k bis ∞ genommen ist, — zuletzt aber $k = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ nehmen, wodurch k selbst unendlich groß wird, so wie α unendlich klein gedacht ist; und man überzeugt sich von der Richtigkeit der obigen Folgerung, wenn man noch bemerkt, daß allemal, abgesehen vom Vorzeichen, nach §. 24. V.)

$$\int_{\infty \div 0} cos\, \alpha x \cdot \frac{1}{b^2 + x^2} \cdot dx < \int_{\infty \div 0} \frac{1}{b^2 + x^2} \cdot dx \quad \text{ist},$$

daß daher das erstere Integral nothwendig zwischen $-\frac{\pi}{2b}$ und $+\frac{\pi}{2b}$ liegt.

d. h.

$$\text{XII.} \int_{\infty \div 0} \frac{\sin \alpha x}{x} \cdot \frac{1}{b^2 + x^2} \cdot dx = \frac{\pi}{2b^2}(1 - e^{-b\alpha}) \text{ (wenn b u. } \alpha \text{ positiv).}$$

Differenziirt man diese Gleichung nach α, so erhält man sogleich noch

$$\text{XIII.} \int_{\infty \div 0} \frac{\cos \alpha x}{b^2 + x^2} \cdot dx = \frac{\pi}{2b} \cdot e^{-b\alpha} \text{ (wenn b und } \alpha \text{ positiv).}$$

Und differenziirt man diese Gleichung noch einmal nach α, so ergiebt sich

$$\text{XIV.} \int_{\infty \div 0} \frac{x \cdot \sin \alpha x}{b^2 + x^2} \cdot dx = \frac{\pi}{2} \cdot e^{-b\alpha} \text{ (wenn b und } \alpha \text{ positiv).}$$

B. Um ein anderes Beispiel zu nehmen, sey

$$1) \qquad z = \int_{\infty \div 0} e^{-a^2x^2} \cdot \cos bx \cdot dx$$

zu finden. Man erhält sogleich

$$2) \qquad \partial z_b = -\int_{\infty \div 0} e^{-a^2x^2} \cdot x \times \sin bx \cdot dx,$$

oder, wenn man rechts nach x theilweise integrirt,

$$3) \quad \partial z_b = \left[\frac{e^{-a^2x^2}}{2a^2} \cdot \sin bx\right]_{\infty \div 0} - \frac{b}{2a^2} \int_{\infty \div 0} e^{-a^2x^2} \cdot \cos bx \cdot dx \cdot$$

Denkt man sich nun a positiv, so verschwindet das erste Glied zur Rechten, sowohl für $x = 0$, als auch für $x = \infty$, und man erhält dann sogleich, mit Zuziehung der 1.) die Gleichung

$$4) \qquad \partial z_b + \frac{b}{2a^2} z = 0 \text{ (wenn a positiv).}$$

Diese lineäre Gleichung, integrirt, giebt

$$5) \qquad z = C \cdot e^{-\frac{b^2}{4a^2}},$$

wo C eine zu bestimmende Constante ist. Setzt man aber $b = 0$, so sieht man, daß C der Werth von z ist, den solcher für $b = 0$ annimmt. Man hat also

$$6) \qquad C = \int_{\infty \div 0} e^{-a^2x^2} \cdot dx$$

oder (nach §. 22. Anmerk. N. 3.), wenn man $ax = t$ setzt,

7) $$C = \frac{1}{a}\int_{\infty \div 0} e^{-t^2} \cdot dt.$$

Also findet man auf unserem Wege aus 5.)

8) $$\int_{\infty \div 0} e^{-a^2x^2} \cdot cos\, bx \cdot dx$$

$$= \frac{1}{a} \cdot e^{-\frac{b^2}{4a^2}} \cdot \int_{\infty \div 0} e^{-t^2} \cdot dt$$ (wenn a positiv);

und es bleibt bloß noch dieses letztere Integral zu finden. Laplace, der das vorstehende Integral z auf diesem Wege zu finden unternommen hat, hat auch den Werth dieses letzteren, wegen seiner Anwendung in der Wahrscheinlichkeits-Rechnung bemerkenswerthen Integrals bestimmt. Man kann namentlich diesen Werth auf folgende Art finden:

Setzt man nämlich

$$\int_{\infty \div (-\infty)} e^{-x^2} \cdot dx = k,$$

so ist auch

$$\int_{\infty \div (-\infty)} e^{-y^2} \cdot dy = k;$$

folglich hat man, wenn man diese beiden Gleichungen mit einander multiplicirt, weil man bei jedem Integral einen constanten Faktor außen stehen lassen, oder auch unter das Integral-Zeichen mit hineinziehen kann,

$$\int_{\infty \div (-\infty)} \left(\int_{\infty \div (-\infty)} e^{-(x^2+y^2)} \cdot dx \right) \cdot dy = k^2.$$

Setzt man nun

$$e^{-(x^2+y^2)} = z,$$

so wird

$$k^2 = \int_{\infty \div (-\infty)} \left(\int_{\infty \div (-\infty)} z \cdot dx \right) \cdot dy.$$

Denkt man sich nun x, y, z als rechtwinkliche Koordinaten-Werthe der durch die Gleichung $z = e^{-(x^2+y^2)}$ gegebenen Fläche (welche um OZ herum nach allen Seiten hin sich in's Unendliche ausbreitet, dabei aber der Ebene XOZ rings um OZ herum in unendlicher Entfernung von OZ unendlich nahe kommt), so stellt k^2 offenbar den Inhalt des von dieser Oberfläche und von der Ebene XOY gebildeten Körpers vor. Und da sich der-

selbe Inhalt auch noch dadurch findet, daß man um OZ herum als gemeinschaftliche Axe, unendlich viele Cylinder-Flächen sich denkt, deren Grundflächen den Radius $\sqrt{x^2+y^2}=r$ haben, der nach und nach von 0 an bis in's Unendliche, um das unendlich kleine dr wächst, — und zuletzt die Inhalte aller dieser Hohl-Cylinder addirt, — so findet sich dasselbe k^2 noch so:

$$k^2 = 2\pi \cdot \int_{\infty \div 0} e^{-r^2} \cdot r \cdot dr.$$

Nun ergiebt sich aber, wenn $r^2 = u$ gesetzt wird,

$$\int e^{-r^2} \cdot r \cdot dr = \tfrac{1}{2} \int e^{-u} \cdot du = -\tfrac{1}{2} e^{-u};$$

also wird

$$k^2 = \pi \quad \text{und} \quad k = \sqrt{\pi}.$$

Man hat also nun gefunden

XV. $\int_{\infty \div (-\infty)} e^{-x^2} \cdot dx = \sqrt{\pi}$ oder $\int_{\infty \div 0} e^{-x^2} \cdot dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

Daraus folgt nun auch, wegen der 8.),

XVI. $\int_{\infty \div 0} e^{-a^2x^2} \cdot cos\, bx \cdot dx = \dfrac{1}{2a} \cdot e^{-\frac{b^2}{4a^2}} \cdot \sqrt{\pi}$ (wenn a positiv),

wobei noch zu bemerken, daß weil die Funktion $e^{-a^2x^2} \cdot cos\, bx$, wenn $-x$ statt x gesetzt wird, ihr Zeichen nicht ändert, das zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ genommene Integral, das Doppelte des vorstehenden ist (nach §. 24. II.).

Anmerkung. Setzt man in XV.) $e^{-x^2} = z$, so wird $-2x \cdot e^{-x^2} \cdot dx = dz$, also $e^{-x^2} \cdot dx = -\tfrac{1}{2} \dfrac{dz}{x}$. Nun folgt aber aus $e^{-x^2} = z$, noch $e^{x^2} = \dfrac{1}{z}$, also $x^2 = log \dfrac{1}{z}$ und $x = \sqrt{\left(log \dfrac{1}{z}\right)}$, während für $x = \infty$, $z = 0$, und für $x = 0$, $z = 1$ wird. Die Formel XV.) geht also dadurch über in

XVII. $$\int_{1 \div 0} \frac{1}{\sqrt{\left(log \frac{1}{z}\right)}} \cdot dz = \sqrt{\pi}.$$

Diese

Diese Formel hat schon Euler gefunden. Setzt man in ihr $z = e^{-x^2}$, so erhält man also aus ihr sogleich wieder die obige XV.) des Laplace.

§. 60.

Bestimmen wir noch mittelst derselben Methode den Werth y des Integrals

$$1) \qquad \int_{\infty \div 0} e^{-x^2 - \frac{a^2}{x^2}} \cdot dx = y.$$

Differenziirt man zu dem Ende diese Gleichung nach a, so erhält man

$$2) \qquad -2a \int_{\infty \div 0} e^{-x^2 - \frac{a^2}{x^2}} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot dx = \partial y_a.$$

Für $x = \frac{a}{z}$ geht diese Gleichung, wenn man a positiv sich denkt, über in

$$3) \quad 2 \int_{0 \div \infty} e^{-z^2 - \frac{a^2}{z^2}} \cdot dz = \partial y_a = -2 \int_{\infty + 0} e^{-x^2 - \frac{a^2}{x^2}} \cdot dx.$$

Die Gleichungen 1.) und 3.) führen daher zur Gleichung

$$4) \qquad \partial y_a + 2y = 0.$$

Integrirt man nun diese lineäre Gleichung, so erhält man

$$5) \qquad y = C \cdot e^{-2a}.$$

Für $a = 0$ findet man hieraus C als den Werth von y, der für $a = 0$ sich ergiebt, d. h.

$$6) \qquad C = \int_{\infty \div 0} e^{-x^2} \cdot dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} \quad \text{(nach XV.)}.$$

Also findet sich aus 5.)

$$\text{XVIII.} \qquad \int_{\infty \div 0} e^{-x^2 - \frac{a^2}{x^2}} \cdot dx = \tfrac{1}{2} e^{-2a} \cdot \sqrt{\pi},$$

wobei wiederum zu bemerken, daß dasselbe Integral, aber zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ genommen, (nach §. 24. II.) den doppelten Werth hat.

§. 61.

Einige andere Beispiele zur Methode der vorhergehenden Paragraphen wollen wir aus Poisson's Abhandlung über bestimmte Integrale in dem Journal de l'école polytechnique, Cah. XVI. und XVII. entnehmen.

Sind die beiden bestimmten Integrale

1) $$\int_{\infty+0} e^{-bx} \cdot x^{n-1} \cdot \cos ax \cdot dx = y$$

und

2) $$\int_{\infty+0} e^{-bx} \cdot x^{n-1} \cdot \sin ax \cdot dx = z$$

zu finden, so differenziire man beide nach a. Man erhält dann

3) $$-\int_{\infty+0} e^{-bx} \cdot x^{n} \cdot \sin ax \cdot dx = \partial y_a$$

und

4) $$\int_{\infty+0} e^{-bx} \cdot x^{n} \cdot \cos ax \cdot dx = \partial z_a.$$

Um nun aus diesen Gleichungen die Integral-Zeichen eliminiren zu können, integrire man die 3.) und 4.) zur Linken theilweise (d. h. nach §. 4. N. 3., indem man e^{-bx} statt ψ setzt); und man erhält nach §. 34.), weil der außerhalb des Integral-Zeichens zu stehen kommende Theil an beiden Grenzen (d. h. für $x = 0$ und für $x = \infty$) verschwindet, und weil das noch bleibende Integral sich jedesmal als eine Summe zweier Integrale schreiben läßt, augenblicklich

5) $$\partial y_a = -\frac{a}{b} \cdot \partial z_a - \frac{n}{b} z$$

und

6) $$\partial z_a = \frac{a}{b} \cdot \partial y_a + \frac{n}{b} y.$$

Aus diesen beiden Gleichungen muß nun y und z durch Integration gefunden werden. Man muß daher damit beginnen, daß man z, ∂z_a etc. etc. eliminirt. Zu dem Ende muß man beide Gleichungen 5.) und 6.) zuvor noch einmal differenziiren (nach a). Man erhält

$$7)\qquad \partial^2 y_a = -\frac{n+1}{b}\cdot\partial z_a - \frac{a}{b}\cdot\partial^2 z_a;$$

$$8)\qquad \partial^2 z_a = \frac{n+1}{b}\cdot\partial y_a + \frac{a}{b}\cdot\partial^2 y_a.$$

Subsituirt man nun die Werthe aus 6.) und 8.) statt ∂z_a und $\partial^2 z_a$ in die Gleichung 7.), so ergiebt sich

$$9)\qquad \left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)\cdot\partial^2 y_a + \frac{2(n+1)a}{b^2}\cdot\partial y_a + \frac{n(n+1)}{b^2}y = 0.$$

Dies ist nun die Gleichung ohne z, welche y zu liefern hat. Sie ist zwar eine lineäre Gleichung, aber mit veränderlichen Koefficienten. Um sie daher integriren zu können, führe man einen neuen Veränderlichen t ein, mittelst der Gleichung

$$10)\qquad \frac{1}{tg}\,\frac{a}{b} = t \qquad \text{oder} \qquad \frac{a}{b} = tg\ t.$$

Dadurch geht die Gleichung 9.) über in

$$11)\quad b^2\cdot\partial^2 y_t + 2nba\cdot\partial y_t + n(n+1)(b^2+a^2)y = 0,$$

wo statt a überall $b\cdot tg\ t$ gesetzt werden muß.

Nun wird abermals ein neuer Veränderlicher u eingeführt mittelst der Gleichung

$$12)\qquad y = (b^2+a^2)^m\cdot u = b^{2m}(sec\ t)^{2m}\cdot u,$$

wo m ein noch unbestimmt gelassener Exponent ist. Dadurch geht die Gleichung 11.) über in

$$13)\quad b^2\cdot\partial^2 u_t + (2n+4m)ba\cdot\partial u_t$$
$$+[(n(n+1)+2m)b^2+(n+2m)(1+n+2m)a^2]\cdot u = 0,$$

wo überall $b\cdot tg\ t$ statt a gesetzt werden muß. Nimmt man aber nun m so, daß ∂u_t herausfällt, d. h. nimmt man

$$14)\qquad n+2m = 0 \quad \text{oder} \quad m = -\tfrac{1}{2}n,$$

so geht diese Gleichung 13.) über in

$$15)\qquad \partial^2 u_t + n^2\cdot u = 0,$$

und ist daher jetzt eine lineäre mit constanten Koefficienten, deren Integral (nach §. 42.)

$$16)\qquad u = A\cdot cos\ nt + B\cdot sin\ nt$$

ist, während A und B zwei noch, den Bedingungen der Aufgabe gemäß zu bestimmende willkührliche Constanten sind. Setzt

man aber hier herein statt u und t ihre Werthe, so erhält man

17) $$y = \frac{A \cdot cos\, nt + B \cdot sin\, nt}{(b^2 + a^2)^{\frac{n}{2}}},$$

wo überall $\frac{1}{tg}\frac{a}{b}$ statt t gesetzt werden muß.

Um die Constanten A und B zu bestimmen, differenziire man die Gleichung 17.), und setze dann $a = t = 0$. Diese letztern Gleichungen geben dann

18) für $a = 0$, $y = A \cdot b^{-n}$ und $\partial y_a = Bnb^{-n}$.

Auf der andern Seite erhält man aus 1.) und 3.)

19) für $a = 0$, $y = \int_{\infty \div 0} e^{-bx} \cdot x^{n-1} \cdot dx$ und $\partial y_a = 0$.

Aus der Vergleichung dieser Werthe in 18.). u. 19.) geht also hervor

20) $A = b^n \int_{\infty \div 0} e^{-bx} \cdot x^{n-1} \cdot dx$ und 21) $B = 0$.

Diese Constante A ist von dem Werthe von b ganz unabhängig. Setzt man nämlich $bx = \theta$, so erhält man (nach §. 22. II.)

22) $$A = b^n \int_{\infty \div 0} e^{-bx} \cdot x^{n-1} \cdot dx = \int_{\infty \div 0} e^{-\theta} \cdot \theta^{n-1} \cdot d\theta.$$

Man erhält daher aus 17.) und 20.—22.) y, d. h.

XIX. $$\int_{\infty \div 0} e^{-bx} \cdot x^{n-1} \cdot cos\, ax \cdot dx = \frac{cos\, nt}{(b^2 + a^2)^{\frac{n}{2}}} \cdot \int_{\infty \div 0} e^{-\theta} \cdot \theta^{n-1} \cdot d\theta.$$

Eliminirt man aber aus 5.) und 6.) ∂z_a, so erhält man hierzu z, d. h.

XX. $$\int_{\infty \div 0} e^{-bx} \cdot x^{n-1} \cdot sin\, ax \cdot dx = \frac{sin\, nt}{(b^2 + a^2)^{\frac{n}{2}}} \cdot \int_{\infty \div 0} e^{-\theta} \cdot \theta^{n-1} \cdot d\theta,$$

wo aber $\frac{1}{tg}\frac{a}{b}$ statt t gesetzt werden muß, während b positiv vorausgesetzt wird. — Dieselben Resultate hat Euler schon auf anderem Wege gefunden.

Auf diese Weise sind die Werthe der bestimmten Integrale XIX.) und XX.) zur Linken, von dem Werthe des bestimmten, gewöhnlich durch $\Gamma(n)$, und von uns durch Γ_n bezeichneten Integrals

23) $$\int_{\infty \div 0} e^{-\theta} \cdot \theta^{n-1} \cdot d\theta \quad \text{oder} \quad \Gamma_n$$

allein noch abhängig, und es sind die Integrale XIX.) und XX.) in allen den Fällen bekannt, in denen dies Integral Γ_n bekannt ist.

Für $n = 1$ wird das Integral $\Gamma_n = 1$, weil es in

$$\int_{\infty \div 0} e^{-\theta} \cdot d\theta = [-e^{-\theta}]_{\infty \div 0} = 1$$

übergeht; für $n = 1$ geben daher die Formeln XIX.) und XX.) augenblicklich die Formeln III.) und IV.) des §. 58.).

Für $n = 0$ dagegen gehen die Formeln XIX.) und XX.) in die VI.) und VIII.) des §. 58.) über, sobald man nur einige kleine Umformungen noch in Anwendung bringt *).

Das Integral Γ_n (in 23.) wird zu den sogenannten „Euler'schen Integralen erster Klasse" gezählt. So oft n eine positive ganze Zahl ist, giebt die theilweise Integration, also die Formel hier unten in der Note, nämlich

$$(\mathfrak{C}) \cdots \int_{\infty \div 0} e^{-\theta} \cdot \theta^n \cdot d\theta = n \int_{\infty \div 0} e^{-\theta} \cdot \theta^{n-1} \cdot d\theta, \text{ d. h. } \Gamma_{n+1} = n \cdot \Gamma_n,$$

wenn man in ihr statt n nach und nach 1, 2, 3, ··· n—1 setzt, — alle Resultate links und rechts mit einander multiplicirt, — und dabei links und rechts weghebt, — augenblicklich

---

*) In der That findet man, wenn man theilweise integrirt, d. h. die Formel §. 4. N. 3.) anwendet,

$$\int e^{-\theta} \cdot \theta^{n-1} \cdot d\theta = \frac{1}{n} e^{-\theta} \cdot \theta^n + \frac{1}{n} \int e^{-\theta} \cdot \theta^n \cdot d\theta;$$

also, weil das erste Glied zur Rechten, so lange n positiv ist, für $\theta = 0$ und für $\theta = \infty$ verschwindet,

$$\int_{\infty \div 0} e^{-\theta} \cdot \theta^{n-1} \cdot d\theta = \frac{1}{n} \int_{\infty \div 0} e^{-\theta} \cdot \theta^n \cdot d\theta.$$

Substituirt man nun dies in die XIX.) und bemerkt man, daß $\frac{\sin nt}{n}$ für $n = \frac{1}{s}$ in t übergeht, so folgt das Behauptete.

XXI. $\int_{\infty \div 0} e^{-\theta} \cdot \theta^{n-1} \cdot d\theta = (n-1)!$ d. h. $\Gamma_n = (n-1)!$,

woraus auch noch, wenn $\theta = ax$ gesetzt wird,

XXII. $$\int_{\infty \div 0} e^{-ax} \cdot x^{n-1} \cdot dx = \frac{(n-1)!}{a^n}$$

hervorgeht.

Anmerkung. Die Formel XXI.), wenn man $n+1$ statt n schreibt, also die Formel

Γ_{n+1} oder $\int_{\infty \div 0} e^{-\theta} \cdot \theta^n \cdot d\theta = n! = 1^{n|1} = n^{n|-1}$,

kann Veranlassung zur Definition von positiv gebrochenen Faktoriellen geben (vgl. I. Bd. §§. 25.—28.). — Geschieht dies, so findet sich bald, daß die meisten der Formeln, die für ganze Faktoriellen, oder für Differenz-Faktoriellen gelten, auch noch für diese positiv gebrochenen Faktoriellen statt finden, so daß man mit diesen bestimmten Integralen nach jenen Formeln rechnen kann. Dadurch kann man aber auch die zusammengesetzteren Fälle (für größere Werthe von n) auf die einfacheren Fälle (wo $n < 1$ ist) zurückführen, und einige dieser letzteru selbst auswerthen.

Setzt man in der Formel XV.), nämlich in

$$\int_{\infty \div 0} e^{-x^2} \cdot dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

$x^2 = \theta$, also $2x \cdot dx = d\theta$, so erhält man noch

$$\int_{\infty \div 0} e^{-\theta} \cdot \theta^{-\frac{1}{2}} \cdot d\theta = \sqrt{\pi},$$

d. h.

$$\Gamma_{\frac{1}{2}} = \sqrt{\pi}.$$

Und die Formel (C) giebt nun für $n = \frac{1}{2}$

$$\Gamma_{\frac{3}{2}} = \tfrac{1}{2} \cdot \Gamma_{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Dies würde geben

$$1^{-\frac{1}{2}|1} = \sqrt{\pi}$$

und

$$1^{+\frac{1}{2}|1} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

§. 62.

Suchen wir auf demselben Wege das bestimmte Integral

$$\int_{\infty \div 0} \frac{e^{-bx} \cdot cos\, ax}{A + Bx^2 + Cx^4 + \cdots + x^{2n}} \cdot dx = y$$

versteht sich unter der Voraussetzung, daß der Nenner für keinen der Werthe von x zwischen 0 und ∞, also für keinen positiven, und daher auch für keinen negativen Werth von x der Null gleich wird.

Differenziirt man diese Gleichung 2 mal, 4 mal, 6 mal, ··· 2n mal nach a, so findet sich augenblicklich

$$A \cdot y - B \cdot \partial^2 y_a + C \cdot \partial^4 y_a - \cdots \pm \partial^{2n} y_a = \frac{b}{a^2 + b^2},$$

wenn man nur die Formel III.) des §. 58.) zu Hülfe nimmt.

Da diese letztere Gleichung zu den lineären Gleichungen mit constanten Koefficienten gehört, so ist sie leicht zu integriren (nach §. 42.) und man erhält y in a (und b) und noch 2n willkührlichen Constanten ausgedrückt. Alles kommt nun darauf an, diese Constanten noch zu bestimmen.

Wir wollen dies wenigstens in dem Falle nachweisen, wo $b = 0$ ist, wo also

$$1) \qquad \int_{\infty \div 0} \frac{cos\, ax}{A + Bx^2 + Cx^4 + \cdots + x^{2n}} \cdot dx = y$$

und

$$2) \qquad A \cdot y - B \cdot \partial^2 y_a + C \cdot \partial^4 y_a - \cdots \pm \partial^{2n} y_a = 0$$

ist. — Man integrirt nun diese letztere Gleichung (nach §. 42.) dadurch, daß man

$$3) \qquad y = \Sigma c \cdot e^{ma}$$

setzt, und statt m nach und nach alle 2n Werthe, welche aus der Gleichung

$$4) \qquad A - Bm^2 + Cm^4 - \cdots \pm m^{2n} = 0$$

für m hervorgehen, subſtituirt, bei jedem Gliede aber auch die Constante c anders und anders sich denkt. Weil jedoch der Nenner in 1.) für keinen positiven Werth von x^2 der Null gleich wird, so wird die Gleichung 4.) keinen negativen Werth von m^2 geben; also sind alle Werthe von m von der Form

$$\pm(p \pm q \cdot i),$$

wenn $\sqrt{-1}$ durch i bezeichnet wird, wo p und q reell sind und p nicht Null ist. Deshalb geht die Gleichung 3.) über in

5) $y = \Sigma(\beta \cdot e^{-pa} \cdot \cos qa + \gamma \cdot e^{-pa} \cdot \sin qa + \beta' \cdot e^{pa} \cdot \cos qa + \gamma' \cdot e^{pa} \cdot \sin qa)$,

wo das Zeichen Σ die Summe von verschiedenen solchen Partien vorstellt, nach den verschiedenen Werthen von p und q.

Da nun $\cos ax < 1$, höchstens $= 1$ ist, so ist allemal (nach §. 24. V.)

$$y < \int_{\infty \div 0} \frac{1}{A + Bx^2 + Cx^4 + \cdots + x^{2n}} \cdot dx;$$

folglich wird y mit a nicht zugleich unendlich; demnach kann y, so lange a positiv gedacht ist, nicht Glieder mit dem Faktor e^{+pa} enthalten; also sind alle Constanten β' und γ' der Null gleich; und es bleibet daher

6) $y = \Sigma(\beta \cdot e^{-pa} \cdot \cos qa + \gamma \cdot e^{-pa} \cdot \sin qa)$,

so daß nur noch n Constanten zu bestimmen bleiben. Um diese zu bestimmen, sey μ irgend eine ungerade Zahl, so hat man

7) $\partial^\mu y_a = \pm \int_{\infty \div 0} \frac{x^\mu \cdot \sin ax}{A + Bx^2 + Cx^4 + \cdots + x^{2n}} \cdot dx$,

oder, wenn $ax = z$ gesetzt wird,

8) $\partial^\mu y_a =$

$$\pm a^{2n-\mu-1} \int_{\infty \div 0} \frac{z^\mu \cdot \sin z}{Aa^{2n} + Ba^{2n-2}z^2 + Ca^{2n-4}z^4 + \cdots + z^{2n}} \cdot dz.$$

Ist nun $\mu + 1 < 2n$, so wird $\partial^\mu y_a$ mit a zugleich Null; und ist $\mu + 1 = 2n$, so wird für $a = 0$

9) $\partial^\mu y_a = \int_{\infty \div 0} \frac{\sin z}{z} \cdot dz = \frac{1}{2}\pi$ (nach VII. des §. 58.).

Differenziirt man daher den Ausdruck für y in 6.) 1, 3, 5, 7, $2n-1$ mal nach a, und setzt man die Resultate alle (nach 8.) der Null gleich für $a = 0$, bis auf das letzte, welches für $a = 0$, der Zahl $\frac{1}{2}\pi$ gleich gesetzt werden muß (nach 9.), so hat man die n Gleichungen zur Bestimmung der n Con-

stanten. Und so sieht sich also dann das bestimmte Integral 1.) gefunden.

Hat man aber y gefunden, so darf man solches nur nach a hinter einander zu differenziiren, um $\int \frac{x \cdot \sin ax}{A + Bx^2 + \cdots + x^{2n}} \cdot dx$, etc. etc. und dann durch Zusammensetzung auch

$\int \frac{P \cdot \cos ax + Qx \cdot \sin ax}{A + Bx^2 + Cx^4 + \cdots + x^{2n}} \cdot dx$, — die Integrale zwischen denselben Grenzen $x = 0$ und $x = \infty$ genommen, — zu haben *), wenn P und Q ganze und gerade Funktionen von x vorstellen.

Man kann nun dies Verfahren auf $\int_{\infty \div 0} \frac{\cos ax}{1 + x^{2n}} \cdot dx$ anwenden, und man findet, daß, um die Rechnungen fortsetzen zu können, man n ungerade, und n gerade unterscheiden und für jeden dieser beiden Fälle die Rechnung besonders durchführen muß.

Differenziirt man aber die so gefundenen Resultate 2m mal hinter einander nach a, und wird dann $a = 0$ gesetzt, so erhält man auch den Werth des bestimmten Integrals $\int_{\infty \div 0} \frac{x^{2m}}{1 + x^{2n}} \cdot dx$.

Desgleichen kann man dasselbe Verfahren auf $\int_{\infty \div 0} \frac{\cos ax}{1 - x^{2n}} \cdot dx$ anwenden, um zuletzt auch noch $\int_{\infty \div 0} \frac{x^{2m}}{1 - x^{2n}} \cdot dx$ dadurch zu erhalten, daß man das erst gefundene Resultat hinter einander nach a differenziirt und dann $a = 0$ setzt.

---

*) Laplace findet schon dasselbe, jedoch auf anderem Wege als solches hier nach Poisson gefunden worden. Laplace findet nämlich zuerst die Resultate für die beiden einfachsten Fälle, d. h.

$\int_{\infty \div 0} \frac{\cos ax}{1 + x^2} \cdot dx = \frac{\pi}{2} \cdot e^{-a}$ und $\int_{\infty \div 0} \frac{x \cdot \sin ax}{1 + x^2} \cdot dx = \frac{\pi}{2} \cdot e^{-a}$

auf einem besonderen Wege, und dann zerlegt er, wenn $A + Bx^2 + Cx^4 + \cdots + x^{2n}$ durch R bezeichnet wird, die Brüche $\frac{P}{R}$ und $\frac{Q}{R}$ in lauter ächte Partial-Brüche, und so das gesuchte Integral in lauter Partial-Integrale, die sich aus den vorstehenden beiden leicht herleiten lassen.

Auf diesem Wege erhält man aber unter andern auch folgende Resultate:

XXIII. $$\int_{\infty \div 0} \frac{cos\, ax}{1+x^2} \cdot dx = \frac{\pi}{2} \cdot e^{-a}$$

XXIV. $$\int_{\infty \div 0} \frac{x \cdot sin\, ax}{1+x^2} \cdot dx = \frac{\pi}{2} \cdot e^{-a}$$

} (wo a positiv) *).

XXV. $$\int_{\infty \div (-\infty)} \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}} \cdot dx = \frac{\pi}{n \cdot sin \frac{(2m+1)\pi}{2n}}$$

XXVI. $$\int_{\infty \div (-\infty)} \frac{x^{2m}}{1-x^{2n}} \cdot dx = \frac{\pi}{n \cdot tg \frac{(2m+1)\pi}{2n}}$$

XXVII. $$\int_{\infty \div 0} \frac{x^{2m-1}}{1+x^{2n}} \cdot dx = \frac{1^{m|2} \cdot 1^{\frac{1}{2}(n-m)|2}}{(2n-1)!}$$

} wenn m und n positive ganze Zahlen sind, und noch $m < n$ ist.

XXVIII. $$\int_{\infty \div 0} \frac{1}{(1+x^2)^n} \cdot dx = \frac{1^{n-1|2}}{2^{n-1|2}}$$ (wenn n positiv ganz).

§. 63.

Eine größere Anzahl von solchen Werthen bestimmter Integrale erhält man auch noch dadurch, daß man hinter einander theilweise integrirt, immer zwischen den gegebenen Grenzen, und dadurch einen zusammengesetzteren Fall auf einen einfachen schon bekannten reducirt. Dazu dienen namentlich auch die schon auf diesem Wege gefundenen Reduktions-Formeln der §§. 13. 14. 17.), die sich in diesen Anwendungen in der Regel dadurch noch bedeutend vereinfachen, daß man die Integrale sogleich zwischen den gegebenen Grenzen nimmt, welche in der Regel den neben dem Integral-Zeichen befindlichen Theil, der Null gleich werden lassen, wie in dem Beispiele zu Ende des §. 61.) und C.) daselbst zu sehen ist. Wir setzen, da dies durchaus keine weiteren Schwierigkeiten gewährt, ohne uns

*) Dies sind die Formeln XIII.) und XIV.) des §. 59.).

beim Einzelnen aufzuhalten, sogleich noch einige dieser Resultate her, nämlich:

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{XXIX.} & \int_{a\div 0}\frac{x^{2r}}{\sqrt{a^2-x^2}}\cdot dx = \frac{1^{r|2}}{2^{r|2}}\cdot\frac{\pi\cdot a^{2r}}{2};\\
\text{XXX.} & \int_{a\div 0}\frac{x^{2r+1}}{\sqrt{a^2-x^2}}\cdot dx = \frac{2^{r|2}}{3^{r|2}}\cdot a^{2r+1};\\
\text{XXXI.} & \int_{a\div 0}x^{2r}\sqrt{a^2-x^2}\cdot dx = \frac{1^{r|2}}{4^{r|2}}\cdot\frac{a^{2r+2}}{4}\cdot\pi;\\
\text{XXXII.} & \int_{a\div 0}x^{2r+1}\sqrt{a^2-x^2}\cdot dx = \frac{2^{r|3}}{5^{r|2}}\cdot\frac{a^{2r+3}}{3};
\end{array}\right\}$$

wenn nur r eine positive ganze Zahl ist. — Ferner

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{XXXIII.} & \int_{a\div 0}\sqrt{a^2-x^2}^{n}\cdot dx = \frac{1^{\frac{1}{2}(n+1)|3}}{2^{\frac{1}{2}(n+1)|3}}\cdot\frac{a^{n+1}}{2}\cdot\pi;\\
\text{XXXIV.} & \int_{a\div 0}x^{2r}\sqrt{a^2-x^2}^{n}\cdot dx\\
 & \qquad = \frac{1^{r|2}}{(n+3)^{r|2}}\cdot a^{2r}\times\int_{a\div 0}\sqrt{a^2-x^2}^{n}\cdot dx;\\
\text{XXXV.} & \int_{a\div 0}x^{2r+1}\sqrt{a^2-x^2}^{n}\cdot dx = \frac{2^{r|2}}{(n+4)^{r|3}}\cdot\frac{a^{n+2r+2}}{n+2};
\end{array}\right\}$$

wenn nur n eine ungerade positive ganze Zahl, r aber beliebig positiv ganz ist.

Ferner (aus XVII.)

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{XXXVI.} & \int_{1\div 0}\left(log\frac{1}{x}\right)^{n+\frac{1}{2}}\cdot dx = \frac{1^{n|1}}{2^{n|1}}\cdot\sqrt{\pi}\quad\text{(Euler).}\\
\text{XXXVII.} & \int_{\frac{1}{2}\pi\div 0}(sin\,x)^{2n}\cdot dx = \int_{\frac{1}{2}\pi\div 0}(cos\,x)^{2n}\cdot dx = \frac{1^{n|2}}{2^{n|2}}\cdot\frac{\pi}{2}
\end{array}\right\}$$

und

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{XXXVIII.} & \int_{\frac{1}{2}\pi\div 0}(sin\,x)^{2n+1}\cdot dx = \int_{\frac{1}{2}\pi\div 0}(cos\,x)^{2n+1}\cdot dx = \frac{2^{n|2}}{3^{n|2}}.
\end{array}\right\}$$

Schluß-Anmerkung. Das Vorstehende mag ausreichen, um den Anfänger in diese Gattung mathematischer Untersuchungen einzuführen. Es enthält auch die meisten der bekanntern und gebrauchtern Resultate, und macht in letzterer Beziehung auf einige Vollständigkeit Anspruch, wenigstens auf eine solche, wie sie nur immer mit der, diesem Werke vorgeschriebenen Kürze sich vereinbaren läßt. Weil es uns aber vorzüglich um Methoden zu thun ist, so wollen wir noch zeigen, wie man, von den einfachsten dieser letzteren Resultate ausgehend (welche ohne Weiteres gefunden werden, weil man die allgemeinen Integrale finden kann), zu mehreren der in den frühern Paragraphen auf anderem Wege gefundenen zurückkommen kann.

A. Setzt man nämlich in den Formeln XXIX.) und XXX.) $a = 1$, und multiplicirt und dividirt man dann beide Resultate mit und durch einander, so erhält man

1) $$\int \frac{x^{2r}\cdot dx}{\sqrt{1-x^2}} \times \int \frac{x^{2r+1}\cdot dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2r+1}\cdot\tfrac{1}{2}\pi,$$

2) $$\int \frac{x^{2r+1}\cdot dx}{\sqrt{1-x^2}} : \int \frac{x^{2r}\cdot dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdots 2r\cdot 2r}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdots(2r-1)(2r+1)},$$

wenn alle diese Integrale zwischen den Grenzen 0 und 1 genommen sind.

Um zu sehen, was aus dieser Gleichung für $r = \infty$ wird, setze man $x^{2r} = z$, und man erhält

$$\int \frac{x^{2r+1}\cdot dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2r}\cdot\int \frac{z^{2:2r}\cdot dz}{\sqrt{1-z^{1:r}}}$$

und

$$\int \frac{x^{2r}\cdot dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2r}\cdot\int \frac{z^{1:2r}\cdot dz}{\sqrt{1-z^{1:r}}}.$$

Der Quotient der beiden Differentialien zur Rechten ist $= z^{1:r}$, also $= z^0$ oder 1 für $r = \infty$. Also wird in der

Gleichung 2.) für $r = \infty$, der Ausdruck zur Linken $= 1$, und die Gleichung 2.) geht deshalb über (für $r = \infty$) in

$$3)\quad \tfrac{1}{2}\pi = \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8\cdot 8\cdot 10\cdot 10\cdot 12\cdot 12 \cdots \text{in inf.}}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7\cdot 9\cdot 9\cdot 11\cdot 11\cdot 13 \cdots \text{in inf.}}$$

und dies ist der von Wallis gegebene merkwürdige Ausdruck für $\frac{1}{2}\pi$.

B. Setzt man $x = e^{-qt^2}$, so verwandelt sich die Gleichung 1.) in eine andere, welche Integrale nach t hat; nimmt man dann $q = \frac{1}{2r+1}$, oder $2r+1 = \frac{1}{q}$, so geht diese über in

$$4)\quad 2\int \frac{t\cdot e^{-t^2}\cdot dt}{\sqrt{\frac{1-e^{-2qt^2}}{2q}}} \times \int \frac{t\cdot e^{-(1+q)t^2}\cdot dt}{\sqrt{\frac{1-e^{-2qt^2}}{2q}}} = \tfrac{1}{2}\pi,$$

wo die Integrale zwischen 0 und ∞ genommen werden müssen (nach §. 22.).

Für $r = \infty$, also $q = 0$, geht aber $\frac{1-e^{-2qt^2}}{2q}$ in t^2 über; folglich giebt diese Gleichung augenblicklich

$2(\int_{\infty \div 0} e^{-t^2}\cdot dt)^2 = \frac{1}{2}\pi$ d. h. $\int_{\infty \div 0} e^{-t^2}\cdot dt = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$,

welches die oben gefundene Formel XV.) ist.

C. Laplace betrachtet das Integral $\int e^{-t^{m+1}}\cdot t^n\cdot dt$, bringt es unter die Form $\int t^{n-m} \times e^{-t^{m+1}}\cdot t^m\cdot dt$, integrirt theilweise und erhält

$$\int e^{-t^{m+1}}\cdot t^n\cdot dt = -\frac{e^{-t^{m+1}}}{m+1}(t^{n-m} - (n-m)\int e^{-t^{m+1}}\cdot t^{n-m-1}\cdot dt).$$

Nimmt man aber dieses Integral zwischen den Grenzen 0 und ∞, so wird diese Gleichung, so lange n—m positiv ist,

$$5)\quad \int_{\infty \div 0} e^{-t^{m+1}}\cdot t^n\cdot dt = \frac{n-m}{m+1}\int_{\infty \div 0} e^{-t^{m+1}}\cdot t^{n-m-1}\cdot dt \quad \begin{matrix}(\text{wenn } n-m\\ \text{positiv}).\end{matrix}$$

Für $m = 1$ erhält man hieraus, wenn $n > 1$ ist,

$$\int_{\infty+0} e^{-t^2} \cdot t^n \cdot dt = \frac{n-1}{2} \int_{\infty+0} e^{-t^2} \cdot t^{n-2} \cdot dt \quad \text{(wenn } n > 1\text{)}.$$

Setzt man hier r mal hinter einander immer $n-2$ statt n, so daß zuletzt $n-2(r-1)$ statt n zu stehen kommt, und multiplicirt man die entstehenden Gleichungen mit einander, so erhält man nach gehöriger Reduktion

$$6) \quad \int_{\infty+0} e^{-t^2} \cdot t^n \cdot dt = \frac{(n-1)^{rI-3}}{2^r} \int_{\infty+0} e^{-t^2} \cdot t^{n-2r} \cdot dt,$$

wo aber $n-2(r-1)$ noch >1 seyn muß. Da nun das Integral zur Rechten für $n = 2r$ in $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ übergeht (nach XV.), so giebt dies, wenn r eine positive ganze Zahl ist,

$$7) \quad \int_{\infty+0} e^{-t^2} \cdot t^{2r} \cdot dt = \frac{(2r-1)^{rI-2}}{2^r} \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} = \frac{1^{rI3}}{2^r} \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

Setzt man aber $e^{-t^{m+1}} = x$, so erhält man noch

$$\int_{\infty+0} e^{-t^{m+1}} \cdot t^n \cdot dt = \frac{1}{m+1} \int_{1+0} \left(log \frac{1}{x}\right)^{\frac{n-m}{m+1}} \cdot dx$$

und diese Gleichung geht für $m = 1$ und $n = 0$ in

$$8) \quad \int_{\infty+0} e^{-t^2} \cdot dt = \tfrac{1}{2} \int_{1+0} \left(log \frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

über, wie wir bereits in XVII.) gefunden haben.

D. Setzt man in XXV.) $x = z^\alpha$, dann aber $(2m+1)\alpha = p$ und $2n\alpha = q$, so erhält man die XXV.) viel allgemeiner, nämlich

$$\text{XXXIX.} \quad \int_{\infty+0} \frac{z^{p-1}}{1+z^q} \cdot dz = \frac{\pi}{q \cdot sin \frac{p\pi}{q}},$$

in so fern p und q ganz oder gebrochen seyn können, wenn nur $p < q$ ist. — Auch dies Integral hat Euler schon gegeben.

VIII.

Höhere Analyſis.

Vierte Abtheilung.

Die Variations-Rechnung und die allgemeinſte Lehre vom Größten und Kleinſten.

Neuntes Kapitel.

Ganz allgemeine Methode zur Entwickelung in Reihen.

Erster Abschnitt.

Von der Entwickelung der Polynomial-Funktionen in Reihen.

Vorerinnerung.

So wie es bisher oft von Nutzen gewesen ist, eine Funktion V_x nach Potenzen von x in eine unendliche Reihe zu verwandeln, so kann es nöthig werden, V_y in eine nach ganzen Potenzen von x fortlaufende Reihe zu verwandeln, während y selbst eine nach x fortlaufende Reihe ist. — Eben so kann es nöthig werden, eine Funktion $V_{y,z,u,\ldots}$ mehrerer Veränderlichen y, z, u, etc., während für letztere selbst wieder unendliche, nach x fortlaufende Reihen gesetzt werden, in eine nach ganzen Potenzen von x fortlaufende Reihe zu verwandeln.

In beiden Fällen kann die Funktion V eine Ur-Funktion, und zwar eine entwickelt oder verwickelt (mittelst einer Gleichung) gegebene, seyn. Es kann aber auch V eine Differential- oder eine bestimmte Integral-Funktion vorstellen.

Die Lösung dieser Aufgabe giebt aber jedesmal der Maclaurin'sche Lehrsatz, nach welchem

$$V_{(x)} = V_0 + \partial V_0 \cdot \frac{x}{1} + \partial^2 V_0 \cdot \frac{x^2}{2!} + \partial^3 V_0 \cdot \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

oder

$$V_{(x)} = \delta^0 V + \delta^1 V \cdot \frac{x}{1} + \delta^2 V \cdot \frac{x^2}{2!} + \delta^3 V \cdot \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

ist, wenn man nur unter $\delta^n V$ das versteht, was aus $\partial^n V_{(x)}$ wird, sobald man Null statt x setzt, während n jede ganze Zahl vorstellt.

Zu dieser Lösung des Problems würde daher nichts weiter mehr hinzuzufügen seyn, wenn wir nicht die Absicht hätten, das Technische und Praktische des Verfahrens hier noch in ein näheres Licht zu stellen.

§. 64.

Erklärung der Bezeichnung.

Da jede unendliche, nach ganzen Potenzen von x fortlaufende Reihe, in welche eine Funktion $V_{(x)}$ verwandelt werden kann, nach dem Maclaurin'schen Lehrsatze die Form

$$\delta^0 V + \delta^1 V \cdot x + \delta^2 V \cdot \frac{x^2}{2!} + \delta^3 V \cdot \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

annimmt, wenn $\delta^0 V$, $\delta^1 V$, $\delta^2 V$, $\delta^3 V$ etc. etc. das bedeuten, was bezüglich aus $V_{(x)}$, $\partial V_{(x)}$, $\partial^2 V_{(x)}$, $\partial^3 V_{(x)}$ etc. etc. wird, sobald man 0 statt x setzt, so wollen wir der Gleichförmigkeit wegen, jede nach ganzen Potenzen von x fortlaufende, gegebene oder gesuchte Reihe

1) $$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots,$$

in welcher a_0, a_1, a_2, a_3 etc. etc. ganz beliebige gegebene oder gesuchte Koefficienten vorstellen, in derselben Form schreiben, nämlich in der Form

2) $$\delta^0 a + \delta^1 a \cdot \frac{x}{1} + \delta^2 a \cdot \frac{x^2}{2!} + \delta^3 a \cdot \frac{x^3}{3!} + \cdots,$$

so daß für jede ganze Zahl n, der Koefficient $\delta^n a$ gleichbedeutend ist mit $n! a_n$.

Man überzeugt sich aber sogleich, wenn man die Reihe 1.) durch a_x bezeichnet, und solche hinter einander nach x differenziirt, zuletzt aber Null statt x schreibt, daß auch $\delta^n a$ mit dem zusammenfällt, was aus $\partial^n a_x$ wird, wenn man 0 statt x setzt, es mag unter a_x das obige V_x oder irgend eine andere beliebig gegebene oder gesuchte, nach ganzen Potenzen von x fortlaufende Reihe verstanden werden.

Man schreibt endlich statt $\delta^1 a$, $\delta^1 b$, $\delta^1 V$ etc. etc. bloß δa, δb, δV etc. etc.

§. 65.

Aus dieser Bezeichnung und der daraus so eben gezogenen höchst wichtigen Folgerung gehen augenblicklich folgende Gesetze hervor:

Sind die Koefficienten zweier solchen Reihen $a_\varkappa$ und $b_\varkappa$ Funktionen eines Veränderlichen x, oder mehrerer Veränderlichen x, y, z etc. etc.; und hat man

I. $b_\varkappa = \partial^n(a_\varkappa)_x$, so ist auch $\delta^a b = \partial^n(\delta^a a)_x$.

Hat man aber

II. $b_\varkappa = \partial^{m,n}(a_\varkappa)_{x,y}$, so ist auch $\delta^a b = \partial^{m,n}(\delta^a a)_{x,y}$.

Ist dagegen

III. $b_\varkappa = \int_{\beta\div\alpha} a_\varkappa \cdot dx$, so ist auch $\delta^a b = \int_{\beta\div\alpha} \delta^a a \cdot dx$.

Und sollte noch

IV. $b_\varkappa = \int_{x''\div x'}(\int_{y''\div y'} a_\varkappa \cdot dy)\cdot dx$

seyn, so wäre auch $\delta^a b = \int_{x''\div x'}(\int_{y''\div y'} \delta^a a \cdot dy)\cdot dx$, wo a jede beliebige positive ganze Zahl vorstellt, wenn nur die Grenz-Werthe der Integrale nicht selbst $\varkappa$ enthalten.

Da nämlich $\delta^a b$ und $\delta^a a$ das vorstellen, was aus $\partial^a b_{(\varkappa)}$ und $\partial^a a_{(\varkappa)}$ wird, so oft man 0 statt $\varkappa$ setzt, so folgen diese Behauptungen einzig und allein aus dem Umstande, daß es (nach §. 23. I. II.) einerlei ist, ob man zuerst nach $\varkappa$ differenziirt, und dann noch nach x, y, etc. differenziirt oder integrirt, oder ob man dieselben Operationen in umgekehrter Ordnung vornimmt; — während es auch wieder einerlei ist, ob man zuerst $\varkappa = 0$ setzt, und dann nach x, y, etc. etc. differenziirt oder integrirt, oder ob man auch dies in umgekehrter Ordnung geschehen läßt. Das letztere folgt namentlich daraus, daß während man nach x, y, etc. etc. differenziirt oder integrirt, der Werth $\varkappa$ als jeder denkbare angesehen, also auch der Null gleich gedacht seyn kann.

Die Wahrheiten I.—IV.) lassen sich auch kurz so schreiben:

V. $\delta^a(\partial^n a_x) = \partial^n(\delta^a a)_x$;

VI. $\delta^a(\partial^{m,n} a_{x,y}) = \partial^{m,n}(\delta^a a)_{x,y}$;

VII. $\delta^a(\int_{\beta\div\alpha} a\cdot dx) = \int_{\beta\div\alpha}(\delta^a a)\cdot dx$;

VIII. $\delta^a(\int_{x''\div x'}(\int_{y''\div y'} a\cdot dy)\cdot dx) = \int_{x''\div x'}(\int_{y''\div y'}\delta^a a\cdot dy)\cdot dx$,

wo die eingeklammerten Ausdrücke zur Linken das jedesmalige b in dem Zeichen $\delta^a b$ vorstellen, so also, daß man sich in diesen eingeklammerten Ausdrücken zur Linken, zuerst a_x unter dem a vorgestellt denken muß, um die Reihe b_x zu haben, von welcher dann der ganze Ausdruck zur Linken, den Koefficienten von $\frac{x^a}{a!}$ bedeutet, während die Ausdrücke rechts sehen lassen, wie dieser Koefficient aus dem gleichnamigen Koefficienten $\delta^a a$ der Reihe a_x gefunden wird.

Anmerkung. Die Formeln VII. und VIII.) (oder III. und IV.) erleiden aber nach §. 23. III.) eine Abänderung, sobald die eine oder die andere Grenze selbst noch x enthalten sollte. Namentlich ist statt der Formel VII.) (nach §. 23. III.)

$$\delta \int_{\beta \div \alpha} a \cdot dx = \int_{\beta \div \alpha} \delta a \cdot dx + a_\beta \cdot \delta\beta - a_\alpha \cdot \delta\alpha$$

zu setzen, so oft β und α selbst noch Reihen vorstellen, die nach ganzen Potenzen von x fortlaufen, wenn nur zur Rechten überall Null statt x gesetzt, und unter a_β, a_α das verstanden wird, was aus a als Funktion von x hervorgeht, so oft man bezüglich β oder α statt x schreibt.

§. 66.

Erste Haupt-Aufgabe.

Ist nun V eine beliebige Funktion einer beliebigen unendlichen Reihe

$$a_x \quad \text{oder} \quad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

d. h.

$$\delta^0 a + \delta^1 a \cdot \frac{x}{1} + \delta^2 a \cdot \frac{x^2}{2!} + \delta^3 a \cdot \frac{x^3}{3!} + \cdots,$$

und soll solche Funktion V, selber wieder in eine nach ganzen Potenzen von x fortlaufende unendliche Reihe V_x verwandelt werden; so hat man nach dem Maclaurin'schen Lehrsatze

$$V_x = \delta^0 V + \delta^1 V \cdot \frac{x}{1} + \delta^2 V \cdot \frac{x^2}{2!} + \delta^3 V \cdot \frac{x^3}{3!} + \cdots,$$

wenn unter $\delta^a V$ das verstanden wird, was aus $\partial^a V_x$ hervorgeht, wenn man 0 statt x schreibt.

Die ganze Aufgabe reducirt sich also darauf, die unbekannten Koefficienten $\delta^0 V$, $\delta^1 V$, $\delta^2 V$, $\delta^3 V$, etc. etc. auszudrücken in die gegebenen $\delta^0 a$, $\delta^1 a$, $\delta^2 a$, $\delta^3 a$, etc. etc. d. h. in a_0, a_1, $2 \cdot a_2$, $3! a_3$, etc. etc. Nun ist aber, weil V eine Funktion von a_x, und a_x wieder eine Funktion von x ist (nach I. Bd. §. 154.)

$$V_x = V_a \text{ *)};$$
$$\partial V_x = \partial V_a \cdot \partial a_x;$$
$$\partial^2 V_x = \partial^2 V_a \cdot (\partial a_x)^2 + \partial V_a \cdot \partial^2 a_x;$$
$$\partial^3 V_x = \partial^3 V_a \cdot (\partial a_x)^3 + 3\partial^2 V_a \cdot \partial a_x \cdot \partial^2 a_x + \partial V_a \cdot \partial^3 a_x;$$

u. s. w. f.; wo unter a überall die Reihe a_x zu verstehen ist.

Folglich wird für $x = 0$

1) $\delta^0 V = V_a;$
2) $\delta V = \partial V_a \cdot \delta a;$
3) $\delta^2 V = \partial^2 V_a \cdot \delta a^2 + \partial V_a \cdot \delta^2 a;$
4) $\delta^3 V = \partial^3 V_a \cdot \delta a^3 + 3\partial^2 V_a \cdot \delta a \cdot \delta^2 a + \partial V_a \cdot \delta^3 a;$

u. s. w. f.; wo aber jetzt in V_a, ∂V_a, $\partial^2 V_a$, $\partial^3 V_a$, etc. etc. unter a bloß der erste Koefficient a_0 oder $\delta^0 a$ der Reihe a_x verstanden werden darf, in so fern sich a_x für $x = 0$ auf diesen ersten Koefficienten zurückzieht.

Die praktische Regel für dieses mechanische Geschäft der Auffindung der Koefficienten $\delta^0 V$, δV, $\delta^2 V$, $\delta^3 V$, etc. etc. ist also folgende:

„Man setze in dem gegebenen V, statt der unendlichen Reihe „a_x bloß a, so daß V als eine bloße Funktion eines einzigen

---

*) Wir haben bisher häufig f_a geschrieben, um damit das auszudrücken, was aus f_x wird, wenn man a statt x schreibt. Wo keine Zweideutigkeit zu befürchten ist, mag das auch in der Folge noch so geschehen. Hier dagegen soll V_a die gegebene Funktion von a_x vorstellen, nur a statt a_x geschrieben, aber doch a_x unter diesem a verstanden, V_x dagegen stellt die nach x fortlaufende, hier für V_{a_x} gesuchte Reihe vor.

„Veränderlichen a erscheint, denke sich a wiederum als Funk-„tion von x, nehme in diesem Sinne bloß die Ableitungen von „V nach allem x, schreibe aber statt der Ableitungszeichen ∂ „nach x, die Zeichen δ. In den Endresultaten stellt dann a „wiederum das erste Glied a_0 oder $\delta^0 a$ der Reihe a_x vor."

Oder mit andern Worten: „Man differenziire V_a hin-„ter einander unter der Voraussetzung, daß a selbst noch ver-„änderlich ist, und setze zuletzt statt der da, d^2a, etc. etc. nun „δa, $\delta^2 a$, etc. etc., so hat man die hier gesuchten Koefficien-„ten δV, $\delta^2 V$, etc. etc., wenn nur zuletzt in den Zusammen-„setzungen von a, das erste Glied a_0 oder $\delta^0 a$ der Reihe a_x „unter a verstanden wird*)."

Beispiel 1. Ist z. B.

$$V = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots)^m = (a_x)^m$$

gegeben, so schreibe man

$V = a^m$, und man erhält $\delta^0 V = a^m$; $\delta V = m a^{m-1} \cdot \delta a$;

$\delta^2 V = m(m-1) a^{m-2} \cdot \delta a^2 + m a^{m-1} \cdot \delta^2 a$;

$\delta^3 V = m^{3\mathrm{I}-1} a^{m-3} \cdot \delta a^3 + 3 m^{2\mathrm{I}-1} a^{m-2} \cdot \delta a \cdot \delta^2 a + m a^{m-1} \cdot \delta^3 a$;

u. s. w. f.; und diese Werthe statt $\delta^0 V$, δV, $\delta^2 V$, $\delta^3 V$, etc. etc. in

$$\delta^0 V + \delta V \cdot \frac{x}{1} + \delta^2 V \cdot \frac{x^2}{2!} + \delta^2 V \cdot \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

substituirt, geben die Polynomial-Potenz

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots)^m,$$

nach Potenzen von x geordnet, wenn man nur für jede ganze Zahl n, unter $\delta^n a$ den Ausdruck $n!\, a_n$, und in den Potenzen von a, das erste Glied a_0 unter a versteht.

Beispiel 2. Ist ein andermal

$$V = log(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots) \quad \text{d. h.} \quad V = log(a_x)$$

nach Potenzen von x zu entwickeln, so setze man $V = log\, a$ und finde daraus nach der obigen praktischen Regel [d. h. wenn man a als Funktion von x

---

*) Nimmt man die Koefficienten $\delta^0 a$, δa, $\delta^2 a$, $\delta^3 a$, etc. etc., einmal so daß $a_x = a + x$ wird, oder ein andermal so, daß bloß $a_x = x$ wird, so muß die Lösung dieser Aufgabe das erste Mal den Taylor'schen, das andere Mal den Maclaurin'schen Lehrsatz liefern, weil beide als besondere Fälle in dieser allgemeinen Aufgabe stecken.

ansieht, nach allem x die Ableitungen (oder die Differentialien) nimmt, und statt der Ableitungs-Zeichen δ noch x (oder statt der d, in da, d^2a, d^3a, etc. etc.) δ schreibt], außer

$$\delta^0 V = log\, a, \quad \text{noch} \quad \delta V = \frac{1}{a} \cdot \delta a; \quad \delta^2 V = -\frac{1}{a^2} \cdot \delta a^2 + \frac{1}{a} \cdot \delta^2 a;$$

$$\delta^3 V = \frac{2}{a^3} \cdot \delta a^3 - \frac{3}{a^2} \cdot \delta a \cdot \delta^2 a + \frac{1}{a} \cdot \delta^3 a; \text{ u. s. w. f.;}$$

und dies sind die Koefficienten der Reihe V oder V_x, letztere in der Form gedacht

$$\delta^0 V + \delta V \cdot \frac{x}{1} + \delta^2 V \cdot \frac{x^2}{2!} + \delta^3 V \cdot \frac{x^3}{3!} + \cdots,$$

wenn nur zu gleicher Zeit $n!\, a_n$ statt $\delta^n a$ gesetzt wird, welche ganze Zahl unter n auch gedacht werden mag.

Beispiel 3. Auf demselben Wege kann man auch versuchen,

$$V = \frac{e^{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots} \cdot \sqrt{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots}}{sin(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots)}$$

in eine nach ganzen Potenzen von x fortlaufende Reihe umzuformen.

§. 67.

Zweite Haupt-Aufgabe.

Ist aber V eine Funktion zweier unendlichen Reihen

$$a_x \quad \text{oder} \quad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

und $$b_x \quad \text{oder} \quad b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \cdots,$$

wo a_0, a_1, a_2, etc. etc., b_0, b_1, b_2, etc. etc. ganz beliebige Koefficienten sind, — und soll nun V in die unendliche Reihe V_x oder

$$\delta^0 V + \delta V \cdot \frac{x}{1} + \delta^2 V \cdot \frac{x^2}{2!} + \delta^3 V \cdot \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

verwandelt werden, — so finden sich die Koefficienten dieser Reihe theoretisch durch den Maclaurin'schen Lehrsatz, so nämlich, daß $\delta^n V$ das ist, was aus $\partial^n V_{(x)}$ wird, wenn man Null statt x setzt; hieraus aber praktisch auf folgende Art:

„Man denkt sich V bloß als eine Funktion der ersten „Glieder a_0 und b_0 dieser Reihen, die jedoch durch a und b „vorgestellt seyn mögen, — betrachtet a und b als Funktionen „von x, nimmt die Ableitungen nach allem x (nach §. 154. d.

„I. Bd.), schreibt aber statt der Ableitungs-Zeichen ∂ nach ϰ, „überall das Zeichen δ. In den Endresultaten endlich denkt „man sich unter a und b nichts anders, als die ersten Glieder „der Reihen $a_\varkappa$ und $b_\varkappa$, so wie unter $\delta^n a$ und $\delta^n b$ bezüglich „$n!a_n$ und $n!b_n$.

Nach dieser Regel erhält man

1) $\delta^0 V = V_{a,b}$; 2) $\delta V = \partial V_a \cdot \delta a + \partial V_b \cdot \delta b$;

3) $\delta^2 V = \partial^2 V_a \cdot \delta a^2 + 2 \cdot \partial^{1,1} V_{a,b} \cdot \delta a \cdot \delta b + \partial^2 V_b \cdot \delta b^2 + \partial V_a \cdot \delta^2 a + \partial V_b \cdot \delta^2 b$;

u. s. w. f.

Der Grund dieser Regel ist der obige. Man erhält nämlich $\delta^n V$, wenn man $V_{a_\varkappa, b_\varkappa}$, — welches durch $V_{a,b}$ vorgestellt seyn kann, sobald man sich unter a, b, bezüglich $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ denkt —, n mal hinter einander nach ϰ differenziirt, dann aber $\varkappa = 0$ setzt. Durch dieses letztere gehen aber die Ableitungen $\partial^n a_\varkappa$, $\partial^n b_\varkappa$ bezüglich in $\delta^n a$ und $\delta^n b$ über.

§. 68.

Wäre V, d. h. $V_{a_\varkappa, b_\varkappa}$ für jeden Werth von ϰ identisch $= 0$, wäre also die so eben für $V_{a_\varkappa, b_\varkappa}$ gefundene Reihe

$$\delta^0 V + \delta V \cdot \frac{\varkappa}{1} + \delta^2 V \cdot \frac{\varkappa^2}{2!} + \delta^3 V \cdot \frac{\varkappa^3}{3!} + \ldots$$

identisch $= 0$, so würde jeder der einzelnen Koefficienten $\delta^0 V$, δV, $\delta^2 V$, etc. etc. einzeln der Null gleich seyn; und die aus 1.), 2.), 3.) etc. etc. entstehenden Gleichungen zeigten dann die Abhängigkeit, in welchen die Koefficienten $\delta^0 b$, δb, $\delta^2 b$, etc. etc., zu den Koefficienten $\delta^0 a$, δa, $\delta^2 a$, etc. etc. stehen, und dienten zur praktischen Auffindung der einen, in die andern ausgedrückt, — in dem Falle also, wo $b_\varkappa$ eine durch die Gleichung $V_{a_\varkappa, b_\varkappa} = 0$ verwickelt gegebene Funktion der unendlichen Reihe $a^\varkappa$ wäre.

§. 69.

Wären daher in V_{a_x, b_x} des §. 67.) die unendlichen Reihen b_x und a_x mittelst einer Gleichung $\varphi_{a_x, b_x} = 0$ von einander abhängig, so würden die in den Gleichungen 1.—3.) des §. 67.) gefundenen Ausdrücke für die Koefficienten $\delta^0 V$, δV, $\delta^2 V$, $\delta^3 V$, etc. etc. nothwendig unverändert dieselben bleiben; dagegen würden in diesen Ausdrücken die Koefficienten $\delta^0 b$, δb, $\delta^2 b$, $\delta^3 b$, etc. etc. von den Koefficienten $\delta^0 a$, δa, $\delta^2 a$, $\delta^3 a$, etc. etc. wiederum abhängig seyn, und zwar wären die einen in die andern auszudrücken mittelst der Gleichungen $\delta^0 \varphi = 0$, $\delta \varphi = 0$, $\delta^2 \varphi = 0$, $\delta^3 \varphi = 0$, etc. etc., welche mit $\varphi_{a_x, b_x} = 0$ zu gleicher Zeit statt finden (nach §. 68.), während $\delta^0 \varphi = \varphi_{a,b}$ ist, und $\delta \varphi$, $\delta^2 \varphi$, $\delta^3 \varphi$, etc. etc. selbst nach §. 67.) entwickelt werden, oder bereits entwickelt stehen, wenn man daselbst überall φ statt V setzt, zugleich aber statt a und b die ersten Glieder der Reihen a_x und b_x schreibt.

Diese, aus den Gleichungen $\delta \varphi = 0$, $\delta^2 \varphi = 0$, $\delta^3 \varphi = 0$, etc. etc. gefundenen Werthe von δb, $\delta^2 b$, $\delta^3 b$, etc. etc. müßten dann in die Resultate des §. 67.) subst ituirt werden, wenn man die Entwicklung des dortigen V_{a_x, b_x} (in dem jetzigen Falle) bloß in die Koefficienten von a_x ausgedrückt haben wollte.

Anmerkung. Die Aufgabe des §. 67.) enthält unter ihren speciellen Fällen namentlich auch noch folgende:

1) Ist b eine durch die Gleichung $\varphi_{a,b} = 0$ gegebene Funktion von a, und ist a_x ein anderer Werth von a und b_x der aus $\varphi_{a,b} = 0$ dazu sich findende Werth von b, so hat man mit $\varphi_{a_x, b_x} = 0$, zugleich auch $\delta \varphi = 0$, $\delta^2 \varphi = 0$, $\delta^3 \varphi = 0$ etc. etc.

2) Und diese Gleichungen gehen in die Differential-Gleichungen $\partial \varphi_{(a)} = 0$, $\partial^2 \varphi_{(a)} = 0$, $\partial^3 \varphi_{(a)} = 0$, etc. etc. über, in dem besonderen Falle, wo unter a_x bloß $a + x$ verstanden wird, so daß $\delta a = 1$, $\delta^2 a = \delta^3 a = \text{etc. etc.} = 0$ ist; wenn nur zugleich statt δb, $\delta^2 b$, $\delta^3 b$, etc. etc., welche die Koefficien-

ten der für b_x d. h. jetzt für b_{a+x} zu findenden Reihe vorstellen, die bezüglich mit ihnen identischen Zeichen ∂b_a, $\partial^2 b_a$, $\partial^3 b_a$, etc. etc. *) substituirt werden.

3) Ist a_x bloß x, also $a_0 = 0$, $\delta a = 1$, $\delta^2 a = \delta^3 a =$ etc. etc. $= 0$, so ist b_x der Werth von b, wie er uns $\varphi_{a,b} = 0$ für $a = x$, also wie er sich aus $\varphi_{x,b} = 0$ ergiebt; so daß also dieser Satz auch dazu dient, die Auflösung einer Gleichung $\varphi = 0$ zwischen b und x, nach dem Unbekannten b, in Form einer nach ganzen Potenzen von x fortlaufenden Reihe b_x, herzustellen.

4) Man kann sich daher auch desselben Satzes zur „Umkehrung der Reihen" bedienen:

§. 70.

Umkehrung der Reihen.

Ist gegeben die Gleichung

$$\text{I.}\quad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots \text{ in inf.} = p_0 + p_1 b + p_2 b^2 + p_3 b^3 + \cdots \text{ in inf.},$$

wo a_0, a_1, a_2, etc. etc. p_0, p_1, p_2, etc. etc. beliebig gegebene Koefficienten sind, und soll nun aus dieser Gleichung b gefunden werden, so hätte man, wenn die Reihe in I.) zur Linken durch a_x bezeichnet wird, zur Bestimmung von b oder b_x die aus I.) hervorgehende Gleichung

$$\text{II.}\quad (p_0 - a_x) + p_1 b_x + p_2 b_x^2 + p_3 b_x^3 + \cdots = 0,$$

statt der Gleichung $\varphi_{a_x, b_x} = 0$. Aus dieser Gleichung gehen sogleich zur Bestimmung der Koefficienten b_0 oder $\delta_0 b$, ferner δb, $\delta^2 b$, $\delta^3 b$, etc. etc. hervor

1) $\varphi_{a,b} = 0$ wenn a_0 und b_0 statt a und b gesetzt werden

---

*) Setzt man nämlich $a + x = z$, so ist $b_{a+x} = b_z$ und $\partial b_{(x)} = \partial b_z \cdot \partial z_x = \partial b_z$. Wird nun $x = 0$ gesetzt, so geht z in a, also ∂b_z in ∂b_a über, so daß die vorstehende Gleichung in $\delta b = \partial b_a$ übergeht. — u. s. f.

d. h. $(p_0 - a_0) + p_1 b_0 + p_2 b_0^2 + p_3 b_0^3 + \cdots = 0;$

2) $\delta\varphi = 0$ d. h.

$$- \delta a + (p_1 + 2p_2 b_0 + 3p_3 b_0^2 + 4p_4 b_0^3 + \cdots) \cdot \delta b = 0;$$

3) $\delta^2\varphi = 0$ d. h.

$$\left.\begin{array}{l} -\delta^2 a + (2p_2 + 2 \cdot 3p_3 \cdot b_0 + 3 \cdot 4p_4 \cdot b_0^2 + \cdots) \cdot \delta b^2 \\ + (p_1 + 2p_2 \cdot b_0 + 3p_3 \cdot b_0^2 + \cdots) \cdot \delta^2 b \end{array}\right\} = 0;$$

u. s. w. f.; so daß die erstere Gleichung b_0, die andere δb, die dritte $\delta^2 b$, etc. etc. liefert.

In dem besonderen Falle, wo $p_0 = a_0$ ist, würde $b_0 = 0$ einer der Werthe von b_0 seyn, welcher der Gleichung 1.) genügt; und zu diesem ersten Koefficienten b_0 fände sich dann aus 2.)

$$\delta b = \frac{\delta a}{p_1} = \frac{a_1}{p_1},$$

und aus 3.)

$$\delta^2 b = \frac{\delta^2 a - 2p_2 \cdot \delta b^2}{p_1} = \frac{2a_2 \cdot p_1^2 - 2p_2 \cdot a_1^2}{p_1^3},$$

u. s. w. f.; während zuletzt allgemein

$$b \text{ oder } b_x = b_0 + \delta b \cdot \frac{x}{1} + \delta^2 b \cdot \frac{x^2}{2!} + \delta^3 b \cdot \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

ist.

§. 71.

Ist V_x eine Funktion bloß von b_x, und b_x selbst von a_x mittelst der Gleichung $\varphi_{a_x, b_x} = 0$ abhängig, und soll nun V_x in die Koeficienten von a_x ausgedrückt werden, so hat man zuerst (nach §. 66.)

1) $\delta^0 V = V_b;$ 2) $\delta V = \partial V_b \cdot \delta b;$

3) $\delta^2 V = \partial^2 V_b \cdot \delta b^2 + \partial V_b \cdot \delta^2 b;$ u. s. w. f.,

wenn nur $\delta^0 b$ oder b_0 statt b in (V_b, ∂V_b, $\partial^2 V_b$, etc. etc.) gesetzt wird. — Hernach aber müssen statt b_0, δb, $\delta^2 b$, $\delta^3 b$, etc. etc. ihre aus den Gleichungen des §. 68.), wenn daselbst φ statt V gesetzt wird, genommenen Werthe substituirt werden.

Anmerkung. Dieses Problem dient zu gleicher Zeit auch dazu, um aus der Gleichung 1.) des §. 70.) nicht bloß b oder

b_x, sondern eine beliebige Funktion V_b oder V_{b_x}, nach Potenzen von x entwickelt hinschreiben zu können. Dies ist aber das allgemeinste Problem der Umkehrung der Reihen.

§. 72.

Dritter Haupt-Lehrsatz.

Ist aber V_{a_x, b_x, c_x} in eine nach ganzen Potenzen von x fortlaufende und einstweilen durch V_x oder

$$\delta_0 V + \delta V \cdot \frac{x}{1} + \delta^2 V \cdot \frac{x^2}{2!} + \delta^3 V \cdot \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

bezeichnete Reihe zu verwandeln, so erhält man wiederum den Koefficienten $\delta^n V$ derselben, wenn man in $V_{a,b,c}$ die a, b, c selber wieder als Funktionen von x sich denkt, dann aber die n^{te} Ableitung nach allem x nimmt, und in dem End-Resultate (also natürlich auch schon während des mechanischen Schreibens) in allen Ableitungen nach x die hiesigen δ statt der ∂ setzt, übrigens unter a, b, c bezüglich die ersten Glieder $\delta^0 a$, $\delta^0 b$, $\delta^0 c$, etc. etc. der durch a_x, b_x, c_x vorgestellten unendlichen Reihen

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots, \quad b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots, \quad c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$$

versteht, während zuletzt wiederum $n!\, a_n$ statt $\delta^n a$, und $n!\, b_n$ statt $\delta^n b$, so wie noch $n!\, c_n$ statt $\delta^n c$ substituirt werden muß.

Man findet daher nach den gewöhnlichen Regeln des Differenziirens, d. h. nach §. 154. des I. Bds.), indem man jedes Glied aufs neue nach denselben Regeln differenziirt:

$$\delta^0 V = V_{a,b,c};$$

$$\delta V = \partial V_a \cdot \delta a + \partial V_b \cdot \delta b + \partial V_c \cdot \delta c;$$

$$\delta^2 V = \partial V_a \cdot \delta^2 a + \partial V_b \cdot \delta^2 b + \partial V_c \cdot \delta^2 c + \partial^2 V_a \cdot \delta a^2 + \partial^2 V_b \cdot \delta b^2 + \partial^2 V_c \cdot \delta c^2 + 2\partial^{1,1} V_{a,b} \cdot \delta a \cdot \delta b + 2\partial^{1,1} V_{a,c} \cdot \delta a \cdot \delta c + 2\partial^{1,1} V_{b,c} \cdot \delta b \cdot \delta c;$$

u. s. w. f. *)

*) Wollte man die Form der Differential-Rechnung anwenden, so würde die oben gegebene praktische Regel für die Auffindung von $\delta^n V$ sich

§. 73.

Es geht sogleich hervor:

I. Ist $V_{a_x, b_x, c_x} = 0$, so ist auch $\delta^o V = 0$, d. h. $V_{a,b,c} = 0$, aber auch $\delta V = 0$, $\delta^2 V = 0$, etc. etc., und aus diesen Gleichungen bestimmen sich die Koefficienten von c_x in die von a_x und b_x ausgedrückt.

II. Und hat man zwei solche Gleichungen

$$V_{a_x, b_x, c_x} = 0 \quad \text{und} \quad W_{a_x, b_x, c_x} = 0,$$

so hat man nicht bloß

$\delta^o V$ oder $V_{a,b,c} = 0$ und $\delta V = 0$, $\delta^2 V = 0$, etc. etc.,

sondern auch

$\delta^o W$ oder $W_{a,b,c} = 0$ und $\delta W = 0$, $\delta^2 W = 0$, etc. etc.;

und diese Gleichungen dienen dazu, um die Koefficienten von b_x und c_x in die von a_x auszudrücken.

§. 74.

In der allgemeinen Aufgabe des §. 72.) können

1) a_x, b_x, c_x von einander ganz unabhängig seyn, und dann sind auch die Koefficienten δa, δb, δc, $\delta^2 a$, $\delta^2 b$, etc. etc. von einander ganz unabhängig. — Oder

2) es kann zwischen a_x, b_x, c_x noch eine Gleichung $\varphi_{a_x, b_x, c_x} = 0$ statt finden, und dann sind nach §. 73. I.) die Koefficienten δc, $\delta^2 c$, etc. etc., von denen δa, δb, $\delta^2 a$, $\delta^2 b$, etc. etc. mittelst der Gleichungen $\delta\varphi = 0$, $\delta^2\varphi = 0$, etc. etc. von einander abhängig, und δV, $\delta^2 V$, etc. etc. können dann bloß in δa, δb, $\delta^2 a$, $\delta^2 b$, etc. etc. ausgedrückt werden. — Oder

3) es können zwischen a_x, b_x, c_x noch zwei Gleichungen

$$\varphi_{a_x, b_x, c_x} = 0 \quad \text{und} \quad \psi_{a_x, b_x, c_x} = 0$$

gegeben seyn, und dann hängen nach §. 73. II.) die Koefficien-

---

so ausnehmen: Um $\delta^n V$ zu finden, nehme man das n^{te} Differential von V als Funktion von a, b, c, unter der Voraussetzung, daß a, b, c selbst wieder veränderlich sind; schreibe aber im Endresultate in den Differentialien da, db, dc, d^2a, d^2b, d^2c, etc. etc. jetzt überall δ statt d.

ten von b_x und c_x von denen von a_x ab, mittelst der Gleichungen $\delta\varphi = 0$, $\delta^2\varphi = 0$, etc. etc. und $\delta\psi = 0$, $\delta^2\psi = 0$, etc. etc.; — und die Koefficienten δV, $\delta^2 V$, etc. etc. des §. 72.) lassen sich nun bloß in δa, $\delta^2 a$, $\delta^3 a$, etc. etc. allein ausdrücken.

Dieser letztere Fall tritt schon ein, sobald V eine Funktion von a, b und c ist, und zwischen a, b, c zwei Gleichungen $\varphi_{a,b,c} = 0$ und $\psi_{a,b,c} = 0$ gegeben sind, und nun das, was aus V wird, wenn man bloß $a + x$ statt a setzt, in eine nach ganzen Potenzen von x fortlaufende Reihe verwandelt werden soll. — Denn wegen der Gleichungen $\varphi = 0$ und $\psi = 0$, welche für jeden Werth von a und den zugehörigen Werthen von b und c statt finden sollen, gehen, so wie $a + x$ statt a gesetzt wird, die Veränderlichen b und c sogleich (nach dem Taylor'schen Lehrsatze) in Reihen über, welche nach ganzen Potenzen von x fortlaufen und welche nun durch b_x und c_x bezeichnet werden, während man, weil jetzt $a_x = a + x$ gedacht worden ist, $\delta^0 a = a$, $\delta a = 1$, $\delta^2 a = \delta^3 a = \text{etc. etc.} = 0$ hat.

4) Es können aber auch b_x und c_x Ableitungen (Differentiale) oder auch Integrale seyn von a_x, nach x oder nach x und y, oder etc. Dann sind die Koefficienten $\delta^0 b$, $\delta^0 c$, δb, δc, $\delta^2 b$, $\delta^2 c$, etc. etc., dieselben Ableitungen und dieselben Integrale bezüglich von $\delta^0 a$, δa, $\delta^2 a$, etc. etc., und zwar genau nach den Formeln des §. 65.).

5) Und in allen den vorbenannten Fällen kann die Funktion V auch nur zwei dieser unendlichen Reihen b_x und c_x, oder auch gar nur eine derselben c_x allein enthalten, während gerade a_x allein als unabhängig angesehen werden kann, so daß alle Koefficienten $\delta^0 V$, δV, $\delta^2 V$, $\delta^3 V$, etc. etc. bloß in $\delta^0 a$, δa, $\delta^2 a$, $\delta^3 a$, etc. etc. allein ausgedrückt werden sollen und können.

§. 75.

Allgemeinere Haupt-Aufgabe.

Das bisherige setzt uns in den Stand, eine Funktion V von beliebig vielen solchen unendlichen Reihen a_x, b_x, c_x, etc. etc. in eine nach ganzen Potenzen von x fortlaufende Reihe zu verwandeln, dadurch, daß man die gesuchte Reihe durch

$$\delta^0 V + \delta V \cdot \frac{x}{1} + \delta^2 V \cdot \frac{x^2}{2!} + \delta^3 V \cdot \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

bezeichnet und nun δV, $\delta^2 V$, $\delta^3 V$, etc. etc. aus einander, (und den erstern aus $V_{a,b,c,\text{etc. etc.}}$) dadurch findet, daß man jeden vorhergehenden immer auf's neue nach allem x differenziirt, dabei aber statt der ∂a, ∂b, etc. $\partial^2 a$, $\partial^2 b$, etc. etc. immer fort δa, δb, etc. $\delta^2 a$, $\delta^2 b$, etc. etc. schreibt, während man überall unter a, b, c, etc. etc. (in V, ∂V_a, ∂V_b, ∂V_c, $\partial^2 V_a$, $\partial^{1,1} V_{a,b}$, etc. etc.) bloß die ersten Glieder dieser Reihen a_x, b_x, c_x, etc. etc. sich denkt.

Und dies Verfahren bleibt allemal dasselbe, es mögen die Reihen a_x, b_x, c_x, etc. etc. von einander ganz unabhängig, oder einige derselben, Differentialien oder Integralien von den andern seyn; oder man mag eine Abhängigkeit zwischen diesen Reihen durch Gleichungen $\varphi = 0$, $\psi = 0$, etc. etc. gegeben haben.

Als Beispiel denke man sich, daß V eine Funktion von a_x, b_x, $\partial(a_x)_x$ und $\partial(b_x)_x$ ist, und nun in eine nach ganzen Potenzen von x fortlaufende Reihe verwandelt werden soll. — Man hat dann, wenn man der Kürze wegen

$\partial(a_x)_x$ durch y, und $\partial(b_x)_x$ durch z

bezeichnet, und wenn, wie immer die gesuchte Reihe V_x durch

$$\delta^0 V + \delta V \cdot \frac{x}{1} + \delta^2 V \cdot \frac{x^2}{2!} + \cdots$$

vorgestellt wird, die Koefficienten dieser Reihe V_x wie folgt:

$$\delta^0 V = V_{a,b,y,z}$$

$$\delta V = \partial V_a \cdot \delta a + \partial V_b \cdot \delta b + \partial V_y \cdot \partial(\delta a)_x + \partial V_z \cdot \partial(\delta b)_x \text{ *)};$$

$$\begin{aligned}\delta^2 V = {} & \partial^2 V_a \cdot \delta a^2 + \partial^2 V_b \cdot \delta b^2 + \partial^2 V_y \cdot (\partial \delta a)^2 + \partial^2 V_z \cdot (\partial \delta b)^2 \\ & + 2\partial^{1,1} V_{a,b} \cdot \delta a \cdot \delta b + 2\partial^{1,1} V_{a,y} \cdot \delta a \cdot \partial \delta a + 2\partial^{1,1} V_{a,z} \cdot \delta a \cdot \partial \delta b \\ & + 2\partial^{1,1} V_{b,y} \cdot \delta b \cdot \partial \delta a + 2\partial^{1,1} V_{b,z} \cdot \delta b \cdot \partial \delta b + 2\partial^{1,1} V_{y,z} \cdot \partial \delta a \cdot \partial \delta b \\ & + \partial V_a \cdot \delta^2 a + \partial V_b \cdot \delta^2 b + \partial V_y \cdot \partial \delta^2 a + \partial V_z \cdot \partial \delta^2 b;\end{aligned}$$

wo man bloß $\partial \delta a$, $\partial \delta b$, $\partial \delta^2 a$, etc. etc. statt bezüglich $\partial(\delta a)_x$, $\partial(\delta b)_x$, $\partial(\delta^2 a)_x$, etc. etc. geschrieben hat.

---

*) Es ist nämlich nach §. 65.) $\delta y = \partial(\delta a)_x$ und $\delta z = \partial(\delta b)_x$.

Eben so $\delta^3 V$, $\delta^4 V$, etc. etc. — Weil man nämlich $\partial(a_x)_x$ durch y_x, und $\partial(b_x)_x$ durch z bezeichnet hat, so wird man in den einzelnen Gliedern der vorstehenden Entwickelungen zu Faktoren erhalten: δy, δz, $\delta^2 y$, $\delta^2 z$, etc. etc., welche man zwar häufig durch $\delta\partial a$, $\delta\partial b$, $\delta^2\partial a$, $\delta^2\partial b$, etc. etc. bezeichnet findet, welche aber allemal bezüglich $\partial\delta a$, $\partial\delta b$, $\partial\delta^2 a$, $\partial\delta^2 b$, etc. etc. vorstellen (nach §. 65.). — In dieser ganzen Untersuchung sind aber lauter Ableitungen ∂ nach x verstanden.

§. 76.

Noch allgemeinere Haupt-Aufgabe.

Es ist V eine Funktion von a, b, etc. und noch von x, y, etc. Zuerst werden statt x, y, etc. unendliche, nach Potenzen von $\varkappa$ fortlaufende Reihen $x_\varkappa$, $y_\varkappa$, etc. gesetzt, deren Koefficienten $\delta^0 x$, δx, $\delta^2 x$, etc., $\delta^0 y$, δy, $\delta^2 y$, etc. selber wieder Funktionen von a, b, etc. sind. Nachher aber werden überall statt a, b, etc. (also sowohl da, wo a, b, etc. explicit vorkommen, als auch da, wo solche implicit in $\delta^0 x$, δx, $\delta^2 x$, etc., $\delta^0 y$, δy, $\delta^2 y$, etc. erscheinen) wiederum unendliche Reihen $a_\varkappa$, $b_\varkappa$, etc. gesetzt, welche nach Potenzen von $\varkappa$ fortlaufen. Man soll nun die Koefficienten $\delta^0 V$, δV, $\delta^2 V$, etc. der nach ganzen Potenzen von $\varkappa$ fortlaufenden Reihe $V_{(\varkappa)}$ finden, in welche V selbst dadurch übergeht.

Erste Auflösung.

Um diese Aufgabe zu lösen, wird man sich zuerst bloß die Reihen für x, y, etc. allein gesetzt denken. Dadurch geht schon V in eine Reihe über, welche nach Potenzen von $\varkappa$ fortläuft, welche nicht die in der Aufgabe gesuchte ist, welche wir aber einstweilen nach §. 75.) aufsuchen, ihre Koefficienten jedoch (zum Unterschiede von den Koefficienten in der eigentlich für V gesuchten Reihe) durch $\delta_1^0 V$, $\delta_1 V$, $\delta_1^2 V$, $\delta_1^3 V$, etc. bezeichnen wollen; so daß man nach §. 75.) erhält

1) $\delta_1^0 V = V_{a,b,\text{etc.}x,y,\text{etc.}}$;

2) $\delta_1 V = \partial V_x \cdot \delta x + \partial V_y \cdot \delta y + \cdots$;

3) $\delta_1^2 V = \partial^2 V_x \cdot \delta x^2 + \partial^2 V_y \cdot \delta y^2 + \cdots + 2\partial^{1,1} V_{x,y} \cdot \delta x \cdot \delta y + \cdots + \partial V_x \cdot \delta^2 x + \partial V_y \cdot \delta^2 y + \cdots$;

u. s. w. f.

u. ſ. w. f., wenn nur zur Rechten (in V, ∂V_x, ∂V_y, $\partial^2 V_x$, etc.) unter x, y, etc. überall $\delta^0 x$, $\delta^0 y$, etc. (d. h. die erſten Glieder der für x, y, etc. geſetzten Reihen $x_\varkappa$, $y_\varkappa$, etc.) gedacht werden.

Bezeichnen wir nun dieſe einſtweilen erhaltene unendliche Reihe

4) $\delta_1^0 V + \delta_1 V \cdot \frac{\varkappa}{1} + \delta_1^2 V \cdot \frac{\varkappa^2}{2!} + \delta_1^3 V \cdot \frac{\varkappa^3}{3!} + \cdots$ durch $V_\varkappa$,

ſo wie die in der Aufgabe eigentlich geſuchte Reihe

5) $\delta^0 V + \delta V \cdot \frac{\varkappa}{1} + \delta^2 V \cdot \frac{\varkappa^2}{2!} + \delta^3 V \cdot \frac{\varkappa^3}{3!} + \cdots$ durch $V_{(\varkappa)}$,

ſo entſteht offenbar $V_{(\varkappa)}$ dadurch aus $V_\varkappa$, daß man in letzterem $V_\varkappa$ (als Funktion von $\delta_1^0 V$, $\delta_1 V$, $\delta_1^2 V$, etc. etc. angeſehen, während dieſe letzteren Koefficienten die Buchſtaben a, b, etc. explicit und auch implicit in $\delta^0 x$, δx, $\delta^2 x$, etc. $\delta^0 y$, δy, $\delta^2 y$, etc. enthalten) überall ſtatt aller a, b, etc. dieſe Reihen

$$a_\varkappa \text{ oder } \delta^0 a + \delta a \cdot \frac{\varkappa}{1} + \delta^2 a \cdot \frac{\varkappa^2}{2!} + \cdots$$

$$b_\varkappa \text{ oder } \delta^0 b + \delta b \cdot \frac{\varkappa}{1} + \delta^2 b \cdot \frac{\varkappa^2}{2!} + \cdots$$

u. ſ. f. ſubſtituirt.

Nun findet man aber die Koefficienten $\delta^0 V$, δV, $\delta^2 V$, $\delta^3 V$, etc. etc., wenn man $V_{(\varkappa)}$ nach allem $\varkappa$ keinmal, einmal, zweimal, dreimal, etc. etc. differenziirt, zuletzt aber Null ſtatt $\varkappa$ ſetzt.

Man erhält daher, wenn man der Kürze wegen vorausſetzt, daß bloß ſtatt der beiden Buchſtaben a und b, die Reihen $a_\varkappa$ und $b_\varkappa$ geſetzt worden ſind:

6) $$\delta^0 V = \delta_1^0 V = V_{a,b,x,y,\ldots};$$

wenn hier zuletzt unter x, y, etc. jene Anfangs-Glieder $\delta^0 x$, $\delta^0 y$, etc. verſtanden werden, und wenn man nachher ſtatt jedes a und jedes b, es mag explicit oder implicit vorkommen, die Anfangs-Glieder $\delta^0 a$, $\delta^0 b$ ſchreibt. — Ferner erhält man:

7) $$\delta V = \delta_1 V + \partial V_{(a)} \cdot \delta a + \partial V_{(b)} \cdot \delta b;$$

wo $\delta_1 V$ das Resultat des Differenziirens von $V_{(x)}$ nach dem x außerhalb, das übrige aber das Resultat des Differenziirens von $V_{(x)}$ nach dem x ist, das in den Koefficienten von V_x nämlich in $\delta_1{}^0 V$ (oder V, nach 1.), $\delta_1 V$, $\delta_1{}^2 V$, etc. steckt, während δV das Resultat des Differenziirens von $V_{(x)}$ nach allem x bedeutet (nur daß man zuletzt immer Null statt x gesetzt denken muß).

Denkt man sich nun von 7.) links und rechts noch einmal die Ableitungen nach allem x genommen, so erhält man

$$7_1) \quad \delta^2 V = \delta(\delta_1 V) + \delta(\partial V_{(a)} \cdot \delta a) + \delta(\partial V_{(b)} \cdot \delta b).$$

Setzt man aber in 7.) statt V jetzt $\delta_1 V$, so erhält man

$$7_2) \quad \delta(\delta_1 V) = \delta_1{}^2 V + \partial(\delta_1 V)_{(a)} \cdot \delta a + \partial(\delta_1 V)_{(b)} \cdot \delta b.$$

Ferner hat man

$$7_3) \quad \delta(\partial V_{(a)} \cdot \delta a) = \delta(\partial V_{(a)}) \cdot \delta a + \partial V_{(a)} \cdot \delta^2 a;$$

so wie wiederum, wenn man in 7.) $\partial V_{(a)}$ statt V setzt,

$$7_4) \quad \delta(\partial V_{(a)}) = \delta_1(\partial V_{(a)}) + \partial^2 V_a \cdot \delta a + \partial^{1,1} V_{(a,b)} \cdot \delta a \cdot \delta b;$$

während nach §. 65.)

$$7_5) \quad \delta_1(\partial V_{(a)}) = \partial(\delta_1 V)_{(a)}$$

ist. — Aehnliches gilt für $\delta(\partial V_{(b)})$. — Setzt man aber diese Werthe gehörig in einander, so erhält man zuletzt aus 7_1.)

$$8) \quad \delta^2 V = \delta_1{}^2 V + 2\partial(\delta_1 V)_{(a)} \cdot \delta a + 2\partial(\delta_1 V)_{(b)} \cdot \delta b + \partial^2 V_{(a)} \cdot \delta a^2 + 2\partial^{1,1} V_{(a,b)} \cdot \delta a \cdot \delta b + \partial^2 V_{(b)} \cdot \delta b^2 + \partial V_a \cdot \delta^2 a + \partial V_b \cdot \delta^2 b,$$

so daß man $\delta^2 V$ aus den schon bekannten $\delta_1{}^0 V$ oder V, ferner aus $\delta_1 V$, $\delta_1{}^2 V$, etc. hergeholt erblickt.

Auf demselben Wege kann man nun aus $\delta^2 V$ in 8.) wiederum $\delta^3 V$, und daraus wieder $\delta^4 V$ u. s. w. f. entwickeln, immer in die schon bekannten $\delta_1{}^0 V$, $\delta_1 V$, $\delta_1{}^2 V$, $\delta_1{}^3 V$, etc. etc. ausgedrückt. Nur darf man nicht übersehen, daß in den gefundenen Resultaten 6.—8.) u. s. f. zur Rechten, statt der in $\delta_1{}^0 V$ oder V, ferner in $\delta_1 V$, $\delta_1{}^2 V$, $\delta_1{}^3 V$, etc. etc. vorkommenden Buchstaben x, y, ··· die ersten Glieder $\delta^0 x$, $\delta^0 y$, etc. der für x, y, etc. gesetzten Reihen x_x, y_x, etc., dann aber für jedes a und b, welches explicit oder implicit vorkommt, noch die er-

sten Glieder $\delta^0 a$, $\delta^0 b$, der für a und b gesetzten Reihen a_x b_x substituirt werden müssen.

Dieser Weg kann auch dann leicht betreten werden, wenn $\delta_1 V$, $\delta_1{}^2 V$, etc. bloß Funktionen von a allein, oder von mehr als zwei solchen Veränderlichen a, b, c, etc. seyn sollten, und statt letzterer wieder Reihen a_x oder a_x, b_x, c_x, etc. gesetzt werden.

Zweite Auflösung.

Das Verfahren der ersten Auflösung lehrt die Koefficienten $\delta^0 V$, δV, $\delta^2 V$, $\delta^3 V$, etc. etc. aus einander auf einem Wege finden, welcher, genau genommen, nichts weiter als ein fortgesetztes Differenziiren nach allem x ist. — Will man aber ein, mit dem bisher beobachteten Verfahren nicht ganz analoges einschlagen, so kann man die Koefficienten der Reihe 5.) nämlich der Reihe

$$V_{(x)} \text{ oder } \delta^0 V + \delta V \cdot \frac{x}{1} + \delta^2 V \cdot \frac{x^2}{2!} + \delta^3 V \cdot \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

aus denen der Reihe 4.) nämlich der Reihe

$$V_x \text{ oder } \delta_1{}^0 V + \delta_1 V \cdot \frac{x}{1} + \delta_1{}^2 V \cdot \frac{x^2}{2!} + \delta_1{}^3 V \cdot \frac{x^3}{3!} + \cdots,$$

auch dadurch direkt und leichter finden, daß man sich in den letztern die Reihen a_x und b_x überall statt a und b gesetzt, und was daraus wird, in Reihen entwickelt denkt, welche ebenfalls nach Potenzen von x fortlaufen, — zuletzt aber das Endresultat nach Potenzen von x ordnet.

Weil jedoch, um den besondern Fall der vorigen Auflösung wieder fest zu halten, $\delta_1{}^0 V$, $\delta_1 V$, $\delta_1{}^2 V$, $\delta_1{}^3 V$, etc. Funktionen von a und b sind (welche a und b sowohl explicit, als auch implicit in $\delta^0 x$, $\delta^0 y$, δx, δy, $\delta^2 x$, $\delta^2 y$, etc. enthalten); so folgt, daß wenn in diesen Koefficienten $\delta_1{}^0 V$, $\delta_1 V$, $\delta_1{}^2 V$, etc. etc. und allgemein $\delta_1{}^n V$ die Reihen a_x, b_x statt a und b gesetzt werden, diese Ausdrücke $\delta_1{}^n V$ selber wieder in Reihen übergehen, welche man durch

$$\delta'^0(\delta_1{}^n V) + \delta'(\delta_1{}^n V) \cdot \frac{x}{1} + \delta'^2(\delta_1{}^n V) \cdot \frac{x^2}{2!} + \delta'^3(\delta_1{}^n V) \cdot \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

bezeichnen, und deren einzelne Koefficienten man nach dem §. 66.) finden kann, wenn man nur die dortigen δ in die hiesigen δ' umwandelt, welche hier absichtlich von den δ_1 und den bloßen δ, die außerdem hier schon vorkommen, unterschieden worden sind und unterschieden werden müssen. — Man kann nun die Auflösung ganz allgemein geben. Schreibt man nämlich die 4.) so

$$V_x = S\left[\delta_1{}^a V \cdot \frac{x^a}{a!}\right]$$

— wo S die Summe aller der Glieder vorstellt, welche aus dem allgemeinen, in eckigen Klammern eingeschlossenen Gliede hervorgehen, wenn nach und nach 0, 1, 2, 3, 4, 5, ··· in inf. statt **a** gesetzt wird, — und denkt man sich nun in $\delta_1{}^a V$ die Reihen a_x und b_x statt a und b substituirt; — so erhält man aus 4.) sogleich

$$6) \qquad V_{(x)} = S\left[\delta'^b(\delta_1{}^a V) \cdot \frac{x^b}{b!} \cdot \frac{x^a}{a!}\right],$$

wo statt **a** alle Werthe 0, 1, 2, 3, 4, 5, ··· in inf., und während **a** irgend einen dieser Werthe hat, jedesmal noch statt **b** nach und nach 0, 1, 2, 3, 4, 5, ··· in inf. gesetzt, zuletzt aber die Summe aller dieser unendlich mal unendlich vielen Glieder genommen wird.

Führt man aber **c** mittelst der Gleichung $\mathbf{a+b=c}$ ein, und denkt man daran, daß $\frac{c!}{a!b!} = \frac{(a+b)!}{a!b!} = (a+b)_b =$ $(a+b)_a = c_b = c_a$ ist, wo c_a, c_b Binomial-Koefficienten vorstellen, so formt sich die Gleichung 6.) um in

$$7) \qquad V_{(x)} = S\left[c_b \cdot \delta'^b(\delta_1{}^a V) \cdot \frac{x^c}{c!}\right], \qquad a+b=c$$

wo statt **c** nach und nach alle Werthe 0, 1, 2, 3, 4, 5, etc. in inf. gesetzt werden, während für jeden Werth von **c**, statt **a** und **b** wiederum alle Werthe gesetzt werden, welche 0 und ganze positive Zahlen sind, und deren Summe $= \mathbf{c}$ ist, und wobei

das vorgesetzte S andeutet, daß die Summe aller dieser Glieder genommen werden soll.

Vergleicht man 7.) mit 5.) d. h. mit

$$5)\qquad V_{(x)} = S\left[\delta^c V \cdot \frac{x^c}{c!}\right],$$

so müssen die einzelnen, mit x^c afficirten Glieder in 5.) und 7.) einander gleich seyn; also muß für $c = n$,

$$8)\qquad \delta^n V = S[n_b \cdot \delta'^b(\delta_1{}^a V)]$$
$$a+b=n$$

seyn, wo rechts statt **a** und **b** nach und nach alle Werthe gesetzt werden müssen, welche 0 und ganze Zahlen sind, und deren Summe jedesmal $= n$ ist, während n_b den Binomial-Koefficienten $\frac{n^{bI-1}}{b!}$ vorstellt, und das vorgesetzte S anzeigt, daß die Summe aller dieser Glieder genommen werden muß.

Setzt man hier nun statt n zuerst 0, dann 1, hernach 2, u. s. f., so erhält man

$$\delta^0 V = \delta'^0(\delta_1{}^0 V) = V;$$
$$\delta V = \delta'^0(\delta_1 V) + \delta'(\delta_1{}^0 V) = \delta_1 V + \delta'(\delta_1{}^0 V);$$
$$\delta^2 V = \delta'^0(\delta_1{}^2 V) + 2\delta'(\delta_1 V) + \delta'^2(\delta_1{}^0 V);$$

u. s. w. f.; und diese Resultate stimmen genau mit denen in der ersten Auflösung gefundenen überein, sobald man nur noch die δ' nach §. 66.) auswerthet, indem man daselbst nach und nach $\delta_1{}^0 V$, $\delta_1 V$, $\delta_1{}^2 V$, etc. etc. statt des dortigen V setzt, links aber δ' statt der dortigen δ schreibt.

§. 77.

Von dieser im vorstehenden §. 76.) behandelten Aufgabe verdient noch (für die Anwendungen) der besondere Fall hervorgehoben zu werden, wo nämlich (nachdem x, y, z, etc. in x_x, y_x, z_x, etc. und dadurch V in V_x oder in

$$\delta_1{}^0 V + \delta_1 V \cdot \frac{x}{1} + \delta_1{}^2 V \cdot \frac{x^2}{2!} + \delta_1{}^3 V \cdot \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

übergegangen sind) diese $\delta^0 x$, $\delta^0 y$, $\delta^0 z$, δx, δy, δz, $\delta^2 x$, etc.

bloß noch als Funktionen des einzigen a angesehen werden, der übrigens in V, also auch in $\delta_1{}^0V$, $\delta_1 V$, $\delta_1{}^2V$, etc. etc. noch explicit vorkommen mag (oder nicht), und wo endlich noch für jedes a die Reihe a_x d. h. $\delta^0 a + \delta a \cdot \frac{x}{1} + \delta^2 a \cdot \frac{x^2}{2!} + \cdots$ gesetzt wird.

In diesem Falle nämlich hat man

I. $$\delta^0 V = \delta_1{}^0 V = V_{a,x,y,z,\text{etc.}},$$

wenn unter x, y, z, etc. die Anfangs-Glieder $\delta^0 x$, $\delta^0 y$, $\delta^0 z$, etc. und überall unter a (sowohl da, wo es explicit, als auch da, wo es implicit vorkommt) das Anfangs-Glied $\delta^0 a$ verstanden wird.

Ferner hat man in diesem besonderen Falle noch

II. $\delta V = \delta_1 V + \partial V_{(a)} \cdot \delta a$ und $\delta_1 V = \delta V - \partial V_{(a)} \cdot \delta a$;

III. $\delta^2 V = \delta_1{}^2 V + 2\partial(\delta_1 V)_{(a)} \cdot \delta a + \partial^2 V_{(a)} \cdot \delta a^2 + \partial V_{(a)} \cdot \delta^2 a$;

u. s. w. f., wenn man nur nicht unterläßt, in diesen Resultaten zur Rechten, wo x, y, z, etc. erscheint, sich $\delta^0 x$, $\delta^0 y$, $\delta^0 z$, etc. darunter zu denken, dann aber auch für jedes explicit oder implicit vorkommende a jedesmal das Anfangs-Glied $\delta^0 a$ der Reihe a_x zu schreiben, oder doch geschrieben zu denken.

Anmerkung. Und weil hier überall nur der Maclaurin'sche Lehrsatz in Anwendung kommt, so hat man in jedem besonderen Falle der Anwendung, wo man die Reihe abbrechen mag, nach §. 25.) auch jedesmal noch Grenzen, zwischen denen das Ergänzungs-Glied liegt *).

---

*) In dieser Entwickelungs-Methode sind alle dem Verfasser bekannten Entwickelungs-Methoden enthalten, namentlich auch der Calcul des dérivations des Arbogast, so wie auch der (von Lagrange und Euler behandelte) Calcul des Variations, welches letztere der nächste Abschnitt dieses Kapitels noch besonders nachweist.

Zweiter Abschnitt.

Variations-Rechnung.

Vorerinnerung.

In manchen Fällen der Anwendung der so eben mitgetheilten Lehren, sind die Reihen $a_\varkappa$, $b_\varkappa$, $V_\varkappa$, etc. von ihren ersten Gliedern $\delta^0 a$, $\delta^0 b$, $\delta^0 V$, etc. unendlich-wenig verschieden, weil $\varkappa$ unendlich-klein gedacht ist. Dann nennt man die einzelnen Glieder des Unterschiedes $a_\varkappa - \delta^0 a$, oder $b_\varkappa - \delta^0 b$, oder $V_\varkappa - \delta^0 V$, etc., die mit den verschiedenen Potenzen von $\varkappa$ afficirt sind (so daß jedes folgende gegen das vorhergehende selbst wieder unendlich-klein ist) und wenn die ersten Glieder $\delta^0 a$, $\delta^0 b$, $\delta^0 V$, etc. selbst bezüglich a, b, V, etc. sind (für welche später die Reihen $a_\varkappa$, $b_\varkappa$, $V_\varkappa$, etc., welche für $\varkappa = 0$ bezüglich in a, b, V wieder übergehen, gesetzt worden sind) — und wenn diese einzelnen Glieder bezüglich mit 1!, 2!, 3!, etc. etc. multiplicirt werden, — die Variationen von a, b, V, etc.; und es enthält also der vorhergehende erste Abschnitt dieses Kapitels zugleich die sogenannte Variations-Rechnung (Calcul des Variations) ihrem Wesen nach. Wir wollen jedoch auch ihre gewöhnliche Form noch näher betrachten.

§. 78.

Gewöhnlicher Begriff der Variation.

Verwandelt sich a, oder b, oder V, in eine nach ganzen Potenzen von $\varkappa$ fortlaufende Reihe (entweder freiwillig oder abhängig), welche bezüglich durch $a_\varkappa$, $b_\varkappa$, $V_\varkappa$ bezeichnet und bezüglich jedesmal in der Form

$$\delta^0 a + \delta a \cdot \frac{\varkappa}{1} + \delta^2 a \cdot \frac{\varkappa^2}{2!} + \delta^3 a \cdot \frac{\varkappa^3}{3!} + \cdots$$

$$\delta^0 b + \delta b \cdot \frac{\varkappa}{1} + \delta^2 b \cdot \frac{\varkappa^2}{2!} + \delta^3 b \cdot \frac{\varkappa^3}{3!} + \cdots$$

$$\delta^0 V + \delta V \cdot \frac{\varkappa}{1} + \delta^2 V \cdot \frac{\varkappa^2}{2!} + \delta^3 V \cdot \frac{\varkappa^3}{3!} + \cdots$$

geschrieben wird; wird dabei $\varkappa$ unendlich klein gedacht, und sind $\delta^0 a$, $\delta^0 b$, $\delta^0 V$, von a, b, V nicht verschieden, so nennt man in diesen Reihen, die Produkte

$$\delta^n a \cdot \varkappa^n, \quad \delta^n b \cdot \varkappa^n, \quad \delta^n V \cdot \varkappa^n,$$

die n^{ten} Variationen bezüglich von a, b, V; und dieselben bezeichnet man bezüglich durch

$$\delta^n a, \quad \delta^n b, \quad \delta^n V;$$

und der Unterschied $a_x - a$, oder $b_x - b$, oder $V_x - V$ wird die Gesammt-Variation oder Total-Variation von a, oder b, oder V genannt.

§. 79.

Aus dieser Definition folgt sogleich:

I. $\quad x \cdot \delta V = \delta V$ und überhaupt $x^a \cdot \delta^a V = \delta^a V$.

II. $$V_x = V + \delta V + \frac{1}{2!} \cdot \delta^2 V + \frac{1}{3!} \cdot \delta^3 V + \cdots.$$

III. $$\delta^m \frac{d^n V}{dx^n} = \frac{d^n (\delta^m V)}{dx^n}; \quad \delta \int_{\beta \div \alpha} V \cdot dx = \int_{\beta \div \alpha} \delta V \cdot dx;$$

$$\delta^a \frac{d^{m+n} V}{dx^m \cdot dy^n} = \frac{d^{m+n} (\delta^a V)}{dx^m \cdot dx^n}; \text{ u. s. f.;}$$

alles aus §. 65.) in Verbindung mit vorstehender I.).

Und multiplicirt man die Gleichungen in den Auflösungen der Aufgaben der §§. 66. 67. 72. 75 und 76.) bezüglich mit x, x^2, x^3, etc. etc., so gehen jene Gleichungen sogleich in die hieher gehörigen über, und die hiesigen bilden sich aus jenen, wenn man hier bloß überall δ statt der dortigen δ schreibt.

Jene praktische Regel, die Koefficienten δV, $\delta^2 V$, $\delta^3 V$, etc. etc. in jeder einzelnen Aufgabe zu finden, gilt daher unverändert für die Auffindung der Variationen δV, $\delta^2 V$, $\delta^3 V$, etc. etc.

Beispiel. Ist z. B. U eine Funktion von x, y_x, z_x, ∂y_x, $\partial^2 y_x$, ∂z_x, $\partial^2 z_x$, $\partial^3 z_x$; ist ferner $V = \int_{b \div a} U \cdot dx$; und denkt man sich nun y in eine unendliche Reihe y_x oder $y + \delta y + \frac{1}{2!} \delta^2 y + \frac{1}{3!} \delta^3 y +$ etc., und eben so z in eine unendliche Reihe $z + \delta z + \frac{1}{2!} \delta^2 z + \frac{1}{3!} \delta^3 z +$ etc. übergehend, so geht dadurch V in eine unendliche Reihe über, welche wir mit

$V+\delta V+\frac{1}{2!}\delta^2V+\frac{1}{3!}\delta^3V+$ etc. bezeichnen. Soll nun die Funktion δV in die andern Variationen δy, δz, etc. etc. ausgedrückt werden, so hat man

$$\text{I.}\qquad \delta V=\int_{b\div a}\delta U\cdot dx,$$

und, wenn man ∂y_x, $\partial^2 y_x$, ∂z_x, $\partial^2 z_x$, $\partial^3 z_x$ bezüglich durch y_1, y_2, z_1, z_2, z_3 bezeichnet, wiederum

$$\text{II.}\quad \delta U=\frac{dU}{dy}\cdot\delta y+\frac{dU}{dy_1}\cdot\delta y_1+\frac{dU}{dy_2}\cdot\delta y_2 +\frac{dU}{dz}\cdot\delta z+\frac{dU}{dz_1}\cdot\delta z_1+\frac{dU}{dz_2}\cdot\delta z_2+\frac{dU}{dz_3}\cdot\delta z_3,$$

während jedoch

$$\delta y_1=\delta\partial y=\partial\delta y,\quad \delta y_2=\delta\partial^2 y=\partial^2\delta y,\quad \text{u. s. w.;}$$
$$\delta z_1=\delta\partial z=\partial\delta z,\quad \delta z_2=\delta\partial^2 z=\partial^2\delta z,\quad \text{u. s. w.}$$

ist, wo alle ∂ sich auf x beziehen, so daß, wenn man überhaupt Ableitungs-Zeichen statt der Differential-Zeichen schreibt,

$$\text{III.}\quad \delta V=\int_{b\div a}\left\{\begin{array}{l}\partial U_y\cdot\delta y+\partial U_{y_1}\cdot\partial\delta y+\partial U_{y_2}\cdot\partial^2\delta y\\ +\partial U_z\cdot\delta z+\partial U_{z_1}\cdot\partial\delta z+\partial U_{z_2}\cdot\partial^2\delta z+\partial U_{z_3}\cdot\partial^3\delta z\end{array}\right\}\cdot dx$$

wird, wobei man nicht vergessen muß, daß das Zeichen $\int\varphi\cdot dx$ allemal das Integral nach allem x bedeutet, was in φ explicit oder implicit steckt. Dabei ist noch zu bemerken, daß die Variationen von y und von z als gegeben angesehen werden, so daß die Gleichung III.) nur die Abhängigkeit der Variation δV von den vorher genannten Variationen δy, δz, ausdrückt.

Es versteht sich dabei von selbst, daß der so eben für δV erhaltene Ausdruck noch auf mannigfache Art umgeformt werden kann, sobald irgend ein praktisches Bedürfniß eine andere bestimmte Form wünschenswerth oder nothwendig macht. So z. B. könnte man alle die einzelnen Glieder in III.) zur Rechten, welche noch mit den Ableitungen $\partial\delta y$, $\partial^2\delta y$, $\partial\delta z$, $\partial^2\delta z$, $\partial^3\delta z$. behaftet sind, so lange theilweise integriren, indem man dabei die Formel des §. 22.) in Anwendung bringt, bis alle Ableitungen von δy und δz (nach x) außerhalb des Integral-Zeichens stehen; dann würde man sogleich umgeformt erhalten:

$$\begin{aligned}\text{IV.}\quad \delta V=&\int_{b\div a}[\partial U_y-\partial(\partial U_{y_1})+\partial^2(\partial U_{y_2})]\cdot\delta y\cdot dx\\ &+\int_{b\div a}[\partial U_z-\partial(\partial U_{z_1})+\partial^2(\partial U_{z_2})-\partial^3(\partial U_{z_3})]\cdot\delta z\cdot dx\\ &+\left[\begin{array}{l}[\partial U_{y_1}-\partial(\partial U_{y_2})]\cdot\delta y+\partial U_{y_2}\cdot\partial\delta y\\ +[\partial U_{z_1}-\partial(\partial U_{z_2})+\partial^2(\partial U_{z_3})]\cdot\delta z\\ +[\partial U_{z_2}-\partial(\partial U_{z_3})]\cdot\partial\delta z+\partial U_{z_3}\cdot\partial^2\delta z\end{array}\right]_{b\div a}\end{aligned}$$

wo das rechts unten angehängte $b\div a$ bedeutet, daß in dem, in den großen eckigen Klammern befindlichen Ausdrucke überall statt x zuerst b, dann a substituirt, das letztere aber vom ersten subtrahirt werden soll; während die bloßen ∂, allemal nach allem x genommen, zu verstehen sind.

Solche Umformungen erscheinen aber als müssig, so lange sie nicht durch irgend eine praktische Anwendung motivirt werden.

Anmerkung. Wir müssen noch hinzufügen, daß es in allen Anwendungen evidenter und bequemer ist, die Variationen von a oder V durch $\varkappa \cdot \delta a$, $\varkappa^2 \cdot \delta^2 a$, etc., $\varkappa \cdot \delta V$, $\varkappa^2 \cdot \delta^2 V$, etc. statt bloß durch δa, $\delta^2 a$, etc., δV, $\delta^2 V$, etc. zu bezeichnen, so daß δa, δV, $\delta^2 a$, $\delta^2 V$, etc. etc. endliche Ausdrücke bleiben, während bloß $\varkappa$ unendlich klein gedacht wird. Diese endlichen, in dem erstern Abschnitt dieses Kapitels behandelten δa, $\delta^2 a$, etc., δV, $\delta^2 V$, etc. kann man dann die Variations-Koefficienten nennen.

Aus diesem Grunde wollen wir künftighin jene, in dem erstern Abschnitt dieses Kapitels behandelte allgemeine Entwickelungs-Methode ebenfalls schon Variations-Rechnung nennen, gerade so, wie wir hier häufig uns des Wortes differenziiren bedienen, wenn wir das Geschäft der Auffindung der Ableitungen ausdrücken wollen.

Zehntes Kapitel.

Die allgemeinste Lehre vom Größten und Kleinsten.

Vorerinnerung.

Obgleich wir bereits im I. Bd. §. 61. und §. 167.) eine Theorie vom Größten und Kleinsten gegeben haben, so sind jene Untersuchungen doch nur als sehr specielle Fälle der hier folgenden allgemeinsten Lehre vom Größten und Kleinsten anzusehen.

§. 80.

Die allgemeinste Aufgabe vom Größten und Kleinsten.

Ist V eine Funktion von beliebigen Veränderlichen, mit oder ohne deren Ableitungen, mit oder ohne Integrale derselben, ja mit oder ohne uns zur Zeit noch unbekannten Ausdrucks-Formen; und stellt $V_\varkappa$ dieselbe, auf eine beliebige, aber in jedem Falle gegebene Weise durch $\varkappa$ variirte Funktion V vor (d. h. diejenige Funktion, welche aus V hervorgeht, wenn man statt eines, oder statt einiger, oder statt aller ihrer Veränderlichen z. B. statt der in ihr vorkommenden

$$x,\ y,\ z,\ \partial y_x,\ \partial z_x,\ \text{etc.}\quad \partial^{1,1}u_{x,y},\ \text{etc.}\quad \int_{b\div a} y\cdot dx,\quad \int_{n\div m} U_{x,y,\partial y\ldots}\cdot dx,$$

unendliche Reihen setzt, die bezüglich mit x, y, z, etc. etc. etc. selbst anfangen, aber nach Potenzen eines unendlich-klein gedachten $\varkappa$ fortlaufen); — so liefert $V_\varkappa$, je nachdem $\varkappa$ positiv oder negativ, wenn nur immer unendlich-klein gedacht wird, zwei an V nächst angrenzende Werthe, beide (nach dem vorhergehenden Kapitel) durch

$$V+\delta V\cdot\frac{\varkappa}{1}+\delta^2 V\cdot\frac{\varkappa^2}{2!}+\delta^3 V\cdot\frac{\varkappa^3}{3!}+\ldots$$

vorgestellt. — Man soll nun die Bedingungen aufsuchen, unter welchen V größer ist, als diese beiden nächsten Nachbar-Werthe V_x und in dieser Beziehung ein Größtes (ein Maximum) genannt wird, oder bestimmen, wenn V kleiner ist, als diese beiden nächsten Nachbar-Werthe, d. h. in dieser Beziehung ein Kleinstes (ein Minimum) ist.

Auflösung. Da

$$V_x - V = \delta V \cdot \frac{x}{1} + \delta^2 V \cdot \frac{x^2}{2!} + \delta^3 V \cdot \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

ist, so kann der Unterschied $V_x - V$ nicht immer einerlei (+, —) Zeichen behalten (bei dem Uebergange des x vom Positiven zum Negativen), so lange das Glied $\delta V \cdot x$ (welches mit x zugleich sein + oder — Zeichen wechselt, und dessen + oder — Zeichen, wegen des unendlich-klein gedachten x, das des ganzen Unterschiedes $V_x - V$ ist) noch vorhanden sich zeigt. Also ist

I. $$\delta V = 0$$

eine Bedingung, welche erfüllt seyn muß, wenn überhaupt ein Maximum oder Minimum von V soll statt finden können.

Ist dann noch $\delta^2 V$ (für diese aus $\delta V = 0$ gefundenen Werthe der Veränderlichen) $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\\text{negativ}\end{matrix}\right\}$, so ist $V_x - V$ allemal $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\\text{negativ}\end{matrix}\right\}$ (weil x^2 sein Zeichen nicht ändert, es mag x positiv oder negativ gedacht werden), d. h. V selbst allemal ein $\left\{\begin{matrix}\text{Minimum}\\\text{Maximum}\end{matrix}\right\}$.

Ist für $\delta V = 0$ auch noch $\delta^2 V = 0$ und auch noch $\delta^3 V = 0$, so fängt die Entwickelung von $V_x - V$ mit dem Gliede $\delta^4 V \cdot \frac{x^4}{4!}$ an, und da x^4 immer positiv wird, so entscheidet dann $\delta^4 V$ $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\\text{negativ}\end{matrix}\right\}$, ob V ein $\left\{\begin{matrix}\text{Minimum}\\\text{Maximum}\end{matrix}\right\}$ ist. — U. s. w. f.

Weil aber die Entwickelung von $V_x - V$ in die Reihe

$\delta V \cdot x +$ etc. etc. mittelst des Maclaurin'schen Lehrsatzes erhalten wird, so wäre es möglich, daß gerade die Werthe der Veränderlichen, welche V zu einem Maximum oder Minimum machen, zu den Ausnahms-Werthen gehörten, für welche die Maclaurin'sche Reihe nach §. 158. d. I. Bds.) deshalb nicht mehr statt findet, weil entweder δV, oder $\delta^2 V$, oder doch $\delta^3 V$, $\delta^4 V$, etc. etc. die Form $\frac{1}{0}$ annehmen. — Ist aber dann für diese Werthe der Veränderlichen, noch nicht $\delta V = \frac{1}{0}$, so hat man doch (nach §. 158. d. I. Bds.) noch immer

$$V_x - V = \delta V \cdot x + P \cdot x^\alpha + \cdots,$$

so daß also noch immer $\delta V = 0$ seyn muß, wenn V für diese Werthe der Veränderlichen ein Maximum oder Minimum soll seyn können. — Weil aber die Werthe der Veränderlichen, welche V zu einem Maximum oder Minimum machen, zu denjenigen Ausnahms-Werthen gehören könnten, welche bereits δV auf die Form $\frac{1}{0}$ bringen, so wird man, um diese etwa vorhandenen Werthe nicht zu verfehlen, auch noch

II. $\delta V = \frac{1}{0}$ d. h. $\frac{1}{\delta V} = 0$

setzen und aus dieser Gleichung ebenfalls die Werthe der Veränderlichen bestimmen, für letztere aber die Differenz $V_x - V$ direkt in Reihen (nach gebrochenen Potenzen von x) verwandeln, und zusehen, ob diese Differenz $V_x - V$ mit x zugleich ihr (+ oder —) Zeichen wechselt, oder nicht. Im erstern Fall ist V für diese Werthe kein Maximum und auch kein Minimum; im andern Falle ist dagegen V gegen V_x ein $\left\{\begin{matrix}\text{Minimum}\\\text{Maximum}\end{matrix}\right\}$,

wenn $V_x - V$ immerfort $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\\text{negativ}\end{matrix}\right\}$ bleibt.

Anmerkung. Der Gang ist derselbe wie der im I. Bd. §. 61.) und §. 167.) bereits betretene; auch sind jene Fälle in

dieser allgemeinsten Aufgabe enthalten. — Man setzt also $\delta V = 0$, findet aus dieser Gleichung, welche sich häufig in zwei oder mehrere Gleichungen zerlegt, die Werthe der unabhängigen Veränderlichen. Man setzt dann auch $\frac{1}{\delta V} = 0$, und findet auch aus dieser Gleichung die Werthe der unabhängigen Veränderlichen. Für jedes zusammengehörige System dieser gefundenen Werthe untersucht man die Differenz $V_x - V$. Aendert sie mit x zugleich ihr $+$ oder $-$ Zeichen, so machen diese Werthe die Funktion V weder zu einem Maximum, noch zu einem Minimum; — ändert aber $V_x - V$, während x vom Positiven zum Negativen übergeht, sein $+$ oder $-$ Zeichen nicht, so ist V für diese Werthe ein $\left\{\begin{matrix}\text{Minimum}\\\text{Maximum}\end{matrix}\right\}$, wenn diese Differenz $V_x - V$ immerfort $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\\text{negativ}\end{matrix}\right\}$ bleibt.

Das Schwierigste in der praktischen Durchführung der Aufgabe des §. 80.) ist gewöhnlich die weitere Behandlung der Gleichung $\delta V = 0$ (wenn wir $\delta V = \frac{1}{0}$, wie solches hier geschehen mag, nicht näher betrachten wollen). Theils um die Schwierigkeiten zu zeigen, theils um sie heben zu lehren, mögen daher folgende Fälle noch näher betrachtet werden.

§. 81.

I. Ist V bloß eine Funktion von x allein, und ist V_x nichts anders als V_{x+x}, so wird (nach §. 66.)

$$\delta V = \partial V_x \cdot \delta x = \partial V_x,$$

weil jetzt $x_x = x + x$, also $\delta x = 1$, $\delta^2 x = 0$, $\delta^3 x = 0$, etc. etc. vorausgesetzt wurde; also geht jetzt $\delta V = 0$ in $\partial V_x = 0$ über, und dies ist die Aufgabe des I. Bds. §. 167. I.), womit die hiesige Auflösung genau übereinstimmt.

II. Ist V eine Funktion von x und y, und V_x das, was aus V hervorgeht, wenn

statt x jetzt $x_\varkappa$ d. h. $x+\delta x\cdot\varkappa+\cdots$
statt y jetzt $y_\varkappa$ d. h. $y+\delta y\cdot\varkappa+\cdots$

gesetzt wird, — so ist nun (nach §. 67.)

$$\delta V = \partial V_x\cdot\delta x+\partial V_y\cdot\delta y.$$

Werden nun x und y, also auch $x_\varkappa$ und $y_\varkappa$, mithin auch δx und δy als von einander ganz unabhängig gedacht, so zerfällt die Gleichung $\delta V = 0$, da sie für $\delta y = 0$ und für jedes δx, und auch für $\delta x = 0$ und für jedes δy, immer statt finden muß, in die beiden Gleichungen

$$\partial V_x = 0 \quad \text{und} \quad \partial V_y = 0;$$

und dies ist die Aufgabe des I. Bds. §. 167. II.), mit deren Auflösung die hiesige genau übereinstimmt.

Sind aber x und y mittelst der Gleichung $\varphi_{x,y} = 0$ dergestalt von einander abhängig, daß gleichzeitig auch noch $\varphi_{x_\varkappa, y_\varkappa} = 0$, also auch $\delta\varphi = 0$ seyn muß, so hat man noch weil $\delta\varphi = \partial\varphi_x\cdot\delta x+\partial\varphi_y\cdot\delta y$ ist, die Gleichung

$$\partial\varphi_x\cdot\delta x+\partial\varphi_y\cdot\delta y = 0,$$

welche die Abhängigkeit zwischen δx und δy ausdrückt. Eliminirt man nun δy aus $\delta V = 0$ und $\delta\varphi = 0$, so geht die Gleichung $\delta V = 0$ über in

$$\left(\partial V_x - \delta V_y\cdot\frac{\partial\varphi_x}{\partial\varphi_y}\right)\cdot\delta x = 0, \quad \text{oder} \quad \partial V_x\cdot\partial\varphi_y - \partial\varphi_x\cdot\partial V_y = 0;$$

und diese Gleichung in Verbindung mit $\varphi_{x,y} = 0$ giebt nun die Werthe von x und y, welche $V_{x,y}$ zu einem Maximum oder Minimum machen können. Ob aber dies Ereigniß eintritt oder nicht, hängt erst von der Untersuchung des Werthes von $V_\varkappa - V$ ab, wie er für diese Werthe von x und y hervorgeht.

Es kann aber auch $\varphi_{x,y}$ ohne der Null gleich zu seyn für alle zusammengehörigen Werthe $x_\varkappa$ und $y_\varkappa$ immerfort einen und denselben constanten Werth behalten sollen. Dann ist $\varphi_\varkappa - \varphi = 0$, also doch noch $\delta\varphi\cdot\varkappa+\cdots = 0$, d. h. noch immer $\delta\varphi = 0$, wie kurz vorher auch. Also bleibt die Zerfällung der Glei-

chung $\delta V = 0$ doch genau so, wie bei der nächst vorhergehenden Annahme.

III. Ist V eine Funktion von x, y und ∂y_x, welche letztere Ableitung ∂y_x durch y_1 bezeichnet seyn mag; und entsteht V_x dadurch, daß man

bloß statt y setzt y_x oder $y + \delta y \cdot x + \cdots$,

aber dann auch

statt ∂y_x oder y_1 setzen muß $\partial(y_x)_x$ d. h. $\partial y_x + \partial\delta y \cdot x + \cdots$,

wo die bloßen ∂ sich auf x beziehen, so hat man nach dem §. 67.) in Verbindung mit §. 65.)

1) $$\delta V = \partial V_y \cdot \delta y + \partial V_{y_1} \cdot \partial\delta y$$ *).

A. Soll nun die Gleichung $\delta V = 0$ für jede beliebige Funktion von x gelten, welche statt δy gesetzt werden mag, so zerfällt sie jetzt wiederum (weil δy eine beliebige Constante haben kann, die in $\partial\delta y$ nicht vorkommt, weil also die Werthe von δy und $\partial\delta y$ von einander unabhängig bleiben, so daß gleichzeitig $\partial\delta y = 0$ und δy beliebig seyn, und gleichzeitig $\delta y = 0$

---

*) Dem Geiste unserer Behandlung im vorhergehenden Kapitel gemäß, bezeichnet man die, obgleich gegebene Reihe

1) $$\partial y_x + \partial\delta y \cdot x + \partial^2\delta y \cdot \frac{x^2}{2!} + \cdots$$

welche statt y_1 gesetzt werden muß, um V_x aus V zu erhalten, abermals nach demselben Schema durch

2) $$(y_1)_x \text{ d. h. durch } y_1 + \delta y_1 \cdot x + \delta^2 y_1 \cdot \frac{x^2}{2!} + \cdots,$$

so daß δy_1, $\delta^2 y_1$, etc. wiederum bloß bezeichnete Koefficienten sind, welche jedoch, da die Reihe 2.) von der Reihe 1.) nicht verschieden seyn soll, bereits in die Koefficienten δy, $\delta^2 y$, etc. ausgedrückt sind, so daß man $\delta y_1 = \partial\delta y$, $\delta^2 y_1 = \partial\delta^2 y$, etc. etc. hat. Da nun V als Funktion von y und y_1, welche bezüglich in y_x und $(y_1)_x$ übergehen, betrachtet werden muß, so hat man

$$\delta V = \partial V_y \cdot \delta y + \partial V_{y_1} \cdot \delta y_1;$$

und so findet sich der obige Ausdruck für δV.

$\delta y = 0$ und $\partial\delta y$ einen beliebigen Werth haben kann) in die beiden Gleichungen

2) $\partial V_y = 0$ und 3) $\partial V_{y_1} = 0$.

B. Soll die Gleichung 1.) nicht für jedes δy, gelten, d. h. soll die Funktion V nicht gegen jedes V_x, sondern nur gegen diejenigen V_x ein Maximum oder Minimum werden, welche aus einem δy hervorgehen, das für jeden andern Werth von x anders und immer so wird, daß entweder

bloß $\delta y = 0$, aber nicht $\partial\delta y = 0$,

oder bloß $\partial\delta y = 0$, aber nicht $\delta y = 0$ wird,

so reducirt sich die Gleichung 1.) im erstern Falle bloß auf

4) $$\partial V_{y_1} = 0,$$

im andern Falle aber bloß auf

5) $$\partial V_y = 0.$$

Ehe wir weiter gehen, mag das vorstehende durch einige Beispiele erörtert werden.

Beispiel 1. Man soll die Kurve finden (d. h. ihre auf die rechtwinklichen Koordinaten-Axen **OX** und **OY** bezogene Gleichung zwischen x und y), welche durch einen gegebenen Punkt (α, β) hindurchgeht, und welche dabei an jedem ihrer Punkte M (Fig. 21.) (dessen Abscissen-Werth $\mathbf{OP} = x$ seyn mag, so daß $\mathbf{PM} = y$ ist) die Eigenschaft hat, daß die durch diesen Punkt M hindurchgehende und von zweien, zu den Abscissen-Werthen $\mathbf{OS}_1 = a$ und $\mathbf{OT}_1 = b$ gehörigen Ordinaten-Richtungen $\mathbf{SS}_1$ und $\mathbf{TT}_1$ begrenzte Tangente SMT kleiner ist, als die zu derselben Abscisse $\mathbf{OP} = x$ gehörige und eben so begrenzte Tangente einer jeden andern nächst anliegenden Nachbar-Kurve, welche ebenfalls durch denselben gegebenen Punkt (α, β) hindurchgeht.

Ist hier $y = y_x$ die Ordinate MP der gesuchten Kurve, so drückt

$$y_x \text{ d. h. } y + \delta y \cdot x + \delta^2 y \cdot \frac{x^2}{2!} + \cdots,$$

wenn δy, $\delta^2 y$, etc. etc. als ganz beliebige Funktionen von x gedacht sind und x unendlich klein genommen wird, — den, zu demselben Abscissen-Werthe x gehörigen Ordinaten-Werth der nächsten Nachbar-Kurven aus, und es sind diese Funktionen δy, $\delta^2 y$, etc. etc. keiner andern Bedingung unterworfen, als daß für $x = \alpha$, allemal $y_x = y = \beta$, also δy_α, $\delta^2 y_\alpha$*),

*) Wir verstehen unter δy_α, $\partial\delta y_\alpha$, $\delta^2 y_\alpha$, etc. etc. hier immer das, was aus δy, $\partial(\delta y)_x$, $\delta^2 y$, etc. wird, so oft man α statt x schreibt,

etc. etc. $=0$ werden muß; eine Bedingung, welche keinen Einfluß auf die Form der Funktionen δy, $\delta^2 y$, etc. hat, sondern bei jeder beliebigen Form dieser Funktionen durch die schickliche Annahme einer einzigen Constante in dieser Form erfüllt werden kann.

Nun findet sich nach I. Bd. §§. 170. 171.) die Länge V der Tangente SMT so, nämlich

$$V=(b-a)\cdot\sqrt{1+\partial y_x^{\,2}}=(b-a)\cdot\sqrt{1+y_1^{\,2}}.$$

wenn wir ∂y_x durch y_1 bezeichnen. Die Länge $V_\varkappa$ derselben Tangente für jede nächste Nachbar-Kurve ist daher

$$V_\varkappa=(b-a)\cdot\sqrt{1+\partial(y_\varkappa)_x^{\,2}}.$$

Man findet nun $\partial V_y=0$, $\partial V_{y_1}=(b-a)\cdot\dfrac{y_1}{\sqrt{1+y_1^{\,2}}}$,

also $$\delta V=(b-a)\cdot\frac{y_1}{\sqrt{1+y_1^{\,2}}}\cdot\partial\delta y.$$

Die Gleichung $\delta V=0$ geht daher dasmal über in

$$y_1=0,\quad \text{d. h.}\quad \partial y_x=0\quad\text{und giebt}\quad y=c$$

wo c eine willkührliche Constante ist. Da für $x=\alpha$, $y=\beta$ werden soll, so erhält man noch $c=\beta$; und es ist daher die Gleichung der gesuchten Kurve dasmal

$$y=\beta,$$

welches eine mit OX parallele und durch den Punkt (α, β) hindurchgehende Gerade vorstellt.

Es wird ferner dasmal

$$\delta^2 V=(b-a)\cdot\frac{1}{(1+y_1^{\,2})\sqrt{1+y_1^{\,2}}}\cdot(\partial\delta y)^2;$$

und da hier überall $\sqrt{1+y_1^{\,2}}$ ihren positiven Werth vorstellt, so zeigt sich $\delta^2 V$ positiv. Also ist V ein Minimum.

Beispiel 2. Es wird die Kurve NMR (Fig. 21.) gesucht, in welcher das Produkt $SS_1\cdot TT_1=V$ ein Minimum wird.

Dasmal findet sich

$$V=[y+(a-x)y_1]\times[y+(b-x)y_1];$$

daher, weil die Gleichung $\delta V=0$ in $\partial V_y=0$ und $\partial V_{y_1}=0$ zerfällt,

$$\partial V_y=\quad 2y+(a+b-2x)\cdot\partial y_x\quad=0$$

und

$$\partial V_{y_1}=(a+b-2x)y+2(a-x)(b-x)\cdot\partial y_x=0.$$

Diese beiden Gleichungen geben, wenn ∂y_x eliminirt wird $y=0$, und da $y=0$ beiden Gleichungen zugleich wirklich genügt, so löst solches die Aufgabe. Dies giebt eine Gerade, die mit der Abscissen-Axe zusammen fällt. Ist daher β nicht $=0$, so hat diese Aufgabe gar keine Auflösung.

Aber auch, wenn $\beta=0$ gegeben ist, zeigt es sich, daß für $y=0$ $\delta^2 V$ nicht

immerfort positiv und auch nicht immerfort negativ wird, daß also auch $y=0$ unser V nicht zu einem Maximo oder Minimo machen kann.

Beispiel 3. Hätte man aber in der vorhergehenden Aufgabe verlangt, daß V ein Minimum werden soll bloß in Bezug auf diejenigen nächsten Nachbar-Kurven, welche gerade allemal auch durch denselben Punkt M hindurchgehen, an welchen jetzt eben die Tangente SMT gedacht wird, so hätte man jetzt den erstern der Fälle III. B.) nämlich den Fall, wo für jedes eben gedachte x, $y_x=y$, aber nicht $\partial(y_x)_x=\partial y_x$ werden soll. Dasmal hat man also bloß die einzige Gleichung $\partial V_{y_x}=0$, welche aus $\delta V=0$ hervorgeht; also die Gleichung

$$(a+b-2x)y+2(a-x)(b-x)\cdot\partial y_x=0$$

oder

$$\frac{\partial y_x}{y}=\frac{2x-a-b}{2(x-a)(x-b)}.$$

Diese Gleichung integrirt, giebt

$$y^2=C(a-x)(b-x).$$

Weil aber für $x=\alpha$, $y=\beta$ werden soll, so hat man noch zur Bestimmung der Constante C die Gleichung

$$\beta^2=C(a-\alpha)(b-\alpha);$$

so daß die Gleichung der gesuchten Kurve wird

$$\frac{y^2}{\beta^2}=\frac{(a-x)(b-x)}{(a-\alpha)(b-\alpha)}.$$

Dies ist die Gleichung einer Hyperbel, wenn α größer als a und b, oder wenn α kleiner als a und b ist; dagegen giebt dieselbe Gleichung eine Ellipse, wenn α zwischen a und b liegt.

Es wird noch gefunden

$$\delta^2V=\partial^2V_{y_x}\cdot(\partial\delta y)^2=2(a-x)(b-x)\cdot(\partial\delta y)^2.$$

Also macht die Kurve V zu einem Maximum, so oft der Punkt M zwischen S und T liegt; dagegen zu einem Minimum, so oft der Punkt M, an welchem die Tangente gezogen wird, links von S oder rechts von T genommen wird.

Beispiel 4. Sollte aber dasselbe Produkt $V=SS_1\times TT_1$ ein Minimum werden, aber bloß in Bezug auf alle diejenigen nächsten Nachbar-Kurven, deren Tangenten für denselben jedesmaligen Werth von x alle mit einander und mit SMT parallel laufen; — so wäre dasmal für den jedesmaligen Werth von x, $\partial(y_x)_x=\partial y_x$ gedacht, also δy zwar beliebig, aber für einen jedesmaligen anderen Werth von x anders und so gedacht, daß für denselben Werth von x, $\partial(\delta y)_x=0$ wird. Dies wäre also der zweite der Fälle III. B.).

Dasmal hat man daher $\partial V_y=0$, d. h.

$$2y+(a+b-2x)\cdot\partial y_x=0 \quad \text{oder} \quad \frac{\partial y_x}{y}=\frac{1}{x-\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b},$$

also wenn man integrirt

$$y=C(x-\tfrac{1}{2}a-\tfrac{1}{2}b) \quad \text{oder} \quad y-\beta=\frac{\beta}{\alpha-\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b}(x-\alpha),$$

wenn man C so bestimmt, daß $y=\beta$ wird für $x=\alpha$.

Diese Gleichung stellt eine Gerade vor, welche die Abscissen-Axe genau in der Mitte U zwischen S_I und T_I trifft, übrigens durch den gegebenen Punkt (α, β) hindurchgeht, wie (Fig. 22.) zeigt.

Aus $\delta V=\partial V_y\cdot\delta y$ folgt sogleich für den hier gefundenen Werth von y, $\delta^2 V=2\cdot\delta y^2$; also wird $\delta^2 V$ positiv; folglich ist für diesen Werth von y, die Funktion V wirklich ein Minimum *).

§. 82.

Ist

1) $$V=\int_{b\div a} U\cdot dx,$$

dagegen U selbst wieder eine der im §. 81. II. III.) aufgezählten Funktionen; sind ferner die nächsten Nachbar-Werthe $V_\varkappa$, gegen welche V ein Maximum oder Minimum werden soll, folgende:

2) $$V_\varkappa=\int_{b\div a} U_\varkappa\cdot dx,$$

wo $U_\varkappa$ das bedeutet, was aus U hervorgeht, wenn statt der Elemente y, z, etc. jetzt die mit denselben Elementen anfangenden Reihen $y+\delta y\cdot\varkappa+\cdots$, $z+\delta z\cdot\varkappa+\cdots$ gesetzt werden, — so wird man

---

*) Verfolgt man diese Auflösung geometrisch, so sieht man (Fig. 22.) S mit N, T dagegen mit R zusammenfallen. Der Ausdruck V, welcher das Produkt der beiden Ordinaten-Werthe der Tangente vorstellt, ist dasmal negativ, weil der zweite Faktor den negativen Werth $-TT_I$ hat. — Das Produkt der als positiv gedachten Linien SS_I und TT_I ist daher eigentlich ein Maximum, weil nur dann $V=-SS_I\cdot TT_I$ ein Minimum seyn kann. — Und in der That ist jetzt, wo $S_IU=T_IU$ ist, auch $SS_I=TT_I$; während jede andere mit dieser ST parallele Tangente z. B. VW für jede andere nächst-anliegende Kurve, die eine der Ordinaten um ein Stück $SV=TW=z$ größer, die andere um dasselbe Stück kleiner macht, so daß das Produkt derselben durch $(SS_I-z)(SS_I+z)$ d. h. $SS_I^2-z^2$ ausgedrückt, also offenbar um das Stück z^2 kleiner wird, als das erstere Produkt $SS_I\cdot TT_I$, welches hier $=SS_\varkappa^2$ gefunden wurde.

3) $$\delta V = \int_{b\div a} \delta U \cdot dx$$

so finden, wie etwa in dem Beispiele zu §. 79.), so daß, wenn z. B. U eine Funktion von x, y, y_1, y_2, z und z_1 ist, man haben wird

4) $$\delta V = \int_{b\div a} \left\{ \begin{matrix} \partial U_y \cdot \delta y + \partial U_{y_1} \cdot \partial\delta y + \partial U_{y_2} \cdot \partial^2\delta y \\ + \partial U_z \cdot \delta z + \partial U_{z_1} \cdot \partial\delta z \end{matrix} \right\} \cdot dx,$$

wo die bloßen ∂ sich allemal auf alles x beziehen, d. h. wo $\partial\delta y$ statt $\partial(\delta y)_x$ steht, u. s. w.

Um aber die Behandlung der Gleichung $\delta V = 0$ gehörig durchführen zu können, muß man jedes solche Integral vorher, durch wiederholte theilweise Integration, so lange umformen, bis kein mit $\partial\delta y$, $\partial\delta z$, $\partial^2\delta y$, etc. etc. behaftetes Glied, sonder lauter nur mit δy oder δz behaftete Glieder allein noch unter dem Integral-Zeichen vorkommen, eine Umformung, welche wir im Beispiel zu §. 79.) durchgesetzt haben.

Diese Umformung ist allemal möglich, da jedes einzelne Glied integrirt werden muß. Gesetzt nun, ein Glied von δV hätte die Form

α) $$\int_{b\div a} \partial U_{z_2} \cdot \partial^2\delta z \cdot dx,$$

so würde man durch Anwendung der Formel

β) $$\int_{b\div a} (u \cdot \partial v_x) \cdot dx = [uv]_{b\div a} - \int_{b\div a} (v \cdot \partial u_x) \cdot dx,$$

wenn $\partial\delta z$ statt v gesetzt wird, zunächst erhalten

γ) $$\int_{b\div a} \partial U_{z_2} \cdot \partial^2\delta z \cdot dx = [\partial U_{z_2} \cdot \partial\delta z]_{b\div a} - \int_{b\div a} \partial(\partial U_{z_2}) \cdot \partial\delta z \cdot dx,$$

wo die bloßen ∂ sich auf alles x beziehen. Das letztere Integral giebt aber nach derselben Formel β), wenn jetzt δz statt v gesetzt wird, sogleich noch

δ) $$\int_{b\div a} \partial(\partial U_{z_2}) \cdot \partial\delta z \cdot dx = [\partial(\partial U_{z_2}) \cdot \delta z]_{b\div a} - \int_{b\div a} \partial^2(\partial U_{z_2}) \cdot \delta z \cdot dx.$$

Substituirt man daher diesen Werth in die γ), so ergiebt sich

ε) $$\int_{b\div a} \partial U_{z_2} \cdot \partial^2\delta z \cdot dx = [\partial U_{z_2} \cdot \partial\delta z]_{b\div a} - [\partial(\partial U_{z_2}) \cdot \delta z]_{b\div a} + \int_{b\div a} \partial^2(\partial U_{z_2}) \cdot \delta z \cdot dx,$$

so daß nur noch δz allein, aber keine der Ableitungen $\partial\delta z$, $\partial^2\delta z$ mehr unter dem Integral-Zeichen erscheint.

Auf diese Weise wird also, unter unserer obigen beispielsweise gemachten Voraussetzung, der Variations-Koefficient δV in 4.) so umgeformt erscheinen, nämlich

5) $$\delta V = ([\partial U_{y_1} - \partial(\partial U_{y_2})]\cdot\delta y + \partial U_{y_2}\cdot\partial\delta y + \partial U_{z_1}\cdot\delta z)_{b\div a} + \int_{b\div a}\left(\begin{matrix}[\partial U_y - \partial(\partial U_{y_1}) + \partial^2(\partial U_{y_2})]\cdot\delta y \\ + [\partial U_z - \partial(\partial U_{z_2})]\cdot\delta z\end{matrix}\right)\cdot dx.$$

So wie diese Umformung von δV bewerkstelligt ist, so kann man, und nur dann erst, behaupten, daß $\delta V = 0$ im Allgemeinen nicht existiren kann, wenn nicht der noch unter dem Integral-Zeichen befindliche Theil für sich, und auch der außerhalb des Integral-Zeichens befindliche Theil für sich, der Null gleich ist*). — Dadurch zerlegt sich $\delta V = 0$ in zwei Gleichungen, von denen jede wieder, nach den besonderen Umständen der besonderen Aufgaben auf's Neue sich zerlegt. — Die erstere Gleichung giebt aber allemal Differenzial-Gleichungen, welche noch integrirt werden müssen; und sie heißen die allgemeinen Gleichungen des Maximums und Minimums. Die andere Gleichung, auch wenn sie wieder in mehrere zerfällt, giebt allemal Gleichungen, in denen kein x mehr vorkommt, weil statt der x bereits die Grenz-Werthe gesetzt worden sind. Man nennt sie deshalb die Grenz-Gleichungen für das Maximum oder Minimum, und sie dienen nebst den etwanigen übrigen Nebenbedingungen der Aufgabe, zur Bestimmung der durch die Integration der erstern Gleichungen eingegangenen willkührlichen Constanten.

Folgende Beispiele mögen dies deutlicher machen.

Beispiel 1. Es soll die Kurve $y = y_x$ gefunden werden, welche zwischen gegebenen, zu $x = a$ und $x = b$ gehörigen Grenz-Ordinaten die kürzeste ist.

Wird durch V die Länge dieser Kurve bezeichnet, so hat man hier

1) $$V = \int_{b\div a}\sqrt{1+\partial y_x^2}\cdot dx,$$

so daß

2) $U = \sqrt{1+y_1^2}$; 3) $V = \int_{b\div a} U\cdot dx$;

4) $\delta U = \frac{y_1}{\sqrt{1+y_1^2}}\cdot\partial\delta y$ und 5) $\delta V = \int_{b\div a}\delta U\cdot dx$;

*) Ueber den Beweis dieser Behauptung lese man die §§. 334—337. d. VI. Th. d. „Syst. d. Mathem."

ist; folglich hat man, wenn man theilweise integrirt,

$$6)\quad \delta V = \left[\frac{y_1}{\sqrt{1+y_1^2}}\cdot\delta y\right]_{b\div a} - \int_{b\div a}\partial\left(\frac{y_1}{\sqrt{1+y_1^2}}\right)\cdot\delta y\cdot dx$$

$$= \left(\frac{y_1}{\sqrt{1+y_1^2}}\right)_b\cdot\delta y_b - \left(\frac{y_1}{\sqrt{1+y_1^2}}\right)_a\cdot\delta y_a - \int_{b\div a}\partial\left(\frac{y_1}{\sqrt{1+y_1^2}}\right)\cdot\delta y\cdot dx,$$

wo zuerst b statt x, dann a statt x gesetzt worden ist.

Die Gleichung $\delta V = 0$ giebt daher jetzt zunächst die allgemeine Gleichung des Maximums oder Minimums

$$7)\quad \partial\left(\frac{y_1}{\sqrt{1+y_1^2}}\right) = 0, \text{ oder } \frac{y_1}{\sqrt{1+y_1^2}} = c \text{ oder } y_1 \text{ d. h. } \partial y_x = C,$$

wo C eine willkührliche Constante ist. Integrirt man diese Gleichung noch einmal, so erhält man

$$8)\qquad y = Cx + c',$$

wo C und c' zwei noch zu bestimmende Constanten sind.

Weil aber auch δy_b und δy_a ganz willkührlich sind, so zerfällt die Grenz-Gleichung

$$9)\qquad \left(\frac{y_1}{\sqrt{1+y_1^2}}\right)_b\cdot\delta y_b - \left(\frac{y_1}{\sqrt{1+y_1^2}}\right)_a\cdot\delta y_a = 0$$

sogleich wieder in die beiden Gleichungen

$$10)\qquad \left(\frac{y_1}{\sqrt{1+y_1^2}}\right)_b = 0 \quad \text{und} \quad 11)\quad \left(\frac{y_1}{\sqrt{1+y_1^2}}\right)_a = 0,$$

welche beide, weil $y_1 = C$ ist, dasmal in die einzige Gleichung

$$12)\qquad C = 0$$

zusammenfallen. — Die gesuchte Linie ist daher dasmal durch die Gleichung

$$13)\qquad y = c'$$

gegeben, und diese Gleichung drückt eine, mit der Abscissen-Axe OX parallele Gerade aus.

Soll sie noch durch den Punkt (α, β) hindurchgehen, so zeigt sich noch $c' = \beta$, so daß dann die gesuchte Linie ausgedrückt ist durch

$$14)\qquad y = \beta.$$

Für $y_1 = 0$ zeigt sich $\delta^2 U = (\partial\delta y)^2$, also $\delta^2 V = \int_{b\div a}(\partial\delta y)^2\cdot dx$ allemal positiv; daher ist für diesen Werth von y, die Länge V wirklich ein Minimum.

Beispiel 2. Hätte man nicht unter allen möglichen, sondern nur unter allen denen nächsten Nachbar-Kurven, welche durch dieselben, gegebenen oder nicht gegebenen Endpunkte hindurchgehen, die Kurve der vorhergehenden Aufgabe gesucht, so hätte man zwar δy beliebig, aber doch so sich denken müssen, daß $\delta y_a = \delta y_b = 0$ ist. Dann wäre die Grenz-Gleichung 9.) von selbst erfüllt, und die Gleichung der gesuchten Linie wäre nun ausgedrückt gewesen durch

$$15)\qquad y = Cx + c',$$

wo die Constanten C und c′ so lange unbestimmt bleiben, als sie nicht durch Neben-Bedingungen näher bestimmt werden.

Sind z. B. entweder die Endpunkte gegeben, oder sind überhaupt zwei Punkte (α, β) und (γ, δ) gegeben, durch welche diese Gerade hindurchgehen soll, so hat man zur Bestimmung dieser Constanten C und c′ die beiden Gleichungen

16) $$\beta = C\alpha + c' \quad \text{und} \quad \delta = C\gamma + c'.$$

Beispiel 3. Es wird in einer Ebene die kürzeste Linie $y = y_x$ gesucht, unter allen denjenigen nächsten Nachbar-Kurven, welche zwischen gegebenen, zu $x = a$ und $x = b$ gehörigen Ordinaten-Richtungen einerlei Inhalt haben.

Hier ist, wenn V wiederum die Länge der Kurve ausdrückt, abermals

1) $$V = \int_{b\div a} \sqrt{1 + y_1^2} \cdot dx;$$

aber dasmal ist δy nicht willkührlich, sondern δy muß dasmal der Bedingung genügen, daß

2) $$\int_{b\div a} y \cdot dx = \int_{b\div a} y_\alpha \cdot dx \quad \text{d. h.} \quad \int_{b\div a} \delta y \cdot dx = 0$$

ist. Weil jedoch diese Bedingung 2.) für jede Form von δy sich erfüllen läßt (durch zweckmäßige Bestimmung einer einzigen in dieser Form vorhandenen Constante), so bleibt die allgemeine Gleichung des Maximums oder Minimums doch wieder dieselbe

$$y = Cx + c'.$$

Und weil selbst δy_a und δy_b von einander unabhängig bleiben, so bleiben die Grenz-Gleichungen wieder wie im Beispiel 1.), so daß $C = 0$ und

$$y = c'$$

wird. Diese Constante c′ bestimmt sich aber, wenn der Inhalt $\int_{b\div a} y \cdot dx$ ein gegebener und $= g$ ist; denn dies giebt die Gleichung

$$\int_{b\div a} y \cdot dx = \int_{b\div a} c' \cdot dx = c'b - c'a = c'(b-a) = g,$$

woraus $c' = \frac{g}{b-a}$ sich ergiebt.

Sollten die Grenz-Punkte aller nächsten Nachbar-Kurven mit denen der gesuchten Kurve zusammenfallen, wären aber selbige nicht gegeben, so wäre $\delta y_a = \delta y_b = 0$, und so hätte man wieder, wie im Beispiel 2.)

$$y = Cx + c';$$

und eine der Constanten bestimmte sich aus der Gleichung

$$\int_{b\div a} y \cdot dx = C(b^2 - a^2) + c'(b-a) = g,$$

während die andere Constante etwa noch dadurch bestimmt werden kann, daß man die Linie auch durch einen gegebenen Punkt (α, β) gehen läßt.

Beispiel 4. Man soll die Kurve finden, welche von $x = a$ an bis zu $x = b$ hin, die kürzeste ist, unter allen denjenigen nächsten Nachbar-Kurven, deren zwischen den Grenzen $x = a$ und $x = x$ genommenen Inhalte ganz beliebig und unabhängig sich ändern, aber für $x = b$ einander gleich

werden, so daß diese Kurven zwischen $x = a$ und $x = b$ alle einerlei Inhalt haben.

Hier ist die Ordinate y_x von dem Inhalte z_x abhängig und zwar mittelst der Gleichung

$$\int_{x \div a} y_x \cdot dx = z_x, \quad \text{oder} \quad y_x = \vartheta(z_x)_x.$$

Es hängen daher dasmal δy, $\delta^2 y$, etc. von δz, $\delta^2 z$, etc. etc. ab, und letztere sind die unabhängigen und willkührlichen. Wenn daher jetzt noch immer

$$\delta V = \int_{b \div a} \frac{y_1}{\sqrt{1 + y_1^2}} \cdot \vartheta \delta y \cdot dx$$

ist, so gilt diese Gleichung doch nicht für jedes δy, sondern nur für diejenigen δy, welche von δz mittelst der aus

$$y = \vartheta z_x$$

hervorgehenden Gleichung

$$\delta y = \vartheta \delta z$$

abhängen. Man erhält daher, wenn man δy eliminirt,

$$\delta V = \int_{b \div a} \frac{y_1}{\sqrt{1 + y_1^2}} \cdot \vartheta^2 \delta z \cdot dx.$$

Integrirt man nun hier zweimal hinter einander theilweise, so ergiebt sich

$$\delta V = \left(\frac{y_1}{\sqrt{1 + y_1^2}} \cdot \vartheta \delta z - \vartheta \left(\frac{y_1}{\sqrt{1 + y_1^2}} \right) \cdot \delta z \right)_{b \div a} + \int_{b \div a} \vartheta^2 \left(\frac{y_1}{\sqrt{1 + y_1^2}} \right) \cdot \delta z \cdot dx.$$

Und die Gleichung $\delta V = 0$ zerfällt daher, weil nach der Voraussetzung δz ganz beliebig und willkührlich gedacht werden kann, jetzt in die allgemeine Gleichung

$$\text{I.} \qquad \vartheta^2 \left(\frac{y_1}{\sqrt{1 + y_1^2}} \right) = 0, \quad \text{also} \quad \frac{y_1}{\sqrt{1 + y_1^2}} = cx + c',$$

wo c und c' zwei durch diese letztern Integrationen eingegangene willkührliche Constanten sind, und in die Grenz-Gleichung

$$\text{II.} \quad \left(\frac{y_1}{\sqrt{1 + y_1^2}} \right)_b \cdot \vartheta \delta z_b - \left(\frac{y_1}{\sqrt{1 + y_1^2}} \right)_a \cdot \vartheta \delta z_a - \vartheta \left(\frac{y_1}{\sqrt{1 + y_1^2}} \right)_b \cdot \delta z_b + \vartheta \left(\frac{y_1}{\sqrt{1 + y_1^2}} \right)_a \delta z_a = 0.$$

Löst man die Gleichung I.) nach y_1 oder ϑy_x algebraisch auf, so erhält man

$$\vartheta y_x = \frac{cx + c'}{\sqrt{1 - (cx + c')^2}};$$

und hieraus, wenn man nach x links und rechts die Integrale nimmt,

$$y = c'' - \frac{1}{c} \cdot \sqrt{1 - (cx + c')^2},$$

oder

$$(y - c'')^2 + \left(x + \frac{c'}{c} \right)^2 = \frac{1}{c^2}.$$

Dies ist die Gleichung der gesuchten Kurve. Sie stellt eine Kreislinie vor, deren Radius $\frac{1}{c}$ ist, und deren Mittelpunkt die Koordinaten-Werthe $-\frac{c'}{c}$ und c'' hat. Die drei, durch die Integration eingegangenen Constanten c, c′ und c″ erwarten nun aus der Grenz-Gleichung II.) ihre nähere Bestimmung.

Weil aber nach der Voraussetzung der Inhalt z von der Grenze, wo $x = b$ ist, unveränderlich seyn soll, so hat man aus

$$\int_{b \div a} y \cdot dx = \int_{b \div a} y_{\varkappa} \cdot dx \quad \text{noch} \quad \int_{b \div a} \delta y \cdot dx = \delta z_b - \delta z_a = 0.$$

Setzt man nun in die Grenz-Gleichung II.) statt y den gefundenen Werth in x, so wie δz_b statt δz_a, so reducirt sich solche bloß auf

$$(cb + c') \cdot \partial \delta z_b - (ca + c') \cdot \partial \delta z_a = 0.$$

Wird nun noch die Bedingung hinzugefügt, daß die gesuchte Kurve und alle nächsten Nachbar-Kurven, mit denen sie verglichen wird, durch dieselben gegebenen, zu $x = a$ und $x = b$ gehörigen Punkte hindurchgehen sollen, so hat man noch

$$\delta y_b = \delta y_a = 0, \quad \text{d. h.} \quad \partial \delta z_b = \partial \delta z_a = 0.$$

Die Grenz-Gleichung ist daher nun von selbst erfüllt, und die drei Constanten c, c′ und c″ können nun beliebig und so gewählt werden, daß noch dreien Nebenbedingungen genügt wird, z. B. daß die gefundene Kurve noch durch drei gegebene Punkte hindurchgeht.

§. 83.

Ist jedoch U eine solche Funktion, wie sie so eben im §. 82.) gedacht worden ist, und ist wiederum

1) $$V = \int_{b \div a} U \cdot dx;$$

sind dagegen die nächsten Nachbar-Werthe $V_{\varkappa}$, in Bezug auf welche die Funktion V ein Maximum oder ein Minimum werden soll, noch umfassender, — ist nämlich

2) $$V_{\varkappa} = \int_{b_{\varkappa} \div a_{\varkappa}} U_{\varkappa} \cdot dx,$$

so kommen zu dem δV des §. 82.) (nach §. 65., besonders aber nach Anmerkung zu §. 65.), die beiden Glieder

$$U_b \cdot \delta b - U_a \cdot \delta a$$

noch hinzu. Weil aber diese Glieder zu denen gehören, welche nicht unter dem Integral-Zeichen stehen, so zerfällt $\delta V = 0$ genau in dieselbe allgemeine Gleichung, wie im §. 82.), während zu der Grenz-Gleichung eben daselbst die beiden Glie-

der $U_b \cdot \delta b - U_a \cdot \delta a$ noch hinzutreten, um die hiesigen Gleichungen zu geben.

Beispiel 1. Es sind zwei Kurven ANB und DRF Fig. 24.) gegeben, bezüglich durch die Gleichungen

1) $y = \varphi_x$ und 2) $y' = \psi_{x'}$.

Man soll zwischen diesen Kurven die kürzeste Linie NMR finden.

Ist $y = y_x$ die Gleichung der gesuchten Kurve NMR, so sind die Abscissen-Werthe a und b der Grenzpunkte N und R dasmal selbst noch gesucht, weil diese Grenzpunkte zwar in den gegebenen Kurven liegen, aber so gesucht werden, daß eben NMR die kürzeste Linie zwischen diesen gegebenen Kurven wird. Werden nun die Ordinaten der nächsten Nachbar-Kurven durch $y_\varkappa$ bezeichnet, so muß man auch die Abscissen-Werthe ihrer Grenzpunkte durch $a_\varkappa$ und $b_\varkappa$ ausdrücken; und wenn daher jetzt noch, wie im Beispiel 1. zu §. 82.)

$$V = \int_{b \div a} \sqrt{1 + \partial y_x^2} \cdot dx$$

ist, so hat man doch dasmal

$$V_\varkappa = \int_{b_\varkappa \div a_\varkappa} \sqrt{1 + \partial (y_\varkappa)_x^2} \cdot dx.$$

Die allgemeine Gleichung des Maximums und Minimums bleibt daher jetzt dieselbe wie dort, nämlich

I. $$\partial \left(\frac{y_1}{\sqrt{1 + y_1^2}} \right) = 0 \quad \text{oder} \quad y = Cx + c',$$

während zu der Grenz-Gleichung noch die Glieder

$$(\sqrt{1 + y_1^2})_b \cdot \delta b - (\sqrt{1 + y_1^2})_a \cdot \delta a$$

hinzutreten; so daß diese Grenz-Gleichung jetzt wird

II. $$\left(\frac{y_1}{\sqrt{1 + y_1^2}} \right)_b \cdot \delta y_b - \left(\frac{y_1}{\sqrt{1 + y_1^2}} \right)_a \cdot \delta y_a + (\sqrt{1 + y_1^2})_b \cdot \delta b - (\sqrt{1 + y_1^2})_a \cdot \delta a = 0.$$

Da nun $y_1 = \partial y_x = C$ ist, so wird diese Grenz-Gleichung jetzt

3) $$\frac{C}{\sqrt{1 + C^2}} \cdot \delta y_b - \frac{C}{\sqrt{1 + C^2}} \cdot \delta y_a + \sqrt{1 + C^2} \cdot \delta b - \sqrt{1 + C^2} \cdot \delta a = 0.$$

Nun hängen aber δa und δy_a vermöge der Gleichung 1.), nämlich $y = \varphi_x$ von einander ab, da diese Gleichung nicht bloß gelten soll, wenn a statt x, und y_a statt y, sondern auch noch, wenn $a_\varkappa$ statt x und $(y_\varkappa)_{a_\varkappa}$ statt y gesetzt werden. Dies giebt die Gleichung

4) $$\delta y_a + \partial y_a \cdot \delta a = \partial \varphi_a \cdot \delta a^*),$$

wo ∂y_a und φ_a das bedeuten, was aus ∂y_x und φ_x hervorgeht, wenn man a statt bezüglich x und x schreibt. — Aber eben aus demselben Grunde hängen auch δb und δy_b von einander ab mittelst der Gleichung

5) $$\delta y_b + \partial y_b \delta b = \partial \psi_b \cdot \delta b.$$

Substituirt man nun diese Werthe von δy_b und δy_a in die Grenz-Gleichung 3.), so geht solche über in

6) $$\left(\frac{C}{\sqrt{1+C^2}} \cdot (\partial \psi_b - \partial y_b) + \sqrt{1+C^2}\right) \cdot \delta b - \left(\frac{C}{\sqrt{1+C^2}} \cdot (\partial \varphi_a - \partial y_a) + \sqrt{1+C^2}\right) \cdot \delta a = 0.$$

Sind nun δb und δa von einander ganz unabhängig gedacht, so zerfällt diese Gleichung wieder in zwei Gleichungen, nämlich in

7) $$\frac{C}{\sqrt{1+C^2}} \cdot (\partial \psi_b - \partial y_b) + \sqrt{1+C^2} = 0$$

und

8) $$\frac{C}{\sqrt{1+C^2}} \cdot (\partial \varphi_a - \partial y_a) + \sqrt{1+C^2} = 0.$$

Da nun aus $y = Cx + c'$, $\partial y_x = C$, also $\partial y_b = \partial y_a = C$ hervorgeht, so werden diese letztern beiden Gleichungen in folgende übergehen, nämlich in

9) $C \cdot \partial \psi_b + 1 = 0$ und 10) $C \cdot \partial \varphi_a + 1 = 0.$

Da nun die Gleichung 1.) und die Gleichung 2.) für die Grenz-Werthe b und y_b $(= Cb + c')$ statt finden muß, so geben diese noch

11) $Ca + c' = \varphi_a$ und 12) $Cb + c' = \psi_b.$

Aus den vier Gleichungen 9.—12.) bestimmen sich aber die vier Unbekannten C, c', a und b.

Die Form der Gleichungen 9.) und 10.) läßt noch sehen (wegen I. Bd. §. 121. VI. und I. Bd. §.§. 170. 171.), daß die gefundene Gerade NMR auf jeder der beiden gegebenen Kurven senkrecht steht.

Statt der erstern Kurve, oder statt der andern, kann auch bloß die Ordinaten-Richtung gegeben seyn. Dann geht bloß b in b_x über, während a nicht variirt, also $\delta a = 0$ ist. Dann wird die Rechnung bei den Grenz-Gleichungen ein klein wenig anders. Man findet jetzt $C = 0$, und $y = c'$, und c' bestimmt sich so, daß die gesuchte Linie NR (Fig. 25.) auf der Or-

---

*) Es ist dies die Gleichung, welche aus

$$(y_x)_{a_x} = \varphi_{a_x}$$

hervorgeht, wenn man solche einmal nach x differenziirt und dann $x = 0$ setzt.

dinaten-Richtung SS, und auf der gegebenen Kurve DRF zugleich senkrecht steht.

§. 84.

Enthält die Funktion U wiederum x, y und z und die Ableitungen von y und z nach x bis zu einer beliebigen Ordnung hin; ist wiederum wie im §. 82.)

1) $V = \int_{b\div a} U \cdot dx$ und 2) $V_x = \int_{b\div a} U_x \cdot dx$,

sind aber y und z von einander abhängig, mittelst einer Differenzial-Gleichung

3) $L_{x,y,z,y_1,z_1,\text{etc. etc.}} = 0$,

wo y_1, z_1, etc. bezüglich die Ableitungen ∂y_x, ∂z_x, etc. etc. vorstellen; so hat man zunächst

4) $\delta V = \int_{b\div a} (\partial U_y \cdot \delta y + \partial U_z \cdot \delta z + \partial U_{y_1} \cdot \partial\delta y + \partial U_{z_1} \cdot \partial\delta z + \cdots) \cdot dx$,

oder, wenn man auf die beschriebene Weise, durch theilweise Integration umformt

$$\text{I. } \delta V = \int_{b\div a} \left\{ \begin{matrix} [\partial U_y - \partial(\partial U_{y_1}) + \cdots]\delta y \\ + [\partial U_z - \partial(\partial U_{z_1}) + \cdots]\delta z \end{matrix} \right\} \cdot dx + \left\{ \begin{matrix} \text{die übrigen v.} \\ \text{Integralzeich.} \\ \text{bereits befrei-} \\ \text{ten Glieder} \end{matrix} \right\}.$$

Aus der Gleichung $\delta V = 0$ muß man aber nun, da wegen $L = 0$ z_x von y_x, also δz von δy abhängig ist, δz eliminiren, um die Gleichung zu bekommen, welche wegen der Willkührlichkeit von δy erst gehörig zerfällt werden kann. Nun folgt zwar aus $L = 0$ noch $\delta L = 0$ d. h.

$$\partial L_y \cdot \delta y + \partial L_z \cdot \delta z + \partial L_{y_1} \cdot \partial\delta y + \partial L_{z_1} \cdot \partial\delta z + \cdots = 0;$$

man muß aber, um die Elimination statt finden lassen zu können, sich der von Lagrange und Euler gebrauchten „Methode der Multiplikatoren" bedienen. Diese Methode ist zwar dem Wesen nach diejenige Eliminations-Methode, „welche in der gemeinen Algebra unter dem Namen der französischen oder der Bezout'schen Eliminations-Methode" beschrieben wird, muß aber hier nachstehende Modification erleiden, um ihren Zweck zu erfüllen.

Man multiplicirt nämlich die gegebene und auf Null gebrachte Gleichung

II. $$L = 0$$

mit einer ganz unbestimmt gelassenen Funktion λ von x, addirt das Produkt λL (welches = Null ist) zu U, um

III. $$U = U + \lambda L$$

zu erhalten, und setzt dann in der Gleichung I.) für δV, überall $U + \lambda L$ statt U, so daß man also eigentlich $\delta V = \int_{b \div a} (\delta U + \lambda \cdot \delta L) \cdot dx$ genommen hat. Hernach denkt man sich λ so bestimmt, daß in I.) der Koefficient von δz der Null gleich wird, also

IV. $$\partial(U + \lambda L)_z - \partial(\partial(U + \lambda L)_{z_1}) + \cdots = 0.$$

Diese Gleichung ist aber in Bezug auf λ eine Differenzial-Gleichung, welche, wenn y und z bekannt wären, integrirt gedacht werden kann, so daß sie λ mit noch einer Anzahl willkührlicher Constanten liefert. Diese Constanten kann man sich nun weiter so bestimmt denken, daß auch von den übrigen, außerhalb des Integral-Zeichens liegenden Gliedern, alle mit δz_a, δz_b, $\partial \delta z_a$, $\partial \delta z_b$, etc. etc. behafteten Glieder herausfallen (d. h. man setzt ihre Koefficienten gerade zu der Null gleich und bedient sich dieser Gleichungen zur völligen Bestimmung von λ). Weil aber dann in δV nur noch das völlig willkührliche δy (und nicht mehr δz) vorkommt, so zerfällt $\delta V = 0$ jetzt noch in die allgemeine Gleichung

V. $$\partial(U + \lambda L)_y - \partial(\partial(U + \lambda L)_{y_1}) + \cdots = 0,$$

und in die Grenz-Gleichungen. Die Gleichungen IV., V. und II.) sind nun drei Differenzial-Gleichungen zwischen y, z und λ, welche, integrirt, diese Funktionen von x mit der eingehenden Anzahl willkührlicher Constanten liefern. Diese letztern bestimmen sich aber aus allen den übrigen Gleichungen, in denen statt x bereits die Grenz-Werthe a und b gesetzt worden sind.

Es ist leicht diese Methode auf zusammengesetztere Fälle anzuwenden, wo V außer y, z, auch noch u, v, etc. etc. enthält, und wo außer $L = 0$, auch noch $M = 0$, etc. etc.

gegeben ist. Man nimmt dann $U+\lambda L+\mu M+\cdots$ statt U, in dem Ausdrucke für δV.

Dasselbe Verfahren muß man natürlich auch anwenden, wenn in der Aufgabe $V_x = \int_{b_x \div a_x} U_x \cdot dx$ gedacht und dabei die übrigen hier vorstehenden Bedingungen gemacht seyn sollten, d. h. wenn die Grenzen a und b selbst nicht bestimmt gegeben, sondern noch so gesucht seyn sollten, daß eben gerade das Maximum oder Minimum eintreten kann.

Beispiel. In einer vertikalen Ebene sind zwei Punkte A und B gegeben (Fig. 26.). Man soll die Kurve der festen Bahn AMB finden, in welcher ein schwerer Punkt in der kürzesten Zeit von A nach B gelangt, unter der Voraussetzung, daß weder Reibung noch Widerstand der Luft noch sonst ein Hinderniß in Rechnung gebracht werden soll.

Es sey die Abscissen-Axe OX horizontal, OY vertikal; die Schwere $= g$; x und y seyen die Koordinaten eines Punktes M, z die Geschwindigkeit an M. Ferner seyen $OA_1 = AA_2 = a$, $OB_1 = BB_2 = b$ die Abscissen-Werthe der gegebenen Punkte A und B, so sind y_a und y_b die gegebenen Ordinaten-Werthe der Punkte A und B. Die Zeit, welche ein Minimum werden soll, bezeichne man durch V, so hat man nach den Gesetzen der Mechanik

$$V = \int_{b \div a} \frac{\sqrt{1+\partial y_x^2}}{z} \cdot dx,$$

während zwischen z und y noch die Gleichung statt findet

$$L = z \cdot \partial z_x + g \cdot \partial y_x = 0.$$

Man hat also dasmal

$$U = \frac{\sqrt{1+y_1^2}}{z}, \quad L = z \cdot z_1 + g \cdot y_1$$

$$\partial(U+\lambda L)_y = 0; \quad \partial(U+\lambda L)_z = -\frac{\sqrt{1+y_1^2}}{z^2} + \lambda \cdot z_1;$$

$$\partial(U+\lambda L)_{y_1} = \frac{y_1}{z\sqrt{1+y_1^2}} + g\lambda \quad \text{und} \quad \partial(U+\lambda L)_{z_1} = \lambda z,$$

Die Gleichungen IV.) und V.) werden daher jetzt, weil noch

$$\lambda z_1 - \partial(\lambda z) \quad \text{d. h.} \quad \lambda \cdot \partial z_x - \partial(\lambda z)_x = -z \cdot \partial\lambda$$

ist, die nachstehenden

$$-\frac{\sqrt{1+y_1^2}}{z^2} - z \cdot \partial\lambda = 0,$$

und

$$-\partial\left(\frac{y_1}{z\sqrt{1+y_1^2}} + g\lambda\right) = 0,$$

wo sich alle bloßen ∂ auf x beziehen.

Dies sind also dasmal die allgemeinen Gleichungen, aus denen in Verbindung mit der 2.) λ, y und z durch Integration und mit willkührlichen Constanten gefunden werden. —

Es vereinfachen sich aber die hier nöthigen Rechnungen sehr, wenn man gleich von vorne herein y als den unabhängigen Veränderlichen einführt, und $z^2 = u$ setzt, und u in der Rechnung fortführt. Es wird dann, wenn man die gegebenen Grenzen $OB_2 = \alpha$ und $OA_2 = \beta$ setzt,

1) $$V = \int_{\beta \div \alpha} \frac{\sqrt{1+\partial x_y{}^2}}{\sqrt{u}} \cdot dy$$

und

2) $$L = \partial u_y + 2g = 0.$$

Daraus folgt, weil ∂x_y durch x_1 und ∂u_y durch u_1 bezeichnet wird,

3) $$U = \frac{\sqrt{1+x_1{}^2}}{\sqrt{u}} \quad \text{und} \quad L = u_1 + 2g,$$

also

$$\partial(U+\lambda L)_x = 0; \quad \partial(U+\lambda L)_u = -\frac{\sqrt{1+x_1{}^2}}{2u\sqrt{u}};$$

$$\partial(U+\lambda L)_{x_1} = \frac{x_1}{\sqrt{u}\cdot\sqrt{1+x_1{}^2}} \quad \text{und} \quad \partial(U+\lambda L)_{u_1} = \lambda.$$

Die Gleichungen IV.) und V.) werden daher jetzt

4) $$-\frac{\sqrt{1+x_1{}^2}}{2u\cdot\sqrt{u}} - \partial\lambda = 0 \quad \text{d. h.} \quad \frac{\sqrt{1+\partial x_y{}^2}}{2u\cdot\sqrt{u}} + \partial\lambda_y = 0,$$

5) $$-\partial\left(\frac{x_1}{\sqrt{u}\cdot\sqrt{1+x_1{}^2}}\right) = 0 \quad \text{oder} \quad \partial\left(\frac{\partial x_y}{\sqrt{u}\cdot\sqrt{1+\partial x_y{}^2}}\right)_{(y)} = 0,$$

wo sich alle bloßen ∂ auf y beziehen.

Was die Grenz-Gleichungen betrifft, so sind solche nach der Rechnung des §. 82. N. 5.) jetzt folgende, nämlich

$$(\partial(U+\lambda L)_{u_1})_\beta \cdot \delta u_\beta = 0 \quad \text{und} \quad (\partial(U+\lambda L)_{u_1})_\alpha \cdot \delta u_\alpha = 0;$$

denn es sind δx_α und δx_β der Null gleich, weil x_α und x_β auch für alle die nächsten Nachbar-Kurven, mit denen die Gesuchte verglichen wird, dieselben Werthe behalten (in so fern alle Kurven durch dieselben Endpunkte A und B gehen sollen); also fallen die mit δx_α und δx_β behafteten Glieder von selbst heraus.

Diese Grenz-Gleichungen werden also jetzt

6) $\lambda_\beta \cdot \delta u_\beta = 0$ und 7) $\lambda_\alpha \cdot \delta u_\alpha = 0.$

Nun muß man die Gleichungen 2.), 4.) und 5.) integriren, d. h. λ und u eliminiren, um zuletzt eine Gleichung zwischen y und x und den Ableitungen von x nach y zu erhalten. Weil aber die Gleichungen 2.) und 5.) bereits λ nicht enthalten, so braucht man aus 2.) und 5.) bloß noch

u,

u, ∂u_y, etc. zu eliminiren. Zu dem Ende müßte man eigentlich jede der beiden Gleichungen 2.) und 5.) noch einmal nach allem y differenziiren, um vier Gleichungen zu haben, aus denen die drei Veränderlichen u, ∂u_y und $\partial^2 u_y$ eliminirt werden können. Allein, weil sich die 2.) und auch die 5.) nach allem y integriren lassen, so kann man hier vorziehen, sogleich zu integriren. Man erhält dann aus der 2.)

$$8) \qquad u = c - 2gy,$$

wo c eine willkührliche Constante ist. Aus der 5.) erhält man dagegen

$$9) \qquad \frac{\partial x_y}{\sqrt{u} \cdot \sqrt{1+\partial x_y{}^2}} = c',$$

wo c' eine zweite willkührliche Constante. Eliminirt man nun vollends u aus diesen letztern beiden Gleichungen, so ergiebt sich

$$10) \qquad \frac{\partial x_y{}^2}{(c-2gy)(1+\partial x_y{}^2)} = c'^2.$$

Löst man diese Gleichung jetzt nach ∂x_y algebraisch auf, so findet sich ∂x_y, und daraus dann

$$11) \qquad x = \int \left(\frac{c'^2(c-2gy)}{1-c'^2(c-2gy)} \right) \cdot dy + c'',$$

wo c'' die dritte willkührliche Constante ist. Dies ist die Gleichung einer Cykloide, deren Erzeugungs-Kreis $\frac{1}{2c'^2g}$ zum Durchmesser hat.

Hat man aber auf diese Weise x in y gefunden, so löst diese Gleichung 11.) in Verbindung mit der 8.), welche auch bereits u d. h. z^2 in y liefert, das Problem vollständig. Die drei Constanten c, c' und c'' bestimmen sich aus den Umständen, 1) daß für $y = \alpha$ $x = b$, und für $y = \beta$ $x = a$ werden muß, und endlich 2) daß für $y = \beta$ der Werth von z oder $\sqrt{u}$ in die gegebene Anfangs-Geschwindigkeit übergehen muß.

Die Grenz-Gleichungen 6.) und 7.) sind zum Theil von selbst erfüllt, (in so fern $\delta u_\beta = 0$ ist) oder dienen zur weiteren Bestimmung der Hülfs-Funktion λ, haben also dasmal auf die weitere Lösung des Problems keinen Einfluß mehr *).

Anmerkung. Hierher gehören auch die Aufgaben, in denen sogenannte „relative Maxima oder Minima" gesucht werden, d. h. in denen ein Integral V ein Maximum oder Minimum werden soll, unter allen V_x, für welche ein

*) Da sich übrigens in diesem Beispiele die Gleichung $L = 0$ sogleich integriren ließ; da man also hier sogleich u in y haben konnte, so hätte man die Lösung dieser Aufgabe einfacher noch nach einem der vorhergehenden Paragraphen behandelt.

anderer ähnlicher Integral-Ausdruck W constant bleiben soll; z. B. wenn unter allen Kurven von einerlei Inhalt, die des kleinsten Umfangs, — oder von allen Kurven, welche einerlei Umfang haben, die des größten Inhalts gesucht wird. — Man vgl. hiermit das Beispiel 4. zu §. 82.) und versuche, dasselbe auf dem gegenwärtigen Wege zu lösen, indem man dort $L = y - \partial z_x = 0$ hat.

Wir müssen hier aber diese Untersuchungen beschließen und hinsichtlich des Weiteren auf das „Syst. d. Math." Th. VII. Kap. XXI. und Anhang 2.) verweisen.

Diejenigen der hieher gehörigen Aufgaben aber, in denen V keine Ur-Funktion, sondern ein Integral, oder eine Funktion ist, in welcher ein Integral (oder mehrere Integrale) noch vorkommt(en), haben aber in der Geschichte der Mathematik den Namen der „isoperimetrischen Aufgaben" erhalten. — Ehe Lagrange (in dem dritten Bande der alten Turiner Memoiren) seinen „Calcul des Variations" mittheilte, konnte man solche Aufgaben nur sehr unvollständig lösen, da das früher von Euler angewandte Verfahren die Grenz-Gleichungen nicht lieferte.

IX.

Höhere Analyſis.

Fünfte Abtheilung.

Von den Differenz- und Summen-Reihen. Vom endlichen Differenziren und endlichen Integriren. Von der Interpolation und von der Summation der Reihen. Von den Fourier'ſchen Reihen.

Einleitung.

1) Man kann leicht die Bemerkung machen, daß wenn man von der Reihe der Quadrat-Zahlen

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, etc. etc.,

die Unterschiede je zweier nächst auf einander folgenden nimmt, diese Unterschiede

3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, etc. etc.

eine sogenannte arithmetische Reihe, und zwar die Reihe der ungeraden Zahlen bilden. Aus dieser Reihe der Differenzen (Differenz-Reihe) kann man sich also die Reihe der Quadrat-Zahlen leicht durch bloße Addition zusammensetzen, indem man von der ersten 1 ausgeht, dann aber die übrigen (4, 9, 16, etc.) dadurch berechnet, daß man zu jedem bereits berechneten Gliede, das eben so vielte Glied der Differenz-Reihe addirt.

2) Nimmt man die Reihe der Kubik-Zahlen

I. 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, etc. etc.,

so bilden die Unterschiede je zweier auf einander folgender dieser Zahlen die Differenz-Reihe

II. 7, 19, 37, 61, 91, 127, 169, etc. etc.

Diese Differenz-Reihe befolgt kein so einfaches Gesetz, wie dies bei den Differenzen der Quadrat-Zahlen der Fall gewesen ist; nimmt man aber von je zweien nächst auf einander folgenden ihrer Glieder abermals die Differenzen, so erhält man diese „zweite Differenz-Reihe"

III. 12, 18, 24, 30, 36, 42, etc. etc.

und diese bildet eine arithmetische Reihe mit der Differenz 6.

Verlängert man nun diese arithmetische Reihe III.) immer weiter und weiter, indem man zu jedem vorhergehenden Gliede noch 6 addirt, so kann man auch die vorhergehende „erste Differenz-Reihe" II.) immer weiter und weiter verlängern, indem man zu jedem Gliede derselben das eben so vielte Glied ihrer Differenz-Reihe (III.) addirt. Dann aber kann man auch die Reihe I.) der Kubik-Zahlen dadurch immer weiter und weiter verlängern, daß man zu jedem schon bekannten ihrer Glieder, das eben so vielte Glied ihrer Differenz-Reihe (II.) addirt. — Hätte man daher eine Tafel aller Kubik-Zahlen anzufertigen, etwa von 1 bis 10000, so könnte man auf diesem Wege die Glieder derselben bloß durch fortgesetzte Addition, d. h. durch

fortgesetzte Verlängerung der Reihen III. II. und I.) auf dem so eben beschriebenen Wege erhalten; ein Verfahren, welches dem Kubiren der einzelnen Zahlen, besonders wenn letztere anfangen groß zu werden, bei weitem vorzuziehen ist *). — Dazu kommt noch, daß man einzelne entfernte dieser Kubik-Zahlen direkt berechnen kann, also die bequemste Controlle der Rechnung hat.

3) Man hat ferner bemerkt, daß wenn man von der Reihe der Logarithmen

$log\,n,\ log(n+1),\ log(n+2),\ log(n+3),\ log(n+4),\ \ldots$

wiederum ihre Differenz-Reihe bildet, und von dieser abermals die Differenz-Reihe, endlich von dieser nochmals die Differenz-Reihe, dann die Glieder dieser dritten Differenz-Reihe eine längere Zeit fort sehr nahehin eine arithmetische Reihe bilden. Darauf hat man eine bequemere Berechnung der Logarithmen-Tafeln gegründet, indem man nach und nach die dritte, die zweite, die erste Differenz-Reihe durch fortgesetztes Addiren (wie solches für die Reihe der Kubik-Zahlen so eben beschrieben worden ist) nach Belieben verlängert, und zuletzt auf demselben Wege auch die Haupt-Reihe, d. h. die Reihe der Logarithmen der auf einander folgenden ganzen Zahlen verlängert. Dabei hat man bei den Logarithmen dadurch wieder eine Controlle der Rechnung, daß man die Logarithmen der zusammengesetzten Zahlen aus den Logarithmen ihrer Faktoren durch Addition noch einmal berechnen kann.

4) Die ähnliche Verfahrungs-Art kann man auch bei Berechnung von Sinus- und Kosinus-Tafeln anwenden, wie noch bei Berechnung vieler anderen Tabellen.

5) Es ist aber dazu nöthig, daß man eine nähere Kenntniß der Eigenthümlichkeiten der Ausdrücke, die tabellarisch berechnet werden sollen, in Bezug auf die Differenzen ihrer einzelnen Werthe besitze. Diese Kenntniß nun sollen die nächst folgenden Kapitel verschaffen.

---

*) Sind n und $n+1$ zwei nächst auf einander folgende ganze Zahlen, so sind ihre Würfel bezüglich n^3 und n^3+3n^2+3n+1; also ist der Unterschied dieser Würfel $=3n^2+3n+1$. Danach konnte man auch schon $(n+1)^3$ aus n^3 berechnen; allein die Rechnung erforderte doch noch ein Quadriren und Multipliciren, welches in der Ausführung sehr unangenehm und zeitraubend wird.

Eilftes Kapitel.

Von den allgemeinen Differenz- und Summen-Reihen, namentlich von dem Verhalten ihrer Glieder zu einander im Allgemeinen.

§. 85.

Erklärung der Differenz-Reihen.

Denkt man sich beliebig viel beliebiger Ziffern- oder Buchstaben-Ausdrücke, welche durch

$$\ldots, u_{r-2}, u_{r-1}, u_r, u_{r+1}, u_{r+2}, u_{r+3}, u_{r+4}, \ldots$$

bezeichnet seyn mögen, wo r eine beliebige positive oder negative ganze Zahl oder Null vorstellt, während sich links und rechts statt der Punkte noch unendlich viele, auf analoge Weise bezeichnete Glieder befinden sollen (welche aber auch zum Theil oder alle den Werth Null haben können); denkt man sich aus dieser Reihe von Gliedern, welche die Ur-Reihe genannt werden mag, neue Reihen von Gliedern gebildet, dadurch, daß man unter jedes Glied irgend einer Reihe, die Differenz zwischen dem nächstfolgenden und dem genannten Gliede derselben Reihe, als Glied der neuen Reihe setzt, so nennt man diese neuen Reihen bezüglich die erste, zweite, dritte, etc. etc. Differenz-Reihe.

Denkt man sich z. B. als Ur-Reihe die folgende,

$$\ldots, \quad 7, \quad 9, \quad 6, \quad 11, \quad 3, \quad -7, \quad 8, \quad 14, \quad -1, \quad -3, \ldots$$

so sind die Differenz-Reihen folgende

$$\text{Ite}, \ldots, \quad 2, \quad -3, \quad 5, \quad -8, \quad -10, \quad 15, \quad 6, \quad -15, \quad -2, \ldots$$

$$\text{IIte}, \ldots, \quad -5, \quad 8, \quad -13, \quad -2, \quad 25, \quad -9, \quad -21, \quad 13, \ldots$$

$$\text{IIIte}, \ldots, \quad 13, \quad -21, \quad 11, \quad 27, \quad -34, \quad -12, \quad 34, \ldots$$

u. s. w. f.

wo jedes Glied in jeder Reihe, z. B. —34 in der IIIten Reihe, erhalten worden, indem man das grade darüber stehende Glied (25) der nächst vorhergehenden Reihe von dem nächst folgenden (—9) derselben nächst vorhergehenden Reihe subtrahirte.

§. 86.

Bezeichnung der Glieder dieser Reihen.

Führt man die Zeichen Δu_s, $\Delta^2 u_s$, $\Delta^3 u_s$, ... $\Delta^p u_s$ ein, vermöge der Definitionen, daß für jede positive oder negative ganze Zahl oder auch die Null, welche unter s gedacht werden mag, allemal

1) $\Delta u_s = u_{s+1} - u_s$ oder $u_{s+1} = u_s + \Delta u_s$;
2) $\Delta^2 u_s = \Delta u_{s+1} - \Delta u_s$ oder $\Delta u_{s+1} = \Delta u_s + \Delta^2 u_s$;
3) $\Delta^3 u_s = \Delta^2 u_{s+1} - \Delta^2 u_s$ oder $\Delta^2 u_{s+1} = \Delta^2 u_s + \Delta^3 u_s$;

und allgemein

(♂)... $\Delta^{p+1} u_s = \Delta^p u_{s+1} - \Delta^p u_s$ oder $\Delta^p u_{s+1} = \Delta^p u_s + \Delta^{p+1} u_s$

seyn soll, so kann man im Allgemeinen die Ur-Reihe und ihre zugehörigen Differenz-Reihen in nachstehendem Schema übersehen:

Ur-Reihe ..., u_{r-2}, u_{r-1}, u_r, u_{r+1}, u_{r+2}, u_{r+3}, ...
1te D. R. ..., Δu_{r-2}, Δu_{r-1}, Δu_r, Δu_{r+1}, Δu_{r+2}, Δu_{r+3}, ...
2te D. R. ..., $\Delta^2 u_{r-2}$, $\Delta^2 u_{r-1}$, $\Delta^2 u_r$, $\Delta^2 u_{r+1}$, $\Delta^2 u_{r+2}$, $\Delta^2 u_{r+3}$, ...
3te D. R. ..., $\Delta^3 u_{r-2}$, $\Delta^3 u_{r-1}$, $\Delta^3 u_r$, $\Delta^3 u_{r+1}$, $\Delta^3 u_{r+2}$, $\Delta^3 u_{r+3}$, ...
u. s. w. f.,

wo jedes Glied in jeder Reihe die Differenz vorstellt, die erhalten wird, wenn man das gerade darüber stehende Glied, von dem nächstfolgenden Gliede dieser nächst vorhergehenden Reihe subtrahirt.

Dabei zeigen die Gleichungen (1. 2. 3. ♂.) an, wie die unter u_s stehenden Glieder Δu_s, $\Delta^2 u_s$, $\Delta^3 u_s$, etc. etc. erhalten werden, während s jedoch alle möglichen Werthe vorstellt, die solches haben kann, nämlich Null oder jede positive oder negative ganze Zahl. Jede dieser eben angeführten Gleichungen ist daher der Repräsentant von beliebig viel Gleichungen, welche alle aus ihr hervorgehen, wenn man dem s nach und nach beliebig viele seiner Werthe giebt.

§. 87.

Erklärung der Summen-Reihen.

Man kann sich auch das Schema des §. 86.) aufwärts erweitert denken, indem man über die Ur-Reihe und über einander, neue Reihen setzt, nach dem Gesetze gebildet, daß jede dieser Reihen, als die erste Differenz-Reihe der zunächst über ihr stehenden Reihe angesehen werden kann. Bezeichnet man die Glieder dieser Reihen dadurch, daß man den Gliedern der Ur-Reihe nach und nach Δ^{-1}, Δ^{-2}, Δ^{-3}, etc. etc. vorsetzt, und nennt man diese neuen Reihen bezüglich die $(-1)^{te}$, $(-2)^{te}$, $(-3)^{te}$, etc. etc. Differenz-Reihe oder auch bezüglich die erste, zweite, dritte, etc. etc. Summen-Reihe, so lassen sich diese Summen- und Differenz-Reihen in folgendem Schema übersehen, nämlich:

$(-3)^{te}$ D. R. $\cdots, \Delta^{-3}u_{r-2}, \Delta^{-3}u_{r-1}, \Delta^{-3}u, \Delta^{-3}u_{r+1}, \Delta^{-3}u_{r+2}, \cdots$
$(-2)^{te}$ D. R. $\cdots, \Delta^{-2}u_{r-2}, \Delta^{-2}u_{r-1}, \Delta^{-2}u_{r}, \Delta^{-2}u_{r+1}, \Delta^{-2}u_{r+2}, \cdots$
$(-1)^{te}$ D. R. $\cdots, \Delta^{-1}u_{r-2}, \Delta^{-1}u_{r-1}, \Delta^{-1}u_{r}, \Delta^{-1}u_{r+1}, \Delta^{-1}u_{r+2}, \cdots$
Ur-Reihe $\cdots, u_{r-2}, u_{r-1}, u_{r}, u_{r+1}, u_{r+2}, \cdots$
1te D. R. $\cdots, \Delta u_{r-2}, \Delta u_{r-1}, \Delta u_{r}, \Delta u_{r+1}, \Delta u_{r+2}, \cdots$
2te D. R. $\cdots, \Delta^{2}u_{r-2}, \Delta^{2}u_{r-1}, \Delta^{2}u_{r}, \Delta^{2}u_{r+1}, \Delta^{2}u_{r+2}, \cdots$
u. s. w. f.;

wo die Reihen alle aus einander nach dem Gesetze gebildet gedacht sind, daß jedes Glied in jeder Reihe z. B. das Glied $\Delta^{-2}u_{r+1}$ erhalten wird, wenn das gerade darüber stehende Glied $\Delta^{-3}u_{r+1}$ der nächst vorhergehenden Reihe von dem nächst folgenden Gliede $\Delta^{-3}u_{r+2}$ derselben nächst vorhergehenden Reihe subtrahirt, also wenn

$$\Delta^{-2}u_{r+1} = \Delta^{-3}u_{r+2} - \Delta^{-3}u_{r+1}$$

genommen wird.

Das Bildungs-Gesetz aller Glieder in allen diesen Reihen aus einander, spricht sich also einzig und allein in der Gleichung des §. 86.), nämlich in der Gleichung

$$(\sigma)\cdots \qquad \Delta^{p+1}u_s = \Delta^{p}u_{s+1} - \Delta^{p}u_s$$

oder $$\Delta^p u_{s+1} = \Delta^p u_s + \Delta^{p+1} u_{s+1}$$

oder $$\Delta^p u_s = \Delta^p u_{s+1} - \Delta^{p+1} u_s$$

aus, wenn man solche gelten läßt, während nicht bloß s, sondern auch p jede beliebige positive oder negative ganze Zahl bedeutet, oder auch die Null; sobald man nur noch festsetzt, daß man die Glieder der Ur-Reihe auch noch durch

$$\cdots \Delta^0 u_{r-2},\ \Delta^0 u_{r-1},\ \Delta^0 u_r,\ \Delta^0 u_{r+1},\ \Delta^0 u_{r+2},\ \cdots$$

vorstellen wolle, d. h. sobald man nur noch $\Delta^0 u_s$ für gleichbedeutend hält mit u_s selbst, und $\Delta^1 u_s$ für gleichbedeutend mit Δu_s.

§. 88.

Folgerungen.

Da jedes Glied in jeder Reihe, im Schema des §. 87.), die Differenz ist zwischen zweien Gliedern der nächst vorhergehenden Reihe, so folgt noch:

1) Sind die Glieder der Ur-Reihe gegeben, so sind die Glieder aller positiven Differenz-Reihen ebenfalls völlig bestimmt und gegeben; dagegen verlieren die Summen-Reihen (d. h. die negativen Differenz-Reihen) ihre Eigenschaft nicht, wenn alle Glieder einer und derselben Summen-Reihe um gleich viel vermehrt oder vermindert werden.

2) Irgend ein Glied einer jeden Summen-Reihe muß daher gegeben seyn, oder kann beliebig angenommen werden. Dann sind aber alle übrigen Glieder derselben Summen-Reihe durch die Gleichung ♂ des §. 87.), welche die Differenz zwischen je zwei auf einander folgenden Gliedern derselben Summen-Reihe angiebt, völlig bestimmt und gegeben.

3) Sollen daher die Glieder der q^{ten} Summen-Reihe

$$\cdots,\ \Delta^{-q} u_{r-2},\ \Delta^{-q} u_{r-1},\ \Delta^{-q} u_r,\ \Delta^{-q} u_{r+1},\ \cdots$$

völlig bestimmt seyn, sobald die Glieder der Ur-Reihe gegeben sind, so muß man von jeder der q Summen-Reihen ein Glied gegeben haben oder beliebig annehmen, so daß die q^{te} Sum-

men-Reihe, außer ihrer Haupt-Eigenschaft, noch einer Anzahl q von Nebenbedingungen genügen kann.

Es ist aber ganz einerlei, ob man von jeder der q Summen-Reihen ein Glied gegeben hat, oder beliebig annimmt; oder ob man q nächst auf einander folgende Glieder von der q^{ten} Summen-Reihe selbst gegeben hat, oder beliebig annimmt. — Denn die q Glieder der q^{ten} Summen-Reihe bestimmen $q-1$ Differenzen, also $q-1$ Glieder der $(q-1)^{ten}$ Summen-Reihe, folglich $q-2$ Glieder der $(q-2)^{ten}$ Summen-Reihe, u. s. w. f., zuletzt 1 Glied in der ersten Summen-Reihe, und lassen die Glieder der Ur-Reihe selbst ganz und völlig unbestimmt, so daß letztere völlig beliebig gegeben seyn können.

4) Sind daher die Glieder der Ur-Reihe gegeben, und noch q Glieder der q^{ten} Summen-Reihe ebenfalls gegeben oder beliebig angenommen, so sind die übrigen Glieder der q^{ten} Summen-Reihe, und deshalb auch alle Glieder aller niedrigern (der $q-1^{ten}$, $q-2^{ten}$, ... 3ten, 2ten, 1ten) Summen-Reihen völlig bestimmt und gegeben.

Die q Glieder der q^{ten} Summen-Reihe, welche mit den Gliedern der Ur-Reihe nicht zugleich gegeben sind, sondern welche entweder willkührlich angenommen oder so bestimmt werden können, daß diese q^{te} Summen-Reihe noch einer Anzahl q von Nebenbedingungen genügt, nennt man zuweilen auch „die in die q^{te} Summen-Reihe eingehenden q willkührlichen Constanten.

5) Obgleich die Gleichung des §. 87.), nämlich:

$$(♂)\cdots \qquad \Delta^{p+1}u_s = \Delta^p u_{s+1} - \Delta^p u_s$$

oder

$$\Delta^p u_{s+1} = \Delta^p u_s + \Delta^{p+1}u_s$$

oder

$$\Delta^p u_s = \Delta^p u_{s+1} - \Delta^{p+1}u_s,$$

die einzige Gleichung ist, welche man hat, um das Bildungs-Gesetz aller Glieder dieser Reihen im Schema des §. 87.) ganz und vollkommen ausgesprochen zu haben, so darf man doch nicht übersehen, daß diese Gleichung ♂.) der Repräsentant ist von un-

endlich (mal unendlich) vielen Gleichungen, welche alle aus ihr hervorgehen, indem man statt s alle positiven und alle negativen ganzen Zahlen oder Null setzt, — für jeden bestimmten Werth von s aber, auch statt p wieder nach und nach jede ganze positive, jede ganze negative Zahl und die Null gesetzt sich denkt.

Diese (unendlich mal) unendlich vielen einzelnen Gleichungen lassen sich aber nachher wieder mit einander verbinden zu neuen Gleichungen in beliebiger Menge.

So kann man unter einander schreiben die verschiedenen Glieder einer der Reihen, ausgedrückt in die Differenzen der Glieder der nächst vorhergehenden Reihe, nämlich:

$$\begin{aligned}
\Delta^{p+1}u_r &= \Delta^p u_{r+1} - \Delta^p u_r,\\
\Delta^{p+1}u_{r+1} &= \Delta^p u_{r+2} - \Delta^p u_{r+1},\\
\Delta^{p+1}u_{r+2} &= \Delta^p u_{r+3} - \Delta^p u_{r+2},\\
\Delta^{p+1}u_{r+3} &= \Delta^p u_{r+4} - \Delta^p u_{r+3},\\
&\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots\\
\Delta^{p+1}u_{r+n-1} &= \Delta^p u_{r+n} - \Delta^p u_{r+n-1}.
\end{aligned}$$

Dann kann man diese Gleichungen alle zu einander addiren, so daß man links die Summe von n Gliedern der einen Reihe erhält, während sich rechts alle Zwischen-Glieder aufheben, und nur die Differenz der, um n Glieder von einander entfernten Glieder der vorhergehenden Reihe erscheint, nämlich:

$$\Delta^{p+1}u_r + \Delta^{p+1}u_{r+1} + \Delta^{p+1}u_{r+2} + \cdots + \Delta^{p+1}u_{r+n-1} = \Delta^p u_{r+n} - \Delta^p u_r.$$

Diese Gleichung enthält folgende Wahrheit:

6) Im Schema des §. 87.) ist die Summe von n auf einander folgenden Gliedern einer jeden der Reihen, ausgedrückt durch ein einziges Glied der über ihr stehenden Reihe, welches dem, gerade über dem n^{ten} der summirten Glieder stehenden Gliede in der nächst vorhergehenden Reihe zunächst zur Rechten liegt, wenn man nur davon noch eine zu bestimmende Constante subtrahirt. Diese Constante ist aber dem Gliede derselben Reihe

gleich, welches gerade über dem ersten der summirten Glieder steht. — Man sieht auf diese Weise den Namen der Summen-Reihen, für die rückwärts gebildeten Reihen gerechtfertigt.

Anmerkung. Unsere nächste Aufgabe ist es aber, die für die Anwendung wichtigsten neuen Gleichungen, welche aus der Verbindung der aus

$$\Delta^{p+1}u_s = \Delta^p u_{s+1} - \Delta^p u_s$$

hervorgehenden (unendlich mal) unendlich vielen einzelnen Gleichungen sich ergeben, herzustellen. Um nun dieses auf die bequemste Weise zu bewerkstelligen, wollen wir zunächst einen auf unsere Bezeichnungsweise gegründeten einfachen Algorithmus dazu bemerklich machen.

§. 89.

Algorithmus zur einfachen und bequemen Bildung der Gleichungen zwischen den Gliedern der verschiedenen Reihen.

1) Betrachtet man irgend eine der Reihen im Schema des §. 87.) als eine Ur-Reihe, so sind alle unter ihr stehenden oder folgenden Reihen ihre (positiven) Differenz-Reihen, und alle über ihr stehenden oder vorhergehenden, ihre Summen-Reihen oder negativen Differenz-Reihen. — Betrachtet man namentlich die p^{te} Differenz-Reihe

$$\cdots, \Delta^p u_{r-2}, \quad \Delta^p u_{r-1}, \quad \Delta^p u_r, \quad \Delta^p u_{r+1}, \quad \Delta^p u_{r+2}, \cdots$$

als eine Ur-Reihe, so sind die $p \pm 1^{ten}$, $p \pm 2^{ten}$, $p \pm 3^{ten}$ u. s. w. f. Differenz-Reihen, zu gleicher Zeit auch bezüglich die $(\pm 1)^{te}$, $(\pm 2)^{te}$, $(\pm 3)^{te}$, etc. etc. Differenz-Reihe der p^{ten}, letztere als Ur-Reihe gedacht. — Und dies gilt, es mag p eine positive oder eine negative ganze Zahl seyn, oder auch Null.

2) Deshalb müssen alle Gleichungen zwischen den Gliedern einer Ur-Reihe und denen ihrer (positiven oder negativen) Differenz-Reihen, eben so statt finden, wenn man statt der Glieder der Ur-Reihe bezüglich die gleichnamigen*) Glieder ihrer

*) Gleichnamig nennen wir die Glieder in den verschiedenen Reihen des Schema des §. 87.) welche daselbst genau unter einander stehen; also in denen die u, Δu, etc. alle einerlei Zeiger (rechts unten) anzuhängen haben.

p^{ten} Differenz-Reihe (wo p eine beliebige positive oder negative ganze Zahl vorstellt), dagegen zu gleicher Zeit statt der Glieder der $(\pm 1)^{ten}$, $(\pm 2)^{ten}$, $(\pm 3)^{ten}$, etc. etc. Differenz-Reihe, bezüglich die gleichnamigen Glieder der $(p \pm 1)^{ten}$, $(p \pm 2)^{ten}$, $(p \pm 3)^{ten}$, etc. etc. Differenz-Reihe substituirt; d. h. wenn man jedes Glied in der Gleichung von der Form $\Delta^r u_s$ in $\Delta^{p+r} u_s$ umwandelt.

3) Also erhält man aus jeder zwischen den Gliedern der Ur-Reihe und ihren (positiven oder negativen) Differenz-Reihen gegebenen Gleichung, eine neue und wiederum richtige Gleichung, wenn man die erstere gleichsam mit Δ^p multiplicirt, wo p jede beliebige positive oder negative ganze Zahl oder auch die Null vorstellt, wenn man nur dann statt der Ausdrücke von der Form $\Delta^p \cdot \Delta^r u_s$ sogleich $\Delta^{p+r} u_s$ schreibt, d. h. wenn man nur Δ^p, Δ^r, etc. etc. als Potenzen behandelt, in denen die Zeiger p, r, etc. etc. als ihre Exponenten angesehen werden, zuletzt aber darauf sieht, daß man wiederum Glieder der Reihen (z. B. $\Delta^{p+r} u_s$) habe.

4) Aber eben so deutlich fällt in die Augen, daß man aus jeder, zwischen den Gliedern der Ur-Reihe und denen ihrer (positiven oder negativen) Differenz-Reihen gegebenen Gleichung, eine neue richtige Gleichung erhält, wenn man in der erstern Gleichung alle an den verschiedenen Gliedern rechts unten (an u, Δu, etc. etc.) stehenden Zeiger um gleich viel vermehrt oder vermindert; d. h. wenn man die erstere Gleichung gleichsam mit u_q multiplicirt (wo q jede beliebige positive oder negative ganze Zahl oder auch die Null vorstellt), sobald man nur zu gleicher Zeit die dadurch entstehenden Ausdrücke von der Form

$$u_q \cdot u_r, \quad \text{oder} \quad u_q \cdot \Delta^p u_r$$

augenblicklich in

$$u_{q+r}, \quad \text{oder} \quad \Delta^p u_{q+r}$$

umwandelt, also u_q, u_r, etc. etc. als Potenzen behandelt, deren Exponenten durch die Zeiger q, r, etc. etc. vorgestellt sind; zuletzt aber darauf sieht, daß man wiederum Glieder der Reihen habe.

Dieses Vermehren oder Vermindern aller Zeiger in einer solchen Gleichung um gleichviel, ist deshalb erlaubt, weil auch in allen den einfachen, aus der Gleichung ♂ des §. 87.) hervorgehenden Gleichungen, welche allein zur Bildung der gegebenen Gleichung beigetragen haben können, alle Zeiger um gleichviel vermehrt oder vermindert werden dürfen, in so fern in dieser angeführten Gleichung

$$\Delta^{p+1} u_s = \Delta^p u_{s+1} - \Delta^p u_s$$

der Zeiger s jeden möglichen Werth annehmen kann, welcher Null oder eine positive oder eine negative ganze Zahl ist.

§. 90.

Fortsetzung der Principien des hiesigen Algorithmus.

Aus diesen Grund-Prinzipien des von uns hier aufgesuchten Algorithmus geht aber sogleich noch weiter hervor:

1) Eine solche gegebene Gleichung zwischen Gliedern des Schema des §. 87.) kann mit $\Delta^\alpha u_a$ multiplicirt werden (wo α und a Null oder beliebige positive oder negative ganze Zahlen vorstellen), wenn man $\Delta^\alpha u_a$ als ein Produkt aus Δ^α und u_a ansieht, und alle Ausdrücke von der Form Δ^α. und Δ^r, oder u_a und u_s so lange als Potenzen behandelt (in denen die Zeiger α, r, oder a, s die Stelle der Exponenten vertreten), bis in den einzelnen Gliedern der neuen Gleichung wiederum die Zeichen gebildet sind, welche Glieder der, im Schema befindlichen Reihen vorstellen.

2) Eine solche Gleichung kann auch mit Ausdrücken von der Form

$$A \cdot \Delta^\alpha + B \cdot \Delta^\beta + C \cdot \Delta^\gamma + ... + P$$

oder $$A \cdot u_\alpha + B \cdot u_\beta + C \cdot u_\gamma + ... + P$$

oder $$A \cdot \Delta^\alpha u_a + B \cdot \Delta^\beta u_b + C \cdot \Delta^\gamma u_c + ... + P$$

multiplicirt werden; — wenn man nur dieselbe in 1.) beschriebene Vorsicht und Regel anwendet, so wird die neue Gleichung

auch allemal eine richtige Gleichung zwischen den Gliedern der Ur-Reihe und der (positiven oder negativen) Differenz-Reihen seyn. — Dabei können α, β, γ, etc., a, b, c, etc. etc. beliebige positive oder negative ganze Zahlen oder auch Null seyn, während A, B, C, etc. P ganz beliebige Koeffizienten vorstellen.

§. 91.

Anwendungen dieses Algorithmus.

Vermittelst dieses Algorithmus lassen sich nun sogleich folgende Gleichungen erhalten:

1) Geht man nämlich von

$$u_{r+1} = u_r + \Delta u_r = (1+\Delta)\cdot u_r$$

aus, und multiplicirt man solche und jede neu entstehende Gleichung fortwährend mit u_1, so erhält man

$$\begin{aligned} u_{r+2} &= (1+\Delta)\cdot u_{r+1} \\ u_{r+3} &= (1+\Delta)\cdot u_{r+2} \\ &\vdots \\ \text{und zuletzt} \quad u_{r+n} &= (1+\Delta)\cdot u_{r+n-1}. \end{aligned}$$

Eliminirt man nun aus diesen n Gleichungen die Glieder u_{r+1} bis u_{r+n-1} dadurch, daß man diese Gleichungen mit einander multiplicirt und rechts und links durch die gemeinschaftlichen Faktoren dividirt, so erhält man *)

I.

---

*) Man kann auch so verfahren: die Gleichung

$$(1+\Delta)u_r = u_{r+1}$$

multiplicire man nach §. 90. N. 2.) mit $1+\Delta$, so erhält man

$$(1+\Delta)^2 u_r = (1+\Delta)u_{r+1}.$$

Multiplicirt man aber dieselbe erstere Gleichung mit u_t, so ergiebt sich

$$(1+\Delta)\cdot u_{r+1} = u_{r+2}.$$

Daraus aber, wenn man die beiden letztern Gleichungen mit einander vergleicht, folgt

$$(1+\Delta)^2 u_r = u_{r+2}.$$

Multiplicirt man diese wieder mit $1+\Delta$, die vorhergehende mit u_t, und vergleicht beide, so ergiebt sich

$$(1+\Delta)^3 u_r = u_{r+3}.$$

u. s. w. f.

I. $\begin{cases} u_{r+n} = (1+\Delta)^n \cdot u_r = S[n_a \cdot \Delta^a u_r] \text{ *),} \\ \text{wo } a \text{ nach und nach 0 und jede positive ganze Zahl vorstellt, d. h.} \\ u_{r+n} = u_r + n \cdot \Delta u_r + n_2 \cdot \Delta^2 u_r + n_3 \cdot \Delta^3 u_r + \cdots + n_n \cdot \Delta^n u_r; \end{cases}$

wo n eine positive ganze Zahl bedeutet, während r jede positive, oder jede negative ganze Zahl seyn kann oder auch Null. Die Zeichen $n_1, n_2, n_3, n_4, \cdots n_a, \cdots$ sind dabei, wie sich von selbst versteht, Binomial-Koefficienten, so daß z. B. n_4 den Quotienten $\frac{n^{4\underline{1}-1}}{4!}$ d. h. $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$ vorstellt.

2) Geht man aber von derselben Gleichung aus wie in 1.), schreibt man dieselbe aber in dieser andern Form

$$\Delta u_r = u_{r+1} - u_r = (u_1 - 1) \cdot u_r,$$

und multiplicirt man diese Gleichung fortwährend mit Δ, so erhält man nach und nach die Gleichungen

$$\begin{aligned} \Delta^2 u_r &= (u_1 - 1) \cdot \Delta u_r \\ \Delta^3 u_r &= (u_1 - 1) \cdot \Delta^2 u_r \\ &\vdots \end{aligned}$$

und zuletzt $\Delta^n u_r = (u_1 - 1) \cdot \Delta^{n-1} u_r$.

Multiplicirt man nun alle diese n Gleichungen mit einander, um durch Division der gemeinschaftlichen Faktoren links und rechts Δu_r, $\Delta^2 u_r$, $\cdots$ $\Delta^{n-1} u_r$ zu eliminiren, so erhält man zuletzt **)

---

*) Der binomische Lehrsatz §. 38. d. I. Bds. läßt sich nämlich so schreiben:

$$(1+b)^n = S[n_a \cdot b^a]$$

wenn unter n_a verstanden wird $\frac{n^{a\underline{1}-1}}{a!}$ oder $\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-a+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots a}$, wenn statt a nach und nach gesetzt wird Null, und alle positiven ganzen Zahlen, und wenn das vorgesetzte S ausdrückt, daß die Summe aller der für diese verschiedenen Werthe von a hervorgehenden Glieder genommen werden soll.

**) Auch hier könnte man wieder so verfahren: die erstere Gleichung

$$\Delta u_r = (u_1 - 1) u_r$$

II. $$\begin{cases} \Delta^n u_r = (u_1 - 1)^n \cdot u_r = S[(-1)^a \cdot n_a \cdot u_{r+n-a}], \\ \text{wo } a \text{ nach und nach } 0 \text{ und alle positiven ganzen Zahlen vorstellt; d. h.} \\ \Delta^n u_r = u_{r+n} - n_1 \cdot u_{r+n-1} + n_2 \cdot u_{r+n-2} - \cdots \pm n_n \cdot u_r, \end{cases}$$

wo alle Zeichen dieselbe Bedeutung wie in N. 1.) haben.

3) Geht man endlich noch einmal von derselben Gleichung aus, wie in 1.), schreibt man dieselbe aber jetzt in dieser dritten noch möglichen Form, nämlich

$$u_{r-1} = u_r - \Delta u_{r-1} = u_r \cdot (1 - \Delta u_{-1}),$$

indem man zugleich $r-1$ statt r gesetzt hat, so hat man noch

$$\begin{aligned} u_{r-2} &= u_{r-1} \cdot (1 - \Delta u_{-1}) \\ u_{r-3} &= u_{r-2} \cdot (1 - \Delta u_{-1}) \\ &\vdots \\ u_{r-n} &= u_{r-(n-1)} \cdot (1 - \Delta u_{-1}). \end{aligned}$$

Multiplicirt man nun alle diese Gleichungen mit einander, und dividirt man links und rechts durch die gemeinschaftlichen Faktoren wieder weg, so ergiebt sich noch:

III. $$\begin{cases} u_{r-n} = (1 - \Delta u_{-1})^n \cdot u_r = S[(-1)^a \cdot n_a \cdot \Delta^a u_{r-a}], \\ \text{d. h.} \\ u_{r-n} = u_r - n_1 \cdot \Delta u_{r-1} + n_2 \cdot \Delta^2 u_{r-2} - n_3 \cdot \Delta^3 u_{r-3} + \cdots \\ \qquad \mp n_{n-1} \cdot \Delta^{n-1} u_{r-(n-1)} \mp n_n \cdot \Delta^n u_{r-n}. \end{cases}$$

Dies sind also die drei zusammengesetztern Relationen, zu denen man unmittelbar gelangt, wenn man von jeder der drei Formen der Gleichung §. 87. ♂.) ausgeht.

---

multiplicire man zuerst mit Δ, dann mit $u_1 - 1$; und man erhält

$$\Delta^2 u_r = (u_1 - 1) \cdot \Delta u_r;$$

$$(u_1 - 1)\Delta u_r = (u_1 - 1)^2 \cdot u_r.$$

Folglich, wenn man diese beiden Gleichungen mit einander vergleicht, zeigt sich

$$\Delta^2 u_r = (u_1 - 1)^2 \cdot u_r.$$

Wird nun diese Gleichung wiederum mit Δ, die vorhergehende Gleichung aber mit $u_1 - 1$ multiplicirt, und werden die Resultate gerade so verglichen, so ergiebt sich sogleich

$$\Delta^3 u_r = (u_1 - 1)^3 \cdot u_r;$$

u. s. w. f.

4) Multiplicirt man die I.) noch mit Δ^p, so findet sich noch

I. 1.) $$\Delta^p u_{r+n} = (1+\Delta)^n \cdot \Delta^p u_r = S[n_a \cdot \Delta^{p+a} u_r]$$
$$= \Delta^p u_r + n_1 \cdot \Delta^{p+1} u_r + n_2 \cdot \Delta^{p+2} u_r + \cdots + n_n \cdot \Delta^{p+n} u_r.$$

Multiplicirt man aber die II.) noch mit Δ^p, so findet sich

II. 1.) $$\Delta^{p+n} u_r = (u_1 - 1)^n \cdot \Delta^p u_r = S[(-1)^a \cdot n_a \cdot \Delta^p u_{r+n-a}]$$
$$= \Delta^p u_{r+n} - n_1 \cdot \Delta^p u_{r+n-1} + n_2 \cdot \Delta^p u_{r+n-2} - \cdots \pm n_n \cdot \Delta^p u_r.$$

Multiplicirt man endlich die III.) ebenfalls noch mit Δ^p, so findet sich

III. 1.) $$\Delta^p u_{r-n} = (1 - \Delta u_{-1})^n \cdot \Delta^p u_r = S[(-1)^a \cdot n_a \cdot \Delta^{p+a} u_{r-a}]$$
$$= \Delta^p u_r - n_1 \cdot \Delta^{p+1} u_{r-1} + n_2 \cdot \Delta^{p+2} u_{r-2} - \cdots \pm n_n \cdot \Delta^{p+n} u_{r-n}.$$

5) Die Gleichungen I. und I. 1.) drücken das $(r+n)^{te}$ Glied irgend einer der Reihen, in die r^{ten} Glieder derselben Reihe und ihrer n nächsten positiven Differenz-Reihen aus *); also auch das $(n+1)^{te}$ Glied irgend einer Reihe, in das erste Glied derselben Reihe und in die ersten Glieder ihrer n nächsten Differenz-Reihen.

Die Gleichungen III. und III. 1.) dagegen drücken das $(r-n)^{te}$ Glied irgend einer Reihe in das r^{te} Glied derselben Reihe und in die nach und nach immer mehr zurückliegenden Glieder ihrer nächsten n Differenz-Reihen aus.

Die Gleichungen II. und II. 1.) endlich drücken das r^{te} Glied irgend einer n^{ten} Differenz-Reihe, in $n+1$ nächst auf einander folgende Glieder ihrer n^{ten} Summen-Reihe (letztere

*) Der Bequemlichkeit wegen verstehen wir hier unter dem r^{ten} Gliede dasjenige, welches den Zeiger r hat, also u_r, Δu_r, $\Delta^2 u_r$, etc. etc. Unter dem $(r+n)^{ten}$ Gliede verstehen wir daher in den verschiedenen Reihen die Glieder, welche den Zeiger $r+n$ haben, also die Glieder u_{r+n}, Δu_{r+n}, $\Delta^2 u_{r+n}$, etc. etc.

als Ur-Reihe gedacht) aus, vom r^{ten} ab bis zum $(r+n)^{ten}$ Gliede hin. Sie drücken also auch das erste Glied irgend einer n^{ten} Differenz-Reihe in die $n+1$ ersten Glieder ihrer n^{ten} Summen-Reihe (letztere als Ur-Reihe gedacht) aus.

6) Dieses alles gilt aber nur, so lange n eine positive ganze Zahl ist, während r und p jede positive und jede negative ganze Zahl vorstellen können und auch die Null.

Um ähnliche Resultate auch für ein negatives ganzes n zu erhalten, verfährt man wie der nächste Paragraph zeigt.

§. 92.

Da man nach §§. 89. und 90.) eine Gleichung zwischen den Gliedern einer Ur-Reihe und ihren (positiven oder negativen) Differenz-Reihen, auch mit $(1-\Delta u_{-1})^{-n}$, $(u_1-1)^{-n}$ oder mit $(1+\Delta)^{-n}$ multipliciren kann, wenn man nur

unter $(1-\Delta u_{-1})^{-n}$ die Reihe

$$1-n\cdot\Delta u_{-1}+(n+1)_2\cdot\Delta^2 u_{-2}-(n+2)_3\cdot\Delta^3 u_{-3}+\cdots \text{ in inf.},$$

unter $(u_1-1)^{-n}$ die Reihe

$$u_{-n}+n_1\cdot u_{-n-1}+(n+1)_2\cdot u_{-n-2}+(n+2)_3\cdot u_{-n-3}+\cdots \text{ in inf.},$$

und unter $(1+\Delta)^{-n}$ die Reihe

$$1-n\cdot\Delta+(n+1)_2\cdot\Delta^2-(n+2)_3\cdot\Delta^3+(n+3)_4\cdot\Delta^4-\cdots \text{ in inf.},$$

versteht, welche der binomische Lehrsatz dafür liefert, so kann man auf diesem Wege aus den Formeln des §. 91. I. und II.) noch leicht folgende Formeln ableiten:

A. Nimmt man die Gleichung I.), nämlich:

1) $$u_{r+n} = (1+\Delta)^n\cdot u_r,$$

und multiplicirt man solche mit der unendlichen Reihe von Gliedern, die durch $(1+\Delta)^{-n}$ ausgedrückt sind, so erhält man sogleich

2) $$(1+\Delta)^{-n}\cdot u_{r+n} = u_r,$$

oder, wenn man mit u_{-n} multiplicirt,

$$\text{IV.}\begin{cases} u_{r-n} = (1+\Delta)^{-n}u_r = S[(-1)^a(n+a-1)_a\cdot\Delta^a u_r], \\ \text{d. h.} \\ u_{r-n} = u_r - n_1\cdot\Delta u_r + (n+1)_2\cdot\Delta^2 u_r - (n+2)_3\cdot\Delta^3 u_r \\ \qquad + (n+3)_4\cdot\Delta^4 u_r - \cdots \text{ in inf.}, \end{cases}$$

wodurch das $(r-n)^{te}$ Glied irgend einer Reihe in das r^{te} Glied derselben Reihe und in die r^{ten} Glieder aller ihrer Differenz-Reihen, bis in's Unendliche fort, ausgedrückt zu seyn scheint.

B. Nimmt man die Gleichung II.), nämlich

1) $$\Delta^n u_r = u_r\cdot(u_1-1)^n,$$

und multiplicirt man solche mit der unendlichen Reihe von Gliedern, die durch $(u_1-1)^{-n}$ ausgedrückt ist, so erhält man

2) $$(u_1-1)^{-n}\cdot\Delta^n u_r = u_r;$$

oder, wenn man diese Gleichung noch mit Δ^{-n} multiplicirt,

$$\text{V.}\begin{cases} \Delta^{-n}u_r = u_r\cdot(u_1-1)^{-n} = S[(n+a-1)_a\cdot u_{r-n-a}], \\ \text{d. h.} \\ \Delta^{-n}u_r = u_{r-n} + n_1\cdot u_{r-n-1} + (n+1)_2\cdot u_{r-n-2} \\ \qquad + (n+2)_3\cdot u_{r-n-3} + \cdots \text{ in inf.}, \end{cases}$$

wodurch das r^{te} Glied der n^{ten} Summen-Reihe in unendlich viele Glieder der Ur-Reihe, vom $r-n^{ten}$ Gliede rückwärts gehend, ausgedrückt zu seyn scheint.

C. Multiplicirt man endlich die Gleichung III.), nämlich

1) $$u_{r-n} = (1-\Delta u_{-1})^n\cdot u_r,$$

mit $(1-\Delta u_{-1})^{-n}$, so erhält man

2) $$(1-\Delta u_{-1})^{-n}\cdot u_{r-n} = u_r,$$

oder, wenn man diese Gleichung noch mit u_n multiplicirt,

$$\text{VI.}\begin{cases} u_{r+n} = (1-\Delta u_{-1})^{-n}\cdot u_r = S[(n+a-1)_a\cdot\Delta^a u_{r-a}] \\ \text{d. h.} \\ u_{r+n} = u_r + n_1\cdot\Delta u_{r-1} + (n+1)_2\cdot\Delta^2 u_{r-3} \\ \qquad + (n+2)_3\cdot\Delta^3 u_{r-3} + \cdots \text{ in inf.}, \end{cases}$$

wodurch das $(r+n)^{te}$ Glied irgend einer Reihe in unendlich viele Glieder der Differenz-Reihen, unendlich weit rückwärts gehend, ausgedrückt zu seyn scheint.

D. Multiplicirt man aber diese hiesigen Gleichungen IV., V., VI.) noch mit Δ^p, wo p eine positive oder negative ganze Zahl oder Null bedeutet, während n immer eine ganze positive Zahl ist, so erhält man noch

IV. 1.) $\Delta^p u_{r-n} = (1+\Delta)^{-n} \cdot \Delta^p u_r$,

V. 1.) $\Delta^{p-n} u_r = (u_1 - 1)^{-n} \cdot \Delta^p u_r$.

VI. 1.) $\Delta^p u_{r+n} = (1 - \Delta u_{-1})^{-n} \cdot \Delta^p u_r$,

wo n positiv ist, wo p dagegen beliebig positiv oder negativ gedacht werden kann, wenn man nur rechts die angezeigte Entwickelung nach dem binomischen Lehrsatze, und die angezeigte Multiplikation in dem Sinne ausführt, daß man zuletzt lauter Glieder der hier betrachteten Reihen hat.

E. Man wolle aber nicht übersehen, daß diese Formeln IV.—VI.), rechts unendlich viele Glieder enthalten, daher nur dann anwendbar sind, wenn diese Glieder zuletzt der Null gleich, oder doch unendlich klein werden. In allen übrigen Fällen muß man das Ergänzungs-Glied bestimmen, welches noch hinzutreten muß, wenn man diese Reihen rechts bei irgend einem Gliede abbricht. — Namentlich sind die Formeln V.) und V. 1.), ohne Ergänzungs-Glied genommen, allemal illusorisch.

So einfach aber die Bestimmung dieser Ergänzungs-Glieder vor sich gehen kann, so müssen wir es doch einem der noch nicht erschienenen Theile des „Systems d. Math." überlassen, diese weiteren Untersuchungen nachzuliefern, welches um so nothwendiger erscheint, als diese Ergänzungs-Glieder nach unserem Wissen bis jetzt noch von Niemanden gegeben worden sind.

Anmerkung. Daß man die vorstehenden Gleichungen auch noch mit Δ^p oder u_q multipliciren könne, versteht sich von selbst. Multiplicirt man die VI.) mit $\Delta^n u_{-n}$, so erhält man die Formel auf pag. 56. des Lacroix Traité etc. etc. T. III.). Soll sie aber allgemeine Gültigkeit haben, so muß noch das Ergänzungs-Glied hinzukommen, im Falle die Reihe rechts abgebrochen wird.

§. 93.

Anwendungen auf arithmetische Reihen der höhern Ordnung.

So oft die Glieder der m^{ten} Differenz-Reihe alle einander gleich werden, so nennt man die Ur-Reihe eine arithmetische Reihe der m^{ten} Ordnung. Die arithmetische Reihe

$$\cdots,\ a+(r-2)d,\ a+(r-1)d,\ a+rd,\ a+(r+1)d,\ \cdots$$

deren erste Differenz-Reihe bereits lauter gleiche Glieder

$$d,\quad d,\quad d.\quad d,\ \cdots$$

hat, ist danach eine arithmetische Reihe der ersten Ordnung*).

Ist also die Ur-Reihe eine arithmetische Reihe der m^{ten} Ordnung, so kann man die Gleichung I.) des §. 91.) bloß so schreiben

$$(\odot)\cdots\quad u_{r+n} = u_r + n_1\cdot\Delta u_r + n_2\cdot\Delta^2 u_r + \cdots + n_m\cdot\Delta^m u_r,$$

so daß die Gleichung auf der rechten Seite des (=) Zeichens immer nur $m+1$ Glieder hat, wie groß auch der Abstand n der Glieder u_r und u_{r+n} von einander seyn mag. Und diese Gleichung ⊙.), welche für eine arithmetische Reihe der m^{ten} Ordnung gilt, kann auch in derselben Form beibehalten werden, wenn $n<m$ seyn sollte, weil die Binomial-Koeffizienten $n_{n+1},\ n_{n+2},\ \cdots\ n_m$ dann alle der Null gleich werden, die Glieder also, welche die Form ⊙.) jetzt zuviel hat, doch in der That wieder wegfallen.

Die Gleichung ⊙.) kann auch so geschrieben werden

$$(\mathbb{C})\cdots\quad u_{r+n} - u_r = n_1\cdot\Delta u_r + n_2\cdot\Delta^2 u_r + n_3\cdot\Delta^3 u_r + \cdots + n_m\cdot\Delta^m u_r;$$

und diese Gleichung giebt den Unterschied zwischen dem $r+n^{ten}$ Gliede und dem r^{ten} Gliede der Ur-Reihe in die r^{ten} Glieder ihrer Differenz-Reihen ausgedrückt.

---

*) Ein Beispiel einer arithmetischen Reihe der zweiten Ordnung sieht man in der Reihe der Quadratzahlen. Die Reihe der Kubikzahlen dagegen bildet eine arithmetische Reihe der dritten Ordnung.

Die erste Summen-Reihe einer arithmetischen Reihe der m^{ten} Ordnung ist offenbar eine arithmetische Reihe der $(m+1)^{ten}$ Ordnung, weil, wenn man sie als Ur-Reihe nimmt, die vorige arithmetische Reihe der m^{ten} Ordnung ihre erste Differenz-Reihe ist, also ihre $(m+1)^{te}$ Differenz-Reihe erst die gleichen (constanten) Glieder enthält. Man erhält daher für sie nach derselben Formel ⊙.) oder ☾.)

$$(♀)\cdots\quad \Delta^{-1}u_{r+n}-\Delta^{-1}u_r = n_1\cdot u_r + n_2\cdot \Delta u_r + n_3\cdot \Delta^2 u_r + \cdots + n_{m+1}\cdot \Delta^m u_r.$$

Weil aber diese Differenz $\Delta^{-1}u_{r+n}-\Delta^{-1}u_r$ zwischen diesen Gliedern der ersten Summen-Reihe nach §. 88. N. 6.) allemal die Summe der n Glieder

$$u_r + u_{r+1} + u_{r+2} + \cdots + u_{r+n-1}$$

der Ur-Reihe ist, so sieht man also in ♀.) zur Rechten die Summe von n auf einander folgenden Gliedern der arithmetischen Reihe der m^{ten} Ordnung gefunden und ausgedrückt durch eine Summe von nur $m+1$ Gliedern, wie groß auch übrigens die Anzahl n der summirten Glieder seyn mag.

Diesen Ausdruck in ♀.) zur Rechten des (=) Zeichens nennt man daher das summatorische Glied der arithmetischen Reihe der m^{ten} Ordnung *), während die Reihe zur Rechten in ⊙.) das allgemeine Glied der Reihe heißt.

Beispiel 1. Nehmen wir die Reihe der Quadrat-Zahlen

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36,\ 49,\ \cdots$$

so ist, wenn man selbige mit

$$u_r,\ u_{r+1},\ u_{r+2},\ \text{etc. etc.}$$

vergleicht, $u_r = 1$, $\Delta u_r = 3$ und $\Delta^2 u_r = 2$, $\Delta^3 u_r = \Delta^4 u_r = \text{etc. etc.} = 0$. Folglich ist die Summe der n ersten Quadrat-Zahlen

$$= n_1\cdot 1 + n_2\cdot 3 + n_3\cdot 2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1\cdot 2\cdot 3}.$$

---

*) Die im §. 33. d. I. Bds.) definirten figurirten Reihen gehören, ihrer Definition zu Folge, zu den arithmetischen Reihen höherer Ordnungen. Die dort gefundenen n^{ten} Glieder, und Summe einer Anzahl n von Gliedern ergeben sich daher aus den hiesigen Formeln ⊙.) und ♀.) unmittelbar. — Eben so die Summe von n Quadratzahlen, von n Kubikzahlen; u. so w. f.

Beispiel 2. Vergleicht man die Reihe der Kubikzahlen

1, 8, 27, 64, 125, etc. etc.

mit u_r, u_{r+1}, u_{r+2}, etc. etc.,

so ist $u_r = 1$, $\Delta u_r = 7$, $\Delta^2 u_r = 12$, $\Delta^3 u_r = 6$, $\Delta^4 u_r = \Delta^5 u_r$ = etc. etc. = 0. — Folglich ist die Summe der n ersten Kubikzahlen

$$= n_1 + 7 \cdot n_2 + 12 \cdot n_3 + 6 \cdot n_4 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2,$$

folglich immer eine Quadratzahl.

Anmerkung. Ist die gegebene Ur-Reihe zwar keine arithmetische einer höhern Ordnung, so daß in keiner der Differenz-Reihen die Glieder alle einander gleich werden; werden aber in z. B. der m^{ten} Differenz-Reihe die q Glieder

$$\Delta^m u_r, \quad \Delta^m u_{r+1}, \quad \Delta^m u_{r+2}, \quad \cdots \quad \Delta^m u_{r+q-1}$$

sehr wenig von einander verschieden, so daß dann die r^{ten} Glieder der q nächstfolgenden Differenz-Reihen, also die Glieder

$$\Delta^{m+1} u_r, \quad \Delta^{m+2} u_r, \quad \Delta^{m+3} u_r, \quad \text{bis zu} \quad \Delta^{m+q} u_r \quad \text{hin,}$$

nahe hin der Null gleich werden, so kann man die Formel §. 93. ⊙.) und dann auch die Formel §. 93. Q.) näherungsweise gelten lassen, so lange n nicht größer als m+q ist.

So wie aber $n > m+q$ wird, so dürfen die Glieder $n_{m+q+1} \cdot \Delta^{m+q+1} u_r$, $n_{m+q+2} \cdot \Delta^{m+q+2} u_r$, ... welche dann noch zur Rechten dieser Formeln hinzukommen müßten, in so fern $\Delta^{m+p+1} u_r$, $\Delta^{m+q+2} u_r$, etc. etc. wieder bedeutender werden können, nicht ohne weiteres weggelassen werden.

So bilden z. B. die Glieder

$$log\, r, \quad log(r+1), \quad log(r+2), \quad \cdots \quad log(r+q)$$

wenn r sehr groß ist, und q nicht zu groß genommen wird (wie später erwiesen werden soll) eine solche Reihe, für welche in diesem Umfange die 3ten oder doch die 4ten Differenz-Reihen schon Glieder enthalten, die ziemlich nahe Null sind. — Man kann sich daher der vorstehenden Gleichung §. 93. ⊙.) bedienen, um die einzelnen Glieder $log(r+1)$, $log(r+2)$, $log(r+3)$, ... $log(r+n)$ auseinander und aus den durch sie gebildeten r^{ten} Gliedern ihrer Differenz-Reihen näherungsweise zu berechnen.

§. 94 *).

Denkt man sich abermals eine beliebige Reihe beliebiger Glieder als Ur-Reihe, solche Glieder aber durch die Zeichen

$$\cdots\ u_{r-2m},\ u_{r-m},\ u_r,\ u_{r+m},\ u_{r+2m},\ u_{r+3m},\ \cdots$$

bezeichnet, wo m eine bloße Type ist, daher alles vorstellen kann; bildet man sich wieder die positiven und die negativen Differenz-Reihen, bezeichnet aber die Glieder derselben analog durch

$$\cdots\ \Delta u_{r-2m},\ \Delta u_{r-m},\ \Delta u_r,\ \Delta u_{r+m},\ \Delta u_{r+2m},\ \cdots$$
$$\cdots\ \Delta^2 u_{r-2m},\ \Delta^2 u_{r-m},\ \Delta^2 u_r,\ \Delta^2 u_{r+m},\ \Delta^2 u_{r+2m},\ \cdots$$

u. s. w. f., so finden sich bald aus dem Bildungsgesetz der Glieder in der jetzigen Form, nämlich aus

$$\Delta^{p+1} u_{r+sm} = \Delta^p u_{r+(s+1)m} - \Delta^p u_{r+sm},$$

die Formeln der §§. 91. und 92.), wie sich solche in der jetzigen Form gestalten müssen, nämlich

I. $u_{r+nm} = (1+\Delta)^n \cdot u_r = S[n_a \cdot \Delta^a u_r]$;

II. $\Delta^n u_r = (u_m - 1)^n \cdot u_r = S[(-1)^a \cdot n_a \cdot u_{r+(n-a)m}]$;

III. $u_{r-nm} = (1 - \Delta u_{-m})^n \cdot u_r = S[(-1)^a \cdot n_a \cdot \Delta^a u_{r-am}]$,

wo statt a nach und nach 0, 1, 2, 3, 4, und alle positiven ganzen Zahlen gesetzt werden, während das Zeichen S die Summe aller der dadurch entstehenden Glieder ausdrückt. Ferner noch

IV. $u_{r-nm} = (1+\Delta)^{-n} \cdot u_r$;

V. $\Delta^{-n} u_r = (u_m - 1)^{-n} \cdot u_r$;

VI. $u_{r+nm} = (1 - \Delta u_{-m})^{-n} \cdot u_r$;

wenn man nur nicht vergißt, daß in den drei letztern Formeln, sobald die Ausdrücke zur Rechten bei irgend einem $\mu+1^{\text{ten}}$ Gliede abgebrochen werden, noch Ergänzungsglieder hinzutreten müssen, welche jedesmal, auch in der jetzigen Bezeichnung, leicht ausgedrückt werden können.

---

*) Das in diesem Kapitel nun folgende kann der Anfänger bei'm ersten Lesen überschlagen.

Dabei darf man aber ja nicht übersehen, daß dies genau dieselben Relationen zwischen den Gliedern einer Ur-Reihe und deren positiven und negativen Differenz-Reihen sind, wie solche in den §§. 91. und 92.) bereits hingestellt sich finden; — daß hier bloß dieselben Glieder ein klein wenig anders bezeichnet worden sind, und daß deshalb auch dieselben Relationen in etwas anderer Form ausgedrückt erscheinen.

Setzt man 1 statt m, so tritt die neue Bezeichnung in die alte zurück, und man erhält auch sogleich wieder dieselben Formen der Relationen, wie solche vorher gefunden worden sind.

Wollen wir aber in irgend einem Falle die Glieder der Differenz-Reihen in diesem zweiten Schema mit denen in dem erstern Schema der §§. 86. 87.) in Vergleichung setzen, so werden wir die des hiesigen zweiten Schema dadurch von jenen unterscheiden, daß wir hier Δ' statt Δ schreiben, das bloße Δ aber für jene aufsparen.

§. 95.

Man denke sich wieder eine beliebige Reihe beliebiger Glieder als Ur-Reihe und durch

$$\cdots\ u_{r-2},\quad u_{r-1},\quad u_r,\quad u_{r+1},\quad u_{r+2},\ \cdots$$

so wie die Glieder ihrer Differenz-Reihen auf die in den §§. 86. 87.) angegebene Weise bezeichnet; und man hebe nun aus dieser Reihe von Gliedern die durch

$$\cdots\ u_{r-m},\quad u_r,\quad u_{r+m},\quad u_{r+2m},\ \cdots$$

bezeichneten heraus, wo m irgend eine positive ganze Zahl vorstellen mag; man denke sich diese Glieder als neue Ur-Reihe, zu welcher nun die positiven und negativen Differenz-Reihen gebildet, und deren Glieder nach §. 94.) bezeichnet werden, aber Δ' statt Δ gesetzt.

Dies vorausgesetzt, so hat man nach §. 94. II.)

1) $\Delta^m u_r = (u_m - 1)^n \cdot u_r = S[n_b \cdot (-1)^b \cdot u_{r+cm}]$ *);
$c+b=n$

aber auch (nach §. 91. I.)

2) $u_m = (1+\Delta)^m \cdot u_o = S[m_a \cdot \Delta^a u_o]$;

und für irgend einen bestimmten Werth von c

3) $u_{r+cm} = (1+\Delta)^{cm} \cdot u_r = S[(cm)_b \cdot \Delta^b u_r]$,

alles mit Zuziehung der §§. 36.—38. des I. Bds.). Substituirt man dieses letztere Resultat statt u_{r+cm} in die Gleichung 1.), so erhält man

4) $\Delta^m u_r = S[(-1)^b \cdot n_b \cdot (cm)_b \cdot \Delta^b u_r]$,
$c+b=n$

wo statt b Null und alle positiven ganzen Zahlen gesetzt werden müssen, während für jeden Werth von b, wiederum statt c und d Null und alle positiven ganzen Zahlen gesetzt werden, welche der Gleichung $c+b=n$ genügen; wobei n_b und $(cm)_b$ Binomial-Koefficienten vorstellen. Man sieht also hier das r^{te} Glied der n^{ten} Differenz-Reihe im zweiten Schema, durch die r^{ten} Glieder der Differenz-Reihen des ersteren Schema bis zu $\Delta^{mn} u_r$ hin, ausgedrückt, so daß der Koeffizient von $\Delta^v u_r$

$$= S[(-1)^b \cdot n_b \cdot (cm)_v]$$
$$c+b=n$$

und selber eine Reihe von $n+1$ Gliedern ist.

Setzte man aber den Ausdruck $(1+\Delta)^m \cdot u_o$ statt u_m aus 2.) in die Gleichung 1.), so erhielte man

---

*) Wir bedienen uns hier allemal der kleinen deutschen Buchstaben, um damit alle Werthe zu bezeichnen, welche Null und positive ganze Zahlen sind, und welche den untergesetzten Gleichungen (z. B. $c+d=n$) genügen, so daß nach und nach alle positiven ganzen Zahlen genommen werden müssen, wenn keine untergesetzte Gleichung die Werthe näher beschränkt. Das vorgesetzte **S** drückt dann immer die Summe aller dadurch erhaltenen Glieder aus.

$$\text{I.}\quad \begin{cases} \Delta'^{n}u_r = [(1+\Delta)^m \cdot u_0 - 1]^n \cdot u_r, \\ \text{d. h.} \\ \Delta'^{n}u^r = (m_1 \cdot \Delta u_0 + m_2 \cdot \Delta^2 u_0 + m_3 \cdot \Delta^3 u_0 + \cdots)^n \cdot u_r, \\ \qquad = (m_1 + m_2 \cdot \Delta + m_3 \cdot \Delta^2 + \cdots)^n \cdot \Delta^n u_r; \end{cases}$$

allein es entsteht nun die Frage, ob dieses Resultat I.) mit dem in 4.) gefundenen identisch und dadurch das zuletzt angewandte Verfahren gerechtfertigt ist.

§. 96.

Betrachtet man zu dem Ende den Ausdruck

$$[(1+z)^m - 1]^n,$$

so erhält man zunächst nach dem binomischen Lehrsatze

$$1)\qquad [(1+z)^m - 1]^n = S[(-1)^b \cdot n_b \cdot (1+z)^{cm}]. \qquad c+b=n$$

Weil jedoch abermals nach dem binomischen Lehrsatze für jeden Werth von c

$$2)\qquad (1+z)^{cm} = S[(cm)_b \cdot z^b]$$

ist, so erhält man, wenn man diesen Werth aus 2.) in 1.) substituirt,

$$3)\qquad [(1+z)^m - 1]^n = S[(-1)^b \cdot n_b \cdot (cm)_b \cdot z^b]; \qquad c+b=n$$

und durch diese Gleichung ist es außer Zweifel gesetzt, daß das Resultat im §. 95. I.) zur Rechten genau mit dem Resultate §. 95. N. 4.) zusammenfällt, sobald man nur die Produkte $\Delta^p u_0 \cdot \Delta^q u_0$ in $\Delta^{p+q} u_0$ umwandelt.

Nebenbei erfahren wir hier, weil in N. 3.) die Entwickelung des Ausdrucks zur Linken nach steigenden Potenzen von z offenbar mit z^n beginnt, daß auch in dem Ausdrucke zur Rechten in N. 3.) alle Koeffizienten von z^b, so oft $b = \nu$, und $\nu < n$ ist, der Null gleich seyn müssen, während der Koeffizient von z^n, welcher links offenbar m^n ist, auch rechts derselbe seyn muß.

Diese Resultate schreiben sich so

$$4)\quad S\underset{c+d=n}{[(-1)^d \cdot n_d \cdot (cm)_v]} = \left\{\begin{matrix} 0, \text{ wenn } v<n \\ m^n, \text{ wenn } v=n \end{matrix}\right\},$$

d. h.

$$(nm)_v - n_1\cdot((n-1)m)_v + n_2\cdot((n-2)m)_v - \cdots \pm n_{n-1}\cdot(1\cdot m)_v = \left\{\begin{matrix} 0 \\ m^n \end{matrix}\right\},$$

je nachdem $v<n$ oder $v=n$ ist.

Multiplizirt man diese Gleichung 4.) mit $v!$, so nimmt sie auch noch folgende Gestalt an, nämlich

$$5)\quad S[(-1)^d \cdot n_d \cdot (cm)^{v\underline{1}-1}] = \left\{\begin{matrix} 0, \text{ wenn } v<n \\ m^n\cdot n!, \text{ wenn } v=n \end{matrix}\right\},$$

d. h.

$$(nm)^{v\underline{1}-1} - n_1\cdot((n-1)m)^{v\underline{1}-1} + n_2\cdot((n-2)m)^{v\underline{1}-1} - \cdots \pm n_{n-1}\cdot(1\cdot m)^{v\underline{1}-1} = \left\{\begin{matrix} 0 \\ \text{oder} \\ m^n\cdot n! \end{matrix}\right\}.$$

Und die Resultate dieses Paragraphen bleiben wahr, nicht bloß wenn m eine positive ganze Zahl, sondern auch wenn m ganz allgemein gedacht wird; wenn nur n eine positive ganze Zahl ist und bleibt.

§. 97.

Weil aber das Resultat §. 95. N. 4.), also auch, vermöge des §. 96.), das Resultat §. 95. I.) richtig verbleibt, so oft die beiden Gleichungen 1. und 3.) des §. 95.) in Kraft bleiben, so folgt, daß noch allemal

$$\text{I.}\qquad \Delta'^m u_r = [(1+\Delta)^m u_0 - 1]^n \cdot u_r$$

in dem näher beschriebenen Sinne wahr seyn werde, nicht bloß, wenn die Reihe des zweiten Schema, deren Differenzen durch Δ' bezeichnet sind, aus gleichweit (um m Stellen) abstehenden Gliedern der Reihe des erstern Schema besteht (wie letzteres

im §. 95. vorausgesetzt worden ist), sondern auch, wenn wir jetzt die andere Annahme machen,

daß $m = \frac{1}{\mu}$ ist, und daß die Reihe des 2ten Schema zwischenliegende Glieder zwischen je zwei nächst auf einander folgenden Gliedern des erstern Schema enthält, so nämlich, daß das r^{te}, $r+\mu^{te}$, $r+2\mu^{te}$, $r+3\mu^{te}$, etc. Glied der Ur-Reihe des 2ten Schema, bezüglich mit dem r^{ten}, $r+1^{ten}$, $r+2^{ten}$, $r+3^{ten}$, etc. Gliede der Ur-Reihe des 1ten Schema identisch sind; sobald man nur voraussetzt, daß alle durch u_{r+cm} oder jetzt durch $u_{r+\frac{c}{\mu}}$ vorgestellten Glieder der Ur-Reihe im 2ten Schema, aus den Gliedern der Ur-Reihe des erstern Schema nach dem Gesetze §. 95. N. 4.) d. h. nach der Formel

$$(\odot)\ldots \begin{cases} u_{r+cm} = (1+\Delta)^{cm} \cdot u_r = S[(cm)_b \cdot \Delta^b u_r] \\ \text{oder} \\ u_{r+\frac{c}{\mu}} = (1+\Delta)^{\frac{c}{\mu}} \cdot u_r = S\left[\left(\frac{c}{\mu}\right)_b \cdot \Delta^b u_r\right] \end{cases}$$

gebildet sind, wo c irgend eine bestimmte ganze Zahl ist, wo aber b unter den Summen-Zeichen S, wie immer, wenn nicht das Gegentheil bemerkt ist, alle Werthe hat, welche 0 und positive ganze Zahlen sind, so daß die Summe zur Rechten im Allgemeinen eine unendliche Reihe ist. Dieselbe bricht jedoch von selber ab, entweder 1) wenn $\frac{c}{\mu}$ eine ganze Zahl wird, oder 2) für jeden andern Werth von c, wenn die Ur-Reihe des ersten Schema eine arithmetische Reihe der ν^{ten} Ordnung ist, so daß $\Delta^{\nu+1} u_r$, $\Delta^{\nu+2} u_r$, etc. etc. der Null gleich werden *).

---

*) In dem Falle dieses §. 97.) entsteht also die Ur-Reihe des zweiten Schema, deren Differenzen durch Δ' bezeichnet sind, dadurch, daß man zwischen je zwei Glieder der Ur-Reihe des erstern Schema

Dieselbe Formel I.), es mag nun m eine positive ganze Zahl seyn und die Voraussetzung des §. 95.) gemacht werden, oder $m = \frac{1}{\mu}$ genommen und die Voraussetzung des gegenwärtigen §. 97.) statt finden, läßt sich aber allemal auch so schreiben, nämlich

II. $$\Delta^{/m} u_r = S[(-1)^b \cdot n_b \cdot (cm)_{n+b} \cdot \Delta^{n+b} u_r], \quad c+b=n$$

wo für jeden bestimmten Werth b (welcher Null, oder eine positive ganze Zahl ist) der Koeffizient von $\Delta^{n+b} u_r$ aus $n+1$ Gliedern besteht, welche sich aber, vergleicht man sie mit dem Ausdrucke in I.), auch in eine kleinere Anzahl von Gliedern vereinigen lassen.

Anmerkung. Wollte man die Gleichung (§. 97. I.), nämlich

I. $$\Delta^{/m} u_r = [(1+\Delta)^m u_0 - 1]^n \cdot u_r,$$

auf eine, der früher (in dem §. 92.) befolgten analogen Weise behandeln, nämlich dieselbe zuerst mit

$[(1+\Delta)^m u_0 - 1]^{-n}$ und hernach noch mit $\Delta^{/-n} u_0$ multipliciren, so erhielte man

III. $$\Delta^{/-n} u_r = [(1+\Delta)^m u_0 - 1]^{-n} \cdot u_r$$ *),

welche

$$u_r,\ u_{r+1},\ u_{r+2},\ u_{r+3},\ u_{r+4},\ \cdots$$

noch $\mu - 1$ Glieder eingeschaltet (interpolirt) sich denkt, welche durch $u_{r+\frac{c}{\mu}}$ vorgestellt sind, indem man unter c die ganzen Zahlen von 0 bis $\mu - 1$ oder von $\mu+1$ bis $2\mu-1$, oder von $2\mu+1$ bis $3\mu-1$, oder von $3\mu+1$ bis $4\mu-1$, u. s. w. f. versteht, wo aber das Gesetz der Einschaltung in der Formel ⊙.) gegeben und bestimmt ausgesprochen sich findet.

*) Diese Formel findet man, abgesehen von den hier gebrauchten Zeichen (es steht nämlich Σ^n statt hier $\Delta^{/-n}$), fast in allen den Schriften, welche die Lehre der Differenz-Reihen vollständiger behandeln; obgleich sie unrichtig ist. — Auch Laplace hat dieselbe mittelst seiner „Théorie des fonctions génératrices" erhalten. — Allein Laplace zieht sie aus einer irrigen Behauptung, welche man gleich zu Anfang jener Theorie gemacht sieht. Er bezeichnet nämlich durch u die erzeugende Funktion der Reihe $y_x \cdot t^x$, und

welche wir jedoch als unrichtig bezeichnen müssen. Sollte nämlich diese Formel brauchbar werden, so bedürfte sie einer doppelten Berichtigung. Einmal müßte man nämlich die I.) nicht mit allen Gliedern von $[(1+\Delta)^m u_0 - 1]^{-n}$, sondern nur mit den Gliedern bis zu $\Delta^\mu u_0$ hin (wo μ beliebig groß gedacht ist) multipliciren, um die Ergänzungsglieder zu erhalten. — Dann aber ist dieses Multipliciren, den §§. 89. 90.) zufolge, überhaupt nur erlaubt, wenn man in der I.) unter $\Delta^n u_r$ den Ausdruck $(u_m - 1)^n \cdot u_r$ versteht, weil die zu multiplicirenden Gleichungen bloß Glieder eines und desselben Schema enthalten dürfen. Die zuerst entstehende Gleichung

$$[(1+\Delta)^m u_0 - 1]^{-n} \cdot (u_m - 1)^n \cdot u_r = u_r,$$

nachdem sie hinsichtlich ihrer Ergänzungs-Glieder, im Falle die Reihe links abbricht, gehörig berichtigt worden wäre, darf daher nicht mit $\Delta^{-n} u_0$, sondern höchstens mit $(u_m - 1)^{-n} u_0$ multiplicirt werden, wofür man aber wieder nur eine endliche Anzahl erster Glieder nebst ihren Ergänzungsgliedern nehmen müßte, um nach der Multiplication auf der rechten Seite nicht genau $(u_m - 1)^{-n} \cdot u_r$, dagegen ganz genau $\Delta^{-n} u_r$, wie solches hier gewünscht werden muß, zu haben.

Der Zweck der gegenwärtigen Schrift zwingt uns aber abzubrechen, und das Weitere den noch folgenden Theilen des „Systems der Mathematik" zu überlassen.

---

sagt dann, daß die erzeugende Funktion der Reihe $\Sigma^n y_x \cdot t^x$ nothwendig $u\left(\frac{1}{t} - 1\right)^{-n}$ seyn werde. Dies ist aber nicht der Fall, wie eine gründlichere Behandlung des Gegenstandes augenblicklich erkennen läßt.

Zwölftes Kapitel.

Von den endlichen Differenzen und Summen.

Erste Abtheilung.

Uebertragung der vorstehenden allgemeinen Lehren auf eine besondere Reihe von Ausdrücken.

Vorerinnerung.

Bis hieher haben wir (in dem vorhergehenden Kapitel) Ur-Reihen betrachtet, welche völlig beliebige Glieder hatten, die völlig gesetzlos seyn oder nach jedem beliebigen Gesetze fortlaufen konnten; und wir haben nichts weiter gethan, als die Glieder der Ur-Reihe, mit den aus derselben gebildeten Gliedern der Differenz-Reihen, in verschiedenen Combinationen verglichen.

In dem gegenwärtigen Kapitel wollen wir dagegen eine Ur-Reihe betrachten, deren Glieder alle aus einer gegebenen Funktion

$$f_x$$

hervorgehen, dadurch daß man statt x nach und nach Werthe setzt, welche fortwährend um gleichviel wachsen.

§. 98.

A) Es sey f_x eine beliebige Funktion von x, und f_{x+ph} stelle das vor, was aus f_x wird, wenn man $x+ph$ statt x setzt. Denkt man sich nun unter der im vorhergehenden Kapitel betrachteten Reihe

a) u_q, u_{q+1}, u_{q+2}, u_{q+3}, etc. etc.

wo q eine beliebige positive oder negative ganze Zahl oder Null bedeutet, die bestimmte Reihe

b) f_{x+qh}, $f_{x+(q+1)h}$, $f_{x+(q+2)h}$, $f_{x+(q+3)h}$, etc. etc.

vorgestellt, so ist allgemein für jedes positive oder negative p, auch für $p = 0$,

1) $$u_p = f_{x+ph}$$

vorausgesetzt. — Die Funktion f_x aber, welche alle Glieder dieser bestimmten Reihe b.) giebt, wenn statt x nach und nach

$\cdots\ x+qh,\ x+(q+1)h,\ x+(q+2)h,\ x+(q+3)h,\ \cdots$

gesetzt wird, heißt das allgemeine Glied dieser Reihe.

B) Bezeichnet man nun die Funktion von x, aus welcher die Glieder der ersten Differenz-Reihe (wenn die Reihe b. als Ur-Reihe genommen wird) ebenfalls hervorgehen, wenn statt x nach und nach

$\cdots\ x+qh,\ x+(q+1)h,\ x+(q+2)h,\ x+(q+3)h,\ \cdots$

gesetzt wird, durch Δf_x, so ist dieses allgemeine Glied Δf_x offenbar gegeben durch die Gleichung

2) $$\Delta f_x = f_{x+h} - f_x;$$

und unter Voraussetzung dieser Bezeichnung und der des vorhergehenden Kapitels ist dann

3) $$\Delta u_p = \Delta f_{x+ph},$$

wenn nur Δf_{x+ph} das vorstellt, was aus Δf_x wird, sobald man $x+ph$ statt x schreibt.

C) Bezeichnen wir überhaupt die Funktionen von x, welche als die allgemeinen Glieder der 1ten, 2ten, 3ten, etc. und allgemein der r^{ten} Differenz-Reihe angesehen werden können, bezüglich durch

$$\Delta f_x,\quad \Delta^2 f_x,\quad \Delta^3 f_x,\ \text{etc. etc.}\quad \text{und}\quad \Delta^r f_x,$$

so findet sich offenbar außer

$\Delta f_x = f_{x+h} - f_x$, noch $\Delta^2 f_x = \Delta f_{x+h} - \Delta f_x$;

$\Delta^3 f_x = \Delta^2 f_{x+h} - \Delta^2 f_x$; etc. etc.

und überhaupt

4) $$\Delta^{r+1} f_x = \Delta^r f_{x+h} - \Delta^r f_x,$$

welche positive ganze Zahl auch immer unter r gedacht werden mag.

Und unter der Voraussetzung dieser Bezeichnung und der des vorhergehenden Kapitels ist dann auch allemal

5) $$\Delta^r u_p = \Delta^r f_{x+ph}.$$

D) Aber auch jede der negativen Differenz-Reihen, d. h. der Summen-Reihen, geht nun auf dieselbe, in A.) beschriebene Weise aus einem allgemeinen Gliede hervor. Bezeichnen wir diese allgemeinen Glieder der $(-1)^{ten}$, $(-2)^{ten}$, $(-3)^{ten}$, ... $(-r)^{ten}$ Differenz-Reihe bezüglich durch

$$\Delta^{-1} f_x, \quad \Delta^{-2} f_x, \quad \Delta^{-3} f_x, \cdots \Delta^{-r} f_x,$$

so finden zwischen diesen allgemeinen Gliedern offenbar die Gleichungen statt:

$$\Delta^0 f_x \text{ d. h. } f_x = \Delta^{-1} f_{x+h} - \Delta^{-1} f_x; \quad \Delta^{-1} f_x = \Delta^{-2} f_{x+h} - \Delta^{-2} f_x,$$

etc. etc.

und allgemein

6) $$\Delta^{-r+1} f_x = \Delta^{-r} f_{x+h} - \Delta^{-r} f_x.$$

Diese Gleichungen aber bestimmen, wie man sieht, die allgemeinen Glieder der Summen-Reihen nicht, sondern nur die Differenz zweier auf einander folgenden Werthe derselben, nämlich der für $x = x$ und $x = x+h$ genommenen Werthe.

Unter der Voraussetzung dieser Bezeichnung und der des vorhergehenden Kapitels kann man aber annehmen

7) $$\Delta^{-r} u_p = \Delta^{-r} f_{x+ph}.$$

E) Es muß jedoch hier bemerkt werden, daß die Funktionen von x, welche wir hier bezüglich durch

$$\Delta^{-1} f_x, \quad \Delta^{-2} f_x, \quad \Delta^{-3} f_x, \cdots \Delta^{-r} f_x$$

bezeichnet haben, gewöhnlich durch

$$\Sigma f_x, \quad \Sigma^2 f_x, \quad \Sigma^3 f_x, \cdots \Sigma^r f_x$$

bezeichnet werden. Bei unserer Bezeichnung aber kann man die Resultate 5.) und 7.) in das einzige

I. $$\Delta^r u_p = \Delta^r f_{x+ph}$$

zusammenfassen, indem man solches gelten läßt, es mag r eine positive oder negative ganze Zahl oder 0 seyn, sobald man nur unter $\Delta^0 f_x$ die Funktion f_x selbst versteht, so wie man unter

$\Delta^0 u_p$ das Glied u_p selbst verstanden hat*). — Und eben so lassen sich die Gleichungen 4.) und 6.) zusammenfassen in die einzige

II. $$\Delta^{r+1} f_x = \Delta^r f_{x+h} - \Delta^r f_x,$$

sobald man sie gelten läßt für jede positive oder negative ganze Zahl, welche statt r gesetzt werden mag, so wie auch für $r = 0$. — Daß p jedesmal eine beliebige positive oder negative ganze Zahl oder Null seyn kann, versteht sich von selbst.

Die Gleichung I.) lehrt weiter nichts, als was man sich jetzt unter dem, in dem vorhergehenden Kapitel eingeführten allgemeinen Zeichen $\Delta^r u_p$ zu denken habe, wenn man unter der allgemeinen Reihe A. a.) jetzt die bestimmte und besondere Reihe A. b.) sich denkt. — Die Gleichung II.) dagegen drückt die Abhängigkeit der Funktionen Δf_x, $\Delta^2 f_x$, $\Delta^3 f_x$, etc. etc. und $\Delta^{-1} f_x$, $\Delta^{-2} f_x$, $\Delta^{-3} f_x$, etc. von f_x und von einander aus.

F) Es folgt aber aus der II.) noch

$$\Delta^r f_{x+h} = \Delta^r f_x + \Delta^{r+1} f_x,$$

d. h. wenn 0, 1, 2, 3, etc. etc. statt r gesetzt wird,

$f_{x+h} = f_x + \Delta f_x$; $\Delta f_{x+h} = \Delta f_x + \Delta^2 f_x$; $\Delta^2 f_{x+h} = \Delta^2 f_x + \Delta^3 f_x$;

u. s. w. f.

Anmerkung. Diese Gleichungen in E.) und F.) sind aber nur specielle Fälle der allgemeinen Gleichungen

$$\Delta^{r+1} u_s = \Delta^r u_{s+1} - \Delta^r u_s \quad \text{und} \quad \Delta^r u_{s+1} = \Delta^r u_s + \Delta^{r+1} u_s$$

der §§. 86. 87.) für $s = 0$, und wenn man statt der allgemeinen Reihe A. a.) die jetzige besondere und bestimmte Reihe A. b.) setzt.

§. 99.

Erklärung der endlichen Differenzen und der endlichen Integrale einer Funktion f_x.

Diese durch Δf_x, $\Delta^2 f_x$, $\Delta^3 f_x$, etc. etc. bezeichneten, und mit einander sowie mit f_x mittelst der Gleichungen des §. 98. E. II.) zusammenhängenden und aus diesen Gleichungen zu findenden Funktionen von x, nennt man bezüglich „die zu der Differenz h von x gehörige erste, zweite, dritte etc. etc.

---

*) Für $r = 0$ geht diese Gleichung I.) in die obige A. 1.) über.

endliche Differenz der Funktion f_x, während letztere selbst noch h enthalten, aber auch von h frei seyn kann. — Die Funktionen $\Delta^{-1}f_x$ oder Σf_x, $\Delta^{-2}f_x$ oder $\Sigma^2 f_x$, $\Delta^{-3}f_x$ oder $\Sigma^3 f_x$, etc. etc., deren Abhängigkeit aus einander ebenfalls durch die Gleichungen des §. 98. E. II.) bedingt ist (die aber nicht ganz und vollständig aus diesen Gleichungen gefunden werden können)*) nennt man dagegen „die zu der Differenz h von x gehörigen endlichen Summen oder endlichen Integrale der Funktion f_x".

Wird aber die Differenz h von x, der Einheit gleich gedacht, d. h. ist $h = 1$, so wollen wir, um die zu $h = 1$ gehörigen endlichen Differenzen und Integrale einer Funktion von x, von den allgemeinen, zu $h = h$ gehörigen zu unterscheiden, die ersteren zu $h = 1$ gehörigen dadurch auszeichnen, daß wir Δ_1 statt Δ, und Σ_1 statt Σ schreiben.

§. 100.

1) Ist f_x eine Funktion von x ohne h, so ist augenblicklich nach dem Taylor'schen Lehrsatze

$$\text{a)} \qquad \Delta f_x = \partial f_x \cdot h + \partial^2 f_x \cdot \frac{h^2}{2!} + \partial^3 f_x \cdot \frac{h^3}{3!} + \cdots.$$

---

*) Wenn alle Glieder der Summen-Reihen um gleichviel vermehrt werden, so bleibt ihre Differenz-Reihe doch immer dieselbe, wie wir bereits im §. 88.) ausführlich erörtert haben. Wenn daher das allgemeine Glied der ersten Summen-Reihe, um eine Constante, oder um eine solche Funktion von x $\left(\text{z. B. } A \cdot sin\frac{2\pi x}{h},\ B \cdot cos\frac{2\pi x}{h}, \text{ etc. etc.}\right)$ vermehrt wird, welche dieselben Werthe behält, wenn nach und nach $x+qh$, $x+(q+1)h$, etc. etc. statt x gesetzt werden (unter q eine positive oder negative ganze Zahl verstanden oder die Null), so liefert es Glieder, die alle um gleichviel größer sind, deren Differenzen also wieder zu derselben Ur-Reihe

$$\cdots f_{x+qh},\ f_{x+(q+1)h},\ f_{x+(q+2)h}, \text{ etc.}$$

führen. — Und da dies für jede solche Summen-Reihe gilt, so wird $\Sigma^n f_x$ eine Anzahl n solcher willkührlichen Constanten, oder solcher willkührlichen periodischen Funktionen von x in sich aufnehmen, und dabei doch immer den obigen Relationen genügen.

Diese Reihe rechts bricht aber nur dann ab, wenn f_x irgend eine ganze Funktion von x, also eine Funktion von der Form

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \cdots + Px + Q$$

ist, wo dann Δf_x eine ganze Funktion von x vom $(m-1)^{ten}$ Grade wird, deren Koefficienten jedoch h in sich aufgenommen haben.

2) Ist f_x eine Funktion von x, welche selber noch h enthält, so aber daß f_x die Form

$$f_x = \varphi_x \cdot h^\alpha + \psi_x \cdot h^\beta + \pi_x \cdot h^\gamma + \cdots$$

hat, so ist abermals Δf_x leicht in eine Reihe auszudrücken, die nach Potenzen von h fortläuft. Man findet nämlich sogleich, wenn man rechts $x+h$ statt x setzt, und dann die Funktion selber wieder subtrahirt, und wenn man bedenkt, daß $\varphi_{x+h} - \varphi_x$ durch $\Delta\varphi_x$ bezeichnet wird, u. s. f.,

$$\Delta f_x = \Delta\varphi_x \cdot h^\alpha + \Delta\psi_x \cdot h^\beta + \Delta\pi_x \cdot h^\gamma + \cdots,$$

während wiederum (nach 1.)

$$\Delta\varphi_x = \partial\varphi_x \cdot h + \partial^2\varphi_x \cdot \frac{h^2}{2!} + \cdots$$

$$\Delta\psi_x = \partial\psi_x \cdot h + \partial^2\psi_x \cdot \frac{h^2}{2!} + \cdots$$

u. s. w.

ist. Multiplicirt man daher diese einzelnen Reihen mit h^α, h^β, etc. etc., und ordnet man das ganze nach Potenzen von h, so hat man zuletzt Δf_x nach Potenzen von h geordnet.

3) Da $\Delta^2 f_x = \Delta f_{x+h} - \Delta f_x$ ist, so wird auch $\Delta^2 f_x$ sogleich in eine Reihe nach Potenzen von h entwickelt werden können, so wie man Δf_x entwickelt hat; dies entwickelte Δf_x befindet sich nämlich in dem Falle, der in 2.) gedachten Funktion f_x. — Die Gleichung 1. a.) giebt namentlich, wenn man in ihr $x+h$ statt x setzt, und dann die alte von der neuen Gleichung subtrahirt, auch auf die einzelnen Ausdrücke ∂f_{x+h}, $\partial^2 f_{x+h}$, etc. etc. den Taylor'schen Lehrsatz anwendet,

b) $$\Delta^2 f_x = \partial^2 f_x \cdot h^2 + \left\{\begin{matrix}\text{Glieder mit den hö-}\\ \text{hern Potenzen von h}\end{matrix}\right\}'$$

wo aber f_x ohne h gedacht ist.

4) Es kann daher auch $\Delta^m f_x$ in eine nach ganzen Potenzen von h fortlaufende Reihe umgeformt werden. — Namentlich findet man, wenn in b.) zuerst $x+h$ statt x gesetzt, und dann die alte Gleichung von der neuen subtrahirt wird,

c) $$\Delta^3 f_x = \partial^3 f_x \cdot h^3 + \left\{\begin{matrix}\text{Glieder mit den hö-}\\ \text{hern Potenzen von h}\end{matrix}\right\}''$$

wenn nur f_x nicht selbst schon h enthält.

So fortfahrend erhält man aber auch

$$\Delta^m f_x = \partial^m f_x \cdot h^m + \left\{\begin{matrix}\text{Glieder mit den hö-}\\ \text{hern Potenzen von h}\end{matrix}\right\}$$

wenn nur f_x nicht selbst schon h enthält.

5) Denkt man sich nun den besondern Fall, wo f_x noch kein h enthält und wo h unendlich-klein und $= dx$ gesetzt wird, so hat man aus 1.a.), 3.b.) und 4.c.)

$$\Delta f_x = \partial f_x \cdot dx; \quad \Delta^2 f_x = \partial^2 f_x \cdot dx^2; \quad \Delta^3 f_x = \partial^3 f_x \cdot dx^3;$$

$$\text{und} \quad \Delta^m f_x = \partial^m f_x \cdot dx^m,$$

so daß also nun die Differenzen Δf_x, $\Delta^2 f_x$, $\Delta^3 f_x$ und $\Delta^m f_x$ mit den Differentialien df_x, $d^2 f_x$, $d^3 f_x$, ... $d^m f_x$ zusammenfallen. Vgl. §. 160. d. I. Bds.)

§. 101.

Aus diesen Entwickelungen geht aber hervor:

1) Ist f_x eine ganze Funktion von x vom m^{ten} Grade, so ist Δf_x eine ganze Funktion von x vom $m-1^{ten}$ Grade, und dann auch (nach §. 100. N.N. 2. und 3.) $\Delta^2 f_x$ eine ganze Funktion von x vom $m-2^{ten}$ Grade; und $\Delta^m f_x$ ist daher nach x constant, so wie dann $\Delta^{m+1} f_x$, $\Delta^{m+2} f_x$, etc. etc. der Null gleich sind.

2) Denkt man sich daher eine ganze Funktion f_x vom m^{ten} Grade, als allgemeines Glied einer Ur-Reihe (nach

§. 98. A), so sind (nach §. 98. B. C.) die allgemeinen Glieder ihrer

1ten, 2ten, 3ten, ... r^{ten} Differenz-Reihe

ganze Funktionen von x bezüglich vom

$(m-1)^{ten}$, $(m-2)^{ten}$, $(m-3)^{ten}$, ... $(m-r)^{ten}$ Grade,

während das allgemeine Glied der m^{ten} Differenz-Reihe, nach x constant ist, alle Glieder der m^{ten} Differenz-Reihe demnach einander und dieser Constante gleich sind, und die $(m+1)^{te}$, $(m+2)^{te}$, etc. etc. Differenz-Reihe lauter Nullen zu Gliedern hat. — Die Ur-Reihe also, deren allgemeines Glied eine ganze Funktion f_x vom m^{ten} Grade ist, ist allemal eine arithmetische Reihe der m^{ten} Ordnung (§. 93.).

3) Der einfachste hierher gehörige Fall ist der, wo das allgemeine Glied der Ur-Reihe $= x^m$ ist, wo also die Glieder der Ur-Reihe selbst

$$\ldots,\ (x+q\cdot h)^m;\quad (x+(q+1)h)^m;\quad (x+(q+2)h)^m;$$
$$(x+(q+3)h)^m,\ \text{etc. etc.}$$

sind *).

Hierher gehört auch die Reihe

$$1^m,\ 2^m,\ 3^m,\ 4^m,\ 5^m,\ \text{etc. etc.},$$

so daß auf sie alles angewandt werden kann, was §. 93.) von den arithmetischen Reihen höherer Ordnung gelehrt worden ist.

§. 102.

Verstehen wir in den Formeln des §. 91.) unter der Reihe

$$u_r,\quad u_{r+1},\quad u_{r+2},\quad u_{r+3},\quad \text{etc.}$$

jetzt die Reihe

$$f_x,\quad f_{x+h},\quad f_{x+2h},\quad f_{x+3h},\quad \text{etc. etc.};$$

so ist

$$\Delta u_r = \Delta f_x,\quad \Delta^2 u_r = \Delta^2 f_x,\quad \text{etc. etc.};\quad \Delta^n u_r = \Delta^n f_x$$

---

*) Die m^{ten} Potenzen der Glieder einer arithmetischen Reihe der n^{ten} Ordnung ist (nach N. 2.) allemal eine arithmetische Reihe der mn^{ten} Ordnung. Also bilden die m^{ten} Potenzen der Glieder einer arithmetischen Reihe der ersten Ordnung, allemal eine arithmetische Reihe der $m \cdot 1$ d. h. der m^{ten} Ordnung. — Dies sagt auch N. 3.).

und die Gleichungen I. II. und III.) des §. 91.) gehen nun über in

$$\text{I.}\quad \begin{cases} f_{x+nh} = (1+\Delta)^n \cdot f_x = S[n_a \cdot \Delta^a f_x] \\ \text{d. h.} \\ f_{x+nh} = f_x + n_1 \cdot \Delta f_x + n_2 \cdot \Delta^2 f_x + n_3 \cdot \Delta^3 f_x + \cdots + n_n \cdot \Delta^n f_x \end{cases}$$

$$\text{II.}\quad \begin{cases} \Delta^n f_x = S[(-1)^a \cdot n_a \cdot f_{x+(n-a)h}] \\ \text{d. h.} \\ \Delta^n f_x = f_{x+nh} - n_1 \cdot f_{x+(n-1)h} + n_2 \cdot f_{x+(n-2)h} - n_3 \cdot f_{x+(n-3)h} + \cdots \\ \qquad \mp (n_{n-1} \cdot f_{x+h} - n_n \cdot f_x), \end{cases}$$

wobei man nicht übersehen mag, daß $n_n = 1$, $n_{n-1} = n$, u. s. w. f. ist, ferner

$$\text{III.}\quad \begin{cases} f_{x-nh} = S[(-1)^a \cdot n_a \cdot \Delta^a f_{x-ah}] \\ \text{d. h.} \\ f_{x-nh} = f_x - n_1 \cdot \Delta f_{x-h} + n_2 \cdot \Delta^2 f_{x-2h} - n_3 \cdot \Delta^3 f_{x-3h} + \cdots \\ \qquad \pm n_{n-1} \cdot \Delta^{n-1} f_{x-(n-1)h} \mp n_n \cdot \Delta^n f_{x-nh}. \end{cases}$$

Und der Satz §. 88. N. 6.) nimmt für unsere gegenwärtige Reihe folgende Form an, nämlich

IV. $f_x + f_{x+h} + f_{x+2h} + f_{x+3h} + \cdots + f_{x+(n-1)h} = \Sigma f_{x+nh} - \Sigma f_x$,

sobald man nur unter Σf_x eine Funktion versteht, welche der Gleichung $\Sigma f_{x+h} - \Sigma f_x = f_x$ genügt, während Σf_{x+h} und Σf_{x+nh} das bedeuten, was aus Σf_x hervorgeht, wenn man bezüglich $x+h$ und $x+nh$ statt x schreibt *).

Anmerkung. I. Enthält f_x den Ausdruck h noch nicht selbst, so kann man in vorliegender Formel II.) die einzelnen Glieder zur Rechten mittelst des Taylor'schen Lehrsatzes in Reihen verwandeln, welche nach ganzen Potenzen von h fortlaufen, und so verwandelt sich zuletzt $\Delta^n f_x$ selbst in eine solche Reihe, deren Koefficienten noch überdies ein sehr hübsches Gesetz befol-

---

*) Kann man also aus f_x finden Σf_x, so kann man die Summe der n Glieder der Reihe

$$f_x + f_{x+h} + f_{x+2h} + \cdots$$

sogleich angeben.

gen. Da nämlich die Taylor'sche Reihe genau dieselben Koefficienten hat, als die in den Elementen mit e^z bezeichnete Reihe (die natürliche Potenz), so werden die Koefficienten der gedachten Reihe genau dieselben, welche man erhält, wenn die unter $(e^z - 1)$ vorgestellte Reihe zur n^{ten} Potenz erhoben wird. Man sieht daher das Endresultat symbolisch auch so ausgedrückt:

1) $$\Delta^n f_x = (e^{\partial \cdot h} - 1)^n f_x,$$

indem man statt $e^{\partial \cdot h} - 1$, die nach Potenzen von $\partial \cdot h$ entwikkelte Reihe gesetzt, diese mit n potenzirt sich denkt, so daß eine neue nach Potenzen von $\partial \cdot h$ geordnete Reihe hervorgeht, dann aber in jedem mit $\partial^a \cdot h^a$ behafteten Gliede die Type f_x noch zwischen ∂^a und h^a schreibt, so daß $\partial^a \cdot h^a$ in $\partial^a f_x \cdot h^a$ übergeht.

Diese Gleichung 1.) ist aber keine andere als die Gleichung des §. 100. N. 4. c.), wenn n statt m gesetzt wird, und welche dort nur angedeutet, hier aber vollständig gefunden ist. Bei dieser Gelegenheit (da $\Delta^n f_x$ nach Potenzen von h geordnet, mit einem Gliede beginnt, welches bereits den Faktor h^n enthält) erfährt man auch noch, daß die Koefficienten aller vorhergehenden Potenzen von h, welche sich bei der direkten Entwickelung aus §. 102. II.) ergeben, der Null gleich seyn müssen. Dadurch bekommt man die merkwürdigen Gleichungen

$$n^m - n_1 \cdot (n-1)^m + n_2 \cdot (n-2)^m - n_3 \cdot (n-3)^m \cdots \pm n_{n-1} \cdot 1^m = 0,$$

so oft $m < n$ ist; derselbe Ausdruck zur Linken zeigt sich aber $= n!$, so oft $m = n$ genommen wird.

II. Hat man aber auf diese Weise die n^{te} Differenz $\Delta^n f_x$ in die Ableitungen $\partial^n f_x$, $\partial^{n+1} f_x$, $\partial^{n+2} f_x$, etc. etc., ausgedrückt, so kann man auch versuchen, jede n^{te} Ableitung $\partial^n f_x$ in die Differenzen $\Delta^n f_x$, $\Delta^{n+1} f_x$, etc. etc. auszudrücken. Dies geschieht am einfachsten, wenn man f_{x+mh} einmal mittelst des Taylor'schen Lehrsatzes nach Potenzen von h entwickelt, dann aber auch

f_{x+mh} mittelst der Gleichung I.) in die Differenzen Δf_x, $\Delta^2 f_x$, $\Delta^3 f_x$, etc. etc. ausdrückt, und dann beide Ausdrücke dadurch mit einander vergleicht, daß man beide nach Potenzen von m ordnet, und zuletzt die Koefficienten der einzelnen Potenzen von m einander gleich setzt. Man erhält dann symbolisch dargestellt

$$2) \qquad \partial^n f_x \cdot h^n = [log(1+\Delta)]^n f_x,$$

wo rechts statt $log(1+\Delta)$ zuerst $\Delta - \frac{1}{2}\Delta^2 + \frac{1}{3}\Delta^3 -$ etc. etc. gesetzt, dann solche Reihe zur n^{ten} Potenz erhoben, und wieder nach Δ geordnet wird, und wo man zuletzt an jedes Glied (hinter Δ^q) noch f_x hinzufügt.

Dieses Resultat gilt jedoch, genau genommen, nur, wenn f_x eine ganze Funktion von x ist, oder höchstens noch wenn f_x eine nach ganzen Potenzen von x fortlaufende Reihe ist, und im letztern Fall nur noch mit manchen Beschränkungen. Wir können uns in gegenwärtiger Schrift jedoch auf diese Untersuchungen gar nicht einlassen, und begnügen uns daher mit diesen Andeutungen.

Zweite Abtheilung.

Vom endlichen Differenziiren und vom endlichen Integriren einer Funktion f_x.

§. 103.

Von den endlichen Differenzen und Summen kann man sich aber noch folgende Gesetze bemerken:

1) Die $(r+1)^{te}$ Differenz $\Delta^{r+1} f_x$ einer Funktion f_x ist allemal die erste Differenz der Funktion $\Delta^r f_x$. — Danach sind die Differenzen Δf_x, $\Delta^2 f_x$, etc. etc. aus einander zu bestimmen, wenn man nicht sogleich auf einmal die n^{te} Differenz $\Delta^n f_x$ finden kann oder will. Die Bestimmung der Differenzen wird aber auch das (endliche) Differenziiren der Funktion f_x genannt.

2) Sind zwei Funktionen f_x und ψ_x für jeden Werth von x einander gleich (also einander identisch), so sind auch ihre Differenzen Δf_x und $\Delta \psi_x$, desgleichen $\Delta^2 f_x$ und $\Delta^2 \psi_x$, etc. etc.

bezüglich einander gleich, d. h. identisch. — Jede Funktion f_x hat also eine einzige Differenz Δf_x.

3) Dagegen ist Σf_x ein vieldeutiges Zeichen, welches zunächst jede bestimmte Funktion φ_x ausdrückt, welche die Eigenschaft hat, daß

$$\Delta\varphi_x \text{ d. h. } \varphi_{x+h} - \varphi_x = f_x$$

wird, — dann aber auch die Summe $\varphi_x + C_x$ vorstellt, wenn C_x entweder von x gänzlich unabhängig (eine absolute Constante nach x) oder doch eine solche Funktion von x (z. B. $sin\frac{2\pi x}{h}$, $cos\frac{2\pi x}{h}$, etc. etc. etc.) ist, welche für $x = x+h$ denselben Werth annimmt, wie für $x = x$, und welche man deshalb eine periodische Constante nennen kann. — Sind daher zwei Funktionen f_x und ψ_x für jeden Werth von x einander gleich, so sind ihre Summen Σf_x und $\Sigma\psi_x$ entweder auch einander gleich, oder um eine absolute oder periodische Constante C von einander verschieden. — Das Auffinden einer solchen Funktion φ_x nennt man aber auch das (endliche) Integriren der Funktion f_x.

4) Findet man daher das besondere endliche Integral φ_x von f_x, so muß man immer noch eine solche willkührliche periodische oder absolute Constante C addiren, wenn $\varphi_x + C$ das allgemeine endliche Integral von f_x seyn soll.

5) Bezeichnet man $sin\frac{2\pi x}{h}$ und $cos\frac{2\pi x}{h}$ bezüglich durch s und c, so ist jede beliebige Funktion $\varphi_{s,c}$ von s und c eine solche periodische Constante. — Auch kann man jede absolute Constante (nach x) mit zu den periodischen Constanten (nach x) zählen.

6) Jedenfalls ist allemal

$$\Delta(\Sigma f_x) = f_x;$$

aber

$$\Sigma(\Delta f_x) = f_x + C_x,$$

wo C_x eine solche willkührliche periodische Constante vorstellt.

§. 104.

Allgemeine Gesetze des endlichen Differenziirens und Integrirens.

Zur Auffindung der einzelnen endlichen Differenzen und Integrale kann man sich nachstehender allgemeinen Gesetze bedienen.

Stellen nämlich C_x, C'_x etc. etc. irgend beliebige periodische oder absolute Constanten (nach x) vor, so findet sich

I. $\Delta C_x = 0$ und 1) $\Sigma 0 = C_x$;

II. $\Delta(C_x + f_x) = \Delta f_x$ und 2) $\Sigma f_x = C_x + \Sigma f_x$,

wenn unter Σf_x zur Linken das allgemeine Integral, dagegen unter Σf_x zur Rechten irgend ein besonderes Integral gedacht wird. — Ferner

III. $$\Delta(\psi_x \pm \varphi_x) = \Delta\psi_x \pm \Delta\varphi_x$$

und

3) $$\Sigma(\psi_x \pm \varphi_x) = \Sigma\psi_x \pm \Sigma\varphi_x + C_x;$$

IV. $$\Delta(C_x \cdot \varphi_x) = C_x \cdot \Delta\varphi_x$$

und

4) $$\Sigma(C_x \cdot \varphi_x) = C_x \cdot \Sigma\varphi_x + C'_x;$$

V. $$\Delta(\varphi_x \cdot \psi_x) = \psi_{x+h} \cdot \Delta\varphi_x + \varphi_x \cdot \Delta\psi_x = \varphi_{x+h} \cdot \Delta\psi_x + \psi_x \cdot \Delta\varphi_x$$
$$= \psi_x \cdot \Delta\varphi_x + \varphi_x \cdot \Delta\psi_x + \Delta\varphi_x \cdot \Delta\psi_x,$$

und

5) $$\Sigma(\varphi_x \cdot \psi_x) = \varphi_x \cdot \Sigma\psi_x - \Sigma(\Delta\varphi_x \cdot \Sigma\psi_{x+h}) + C_x,$$

wenn nur $\Sigma\psi_x$ irgend ein besonderes endliches Integral und $\Sigma\psi_{x+h}$ das vorstellt, was aus diesem $\Sigma\psi_x$ wird, wenn man $x+h$ statt x setzt.

Ferner ist

VI. $$\Delta(f_{x+p}) = [\Delta f_x]_{x+p}$$

und

6) $$\Sigma(f_{x+p}) = [\Sigma(f_x)]_{x+p},$$

wenn zur Rechten unter

$[\Delta f_x]_{x+p}$ und $[\Sigma(f_x)]_{x+p}$

das verstanden wird, was bezüglich aus Δf_x und Σf_x hervorgeht, wenn zuletzt $x+p$ statt x gesetzt wird.

Die Differenzen-Formeln I. — V.) fallen von selbst in die Augen, sobald man $\Delta F_x = F_{x+h} - F_x$ nimmt. So ist z. B. nach diesem Schema

$$\Delta(\varphi_x \cdot \psi_x) = \varphi_{x+h} \cdot \psi_{x+h} - \varphi_x \cdot \psi_x.$$

Nun ist aber $\varphi_{x+h} = \varphi_x + \Delta\varphi_x$ und $\psi_{x+h} = \psi_x + \Delta\psi_x$; substituirt man daher diese Werthe statt φ_{x+h} und ψ_{x+h}, so ergiebt sich augenblicklich die V.).

Was die VI.) betrifft, so ist

$$\Delta(f_{x+p}) = f_{x+p+h} - f_{x+p}$$

und

$$\Delta(f_x) = f_{x+h} - f_x.$$

Setzt man aber in letzterer Gleichung $x+p$ statt x, so geht zur Rechten das hervor, was zur Rechten der erstern Gleichung schon steht.

Die Summen-Formeln 1. — 5.) sind aber aus diesen Differenzen-Formeln, durch Umkehrung dieser letztern, gebildet. — Von der Richtigkeit derselben kann man sich auch dadurch überzeugen, daß man von den Ausdrücken zur Rechten die Differenzen nimmt und sich überzeugt, daß diese die links unter dem Σ befindlichen Funktionen wieder geben.

§. 105.

Als Differenzen und Integrale einiger der einfachsten Funktionen heben wir noch hervor:

1) $\Delta(x) = h$, also $\Sigma(1) = \frac{x}{h} + C_x$;

2) $\Delta(a^x) = a^x(a^h - 1)$, also $\Sigma(a^x) = \frac{a^x}{a^h - 1} + C_x$;

3) $\Delta^2(a^x) = a^x \cdot (a^h - 1)^2$

und $\Sigma^2(a^x) = \frac{a^x}{(a^h - 1)^2} + \Sigma(C_x) + C'_x$;

während $\Sigma C_x = C_x \cdot \Sigma(1) = C_x \cdot \frac{x}{h}$ genommen werden kann;

4) $\Delta^3(a^x) = a^x \cdot (a^h - 1)^3$

und $\Sigma^3(a^x) = \frac{a^x}{(a^h - 1)^3} + \frac{1}{h} \cdot C_x \cdot \Sigma(x) + C'_x \cdot \frac{x}{h} + C''_x$;

5) $\Delta^n(a^x) = a^x \cdot (a^h - 1)^n$

und $\Sigma^n(a^x) = \frac{a^x}{(a^h-1)^n} + \frac{1}{h}(C_x \cdot \Sigma^{n-2}(x) + C'_x \cdot \Sigma^{n-3}(x) + \cdots + C_x^{(n-3)} \cdot \Sigma(x) + C_x^{(n-2)} \cdot x) + C_x^{(n-1)}$,

wenn nur C_x, C'_x, C''_x, etc. etc. $C_x^{(n-2)}$ und $C_x^{(n-1)}$ lauter periodische oder absolute, jedesmal aber willkührliche Constanten sind. — Ferner ist noch

6) $\Delta(x^m) = m_1 \cdot x^{m-1} \cdot h + m_2 \cdot x^{m-2} \cdot h^2 + m_3 \cdot x^{m-3} \cdot h^3 + \cdots$,

wo m_1, m_2, m_3, etc. etc. Binomial-Koefficienten sind, und wo die Reihe zur Rechten eine unendliche ist, so oft m keine positive ganze Zahl ist, dagegen mit dem Gliede h^m abbricht, so oft m eine positive ganze Zahl wirklich ist.

Das Integral $\Sigma(x^m)$ findet sich dagegen nicht so leicht, wie wir weiter unten sehen werden.

Anmerkung. Entwickelt man $\Delta^2(x^m)$ nach (steigenden) Potenzen von h, so fängt die Reihe (nach §. 100.) mit $\partial^2(x^m)_x \cdot h^2$ d. h. mit $m^{2I-1} \cdot x^{m-2} h^2$ an. Eben so fangen die nach (steigenden) Potenzen von h geordneten Reihen für $\Delta^3(x^m)$, $\Delta^4(x^m)$ etc. etc. bezüglich mit den Gliedern $m^{3I-1} \cdot x^{m-3} h^3$, $m^{4I-1} \cdot x^{m-4} h^4$, etc. etc. an. Die nach (steigenden) Potenzen von h geordnete Reihe, welche $\Delta^m(x^m)$ ausdrückt, fängt also mit dem Gliede $m^{mI-1} \cdot x^{m-m} h^m$ d. h. mit dem Gliede $m! h^m$ an.

§. 106.

Unter den öfter vorkommenden Differenzen, welche sich auch leicht finden lassen, heben wir noch heraus:

A) Ist m eine positive oder negative ganze Zahl oder Null, so ist:

1) $\Delta(x^{mIh}) = m \cdot h \cdot (x+h)^{m-1Ih}$,

also $\Delta_1(x^{mI1}) = m(x+1)^{m-1I1}$;

2) $\Delta^2(x^{mIh}) = m^{2I-1} \cdot h^2 \cdot (x+2h)^{m-2Ih}$,

also

also $\Delta_1^2(x^{mI1}) = m^{2I-1} \cdot (x+2)^{m-2I1}$;

3) $\Delta^3(x^{mIh}) = m^{3I-1} \cdot h^3 \cdot (x+3h)^{m-3Ih}$,

also $\Delta_1^3(x^{mI1}) = m^{3I-1} \cdot (x+3)^{m-3I1}$;

und allgemein

(⊙)··· $\Delta^n(x^{mIh}) = m^{nI-1} \cdot h^n \cdot (x+nh)^{m-nIh}$,

also $\Delta_1^n(x^{mI1}) = m^{nI-1} \cdot (x+n)^{m-nI1}$,

wenn nur n positiv ganz ist.

B. Ist abermals m eine positive oder negative ganze Zahl oder Null, so ist noch

1) $\Delta(x^{mI-h}) = m \cdot h \cdot x^{m-1I-h}$,

also $\Delta_1(x^{mI-1}) = m \cdot x^{m-1I-1}$;

2) $\Delta^2(x^{mI-h}) = m^{2I-1} \cdot h^2 \cdot x^{m-2I-h}$,

also $\Delta_1^2(x^{mI-1}) = m^{2I-1} \cdot x^{m-2I-1}$;

3) $\Delta^3(x^{mI-h}) = m^{3I-1} \cdot h^3 \cdot x^{m-3I-h}$,

also $\Delta_1^3(x^{mI-1}) = m^{3I-1} \cdot x^{m-3I-1}$;

und allgemein

(℃)··· $\Delta^n(x^{mI-h}) = m^{nI-1} \cdot h^n \cdot x^{m-nI-h}$,

also $\Delta_1^n(x^{mI-1}) = m^{nI-1} \cdot x^{m-nI-1}$,

wenn n positiv ganz vorausgesetzt wird *).

C. Deshalb findet man auch noch, wenn man die Differenzen der Binomial-Koefficienten aufsucht, folgendes:

1) $\Delta\left(\left(\frac{x}{h}\right)_m\right) = \left(\frac{x}{h}\right)_{m-1}$; also $\Delta_1(x_m) = x_{m-1}$;

2) $\Delta^2\left(\left(\frac{x}{h}\right)_m\right) = \left(\frac{x}{h}\right)_{m-2}$; also $\Delta_1^2(x_m) = x_{m-2}$;

3) $\Delta^3\left(\left(\frac{x}{h}\right)_m\right) = \left(\frac{x}{h}\right)_{m-3}$; also $\Delta_1^3(x_m) = x_{m-3}$;

und allgemeiner

---

*) Die Formel B. 1.) geht auch aus der Formel A. 1.) hervor, wenn man in letzterer $-h$ statt h schreibt, zur Rechten aber noch $x+h$ statt x setzt, und das Ganze noch mit dem (—) Zeichen versieht, oder mit dem entgegengesetzten Zeichen nimmt.

(♂)… $\Delta^n\left(\left(\frac{x}{h}\right)_m\right) = \left(\frac{x}{h}\right)_{m-n}$; also $\Delta_1^n(x_m) = x_{m-n}$;

wo aber m und n zugleich positiv ganz vorausgesetzt sind.

§. 107.

Kehrt man die Formeln des §. 106.) um, so ergiebt sich noch folgendes:

A. Ist m eine positive oder eine negative ganze Zahl oder Null, so ist:

1) $\Sigma(x^{mIh}) = \frac{(x-h)^{m+1Ih}}{(m+1)\cdot h}$, also $\Sigma_1(x^{mIt}) = \frac{(x-1)^{m+1It}}{m+1}$;

2) $\Sigma^2(x^{mIh}) = \frac{(x-2h)^{m+2Ih}}{(m+2)^{2I-1}\cdot h^2}$, also $\Sigma_1^2(x^{mIt}) = \frac{(x-2)^{m+2It}}{(m+2)^{2I-1}}$;

3) $\Sigma^3(x^{mIh}) = \frac{(x-3h)^{m+3Ih}}{(m+3)^{3I-1}\cdot h^3}$, also $\Sigma_1^3(x^{mIt}) = \frac{(x-3)^{m+3It}}{(m+3)^{3I-1}}$;

und allgemein

(⊙) $\Sigma^n(x^{mIh}) = \frac{(x-n\cdot h)^{m+nIh}}{(m+n)^{nI-1}\cdot h^n}$, also $\Sigma_1^n(x^{mIt}) = \frac{(x-n)^{m+nIt}}{(m+n)^{nI-1}}$.

B. Und ist m wiederum eine positive oder eine negative ganze Zahl oder Null, so ist noch

1) $\Sigma(x^{mI-h}) = \frac{x^{m+1I-h}}{(m+1)\cdot h}$, also $\Sigma_1(x^{mI-1}) = \frac{x^{m+1I-1}}{m+1}$;

2) $\Sigma^2(x^{mI-h}) = \frac{x^{m+2I-h}}{(m+2)^{2I-1}\cdot h^2}$, also $\Sigma_1^2(x^{mI-1}) = \frac{x^{m+2I-1}}{(m+2)^{2I-1}}$;

3) $\Sigma^3(x^{mI-h}) = \frac{x^{m+3I-h}}{(m+3)^{3I-1}\cdot h^3}$, also $\Sigma_1^3(x^{mI-1}) = \frac{x^{m+3I-1}}{(m+3)^{3I-1}}$;

und allgemein

(ℂ)… $\Sigma^n(x^{mI-h}) = \frac{x^{m+nI-h}}{(m+n)^{nI-1}\cdot h^n}$,

also $\Sigma_1^n(x^{mI-1}) = \frac{x^{m+nI-1}}{(m+n)^{nI-1}}$.

C. Und für die Binomial-Koefficienten, wenn unter m entweder Null oder eine positive ganze Zahl verstanden wird:

1) $\Sigma\left(\left(\frac{x}{h}\right)_m\right) = \left(\frac{x}{h}\right)_{m+1}$, also $\Sigma_1(x_m) = x_{m+1}$;

2) $\Sigma^2\left(\left(\frac{x}{h}\right)_m\right) = \left(\frac{x}{h}\right)_{m+2}$, also $\Sigma_1^2(x_m) = x_{m+2}$;

und allgemein

(♂)... $\Sigma^n\left(\left(\frac{x}{h}\right)_m\right) = \left(\frac{x}{h}\right)_{m+n}$, also $\Sigma_1^n(x_m) = x_{m+n}$;

Zu allen diesen endlichen Integralen müssen aber zur Rechten noch die Glieder hinzugefügt werden, welche dadurch entstehen, daß bei jeder neuen Integration eine neue willkührliche periodische Constante noch hinzutritt. Diese Glieder sind in den Formeln 2. — 5. des §. 105.) zu sehen, und werden für Σ_1^n diese, nämlich

$$C_x \cdot \Sigma^{n-1}(x) + C_x' \cdot \Sigma^{n-2}(x) + C_x'' \cdot \Sigma^{n-3}(x) + \ldots + C_x^{(n-2)} \cdot \Sigma(x) + C_x^{(n-1)},$$

wo C_x, C_x', C_x'', ... $C_x^{(n-1)}$ eben so viele willkührliche periodische oder absolute Constanten vorstellen.

§. 108.

Für die trigonometrischen Funktionen findet man

1) $\Delta(\sin x) = 2\sin \frac{1}{2}h \cdot \cos(x + \frac{1}{2}h)$;

2) $\Delta(\cos x) = -2\sin \frac{1}{2}h \cdot \sin(x + \frac{1}{2}h)$;

und nimmt man hiervon wieder die Differenzen, so findet man bald

I. $$\begin{cases} \Delta^{2n}(\sin x) = \pm 2^{2n} \cdot (\sin \frac{1}{2}h)^{2n} \cdot \sin(x + n \cdot h); \\ \Delta^{2n+1}(\sin x) = \pm 2^{2n+1} \cdot (\sin \frac{1}{2}h)^{2n+1} \cdot \cos(x + (n + \frac{1}{2})h); \end{cases}$$

so wie

II. $$\begin{cases} \Delta^{2n}(\cos x) = \pm 2^{2n} \cdot (\sin \frac{1}{2}h)^{2n} \cdot \cos(x + nh); \\ \Delta^{2n+1}(\cos x) = \mp 2^{2n+1} \cdot (\sin \frac{1}{2}h)^{2n+1} \cdot \sin(x + (n + \frac{1}{2})h); \end{cases}$$

wo man die obern (+ oder —) Zeichen nehmen muß, wenn n eine gerade Zahl, die untern dagegen, wenn n ungerade ist*).

Kehrt man aber auch diese Formeln um, so findet sich noch eben so leicht:

$$3)\qquad \Sigma(\cos x) = \frac{\sin(x-\frac{1}{2}h)}{2\sin\frac{1}{2}h};$$

$$4)\qquad \Sigma(\sin x) = -\frac{\cos(x-\frac{1}{2}h)}{2\sin\frac{1}{2}h};$$

und allgemeiner

$$\text{III.}\quad \begin{cases} \Sigma^{2n}(\cos x) = \pm\dfrac{\cos(x-n\cdot h)}{2^{2n}\cdot(\sin\frac{1}{2}h)^{2n}}; \\ \Sigma^{2n+1}(\cos x) = \pm\dfrac{\sin(x-(n+\frac{1}{2})h)}{2^{2n+1}\cdot(\sin\frac{1}{2}h)^{2n+1}}; \end{cases}$$

$$\text{IV.}\quad \begin{cases} \Sigma^{2n}(\sin x) = \pm\dfrac{\sin(x-n\cdot h)}{2^{2n}\cdot(\sin\frac{1}{2}h)^{2n}}; \\ \Sigma^{2n+1}(\sin x) = \mp\dfrac{\cos(x-(n+\frac{1}{2})\cdot h)}{2^{2n+1}\cdot(\sin\frac{1}{2}h)^{2n+1}}; \end{cases}$$

wo die obern + oder — Zeichen genommen werden müssen, wenn m eine gerade Zahl ist, die untern aber, wenn m ungerade gedacht wird.

Anmerkung. Weil aus $f_{x+h}-f_x=\varphi_x$, auch, sobald $x+a$ statt x gesetzt wird, $f_{x+a+h}-f_{x+a}=\varphi_{x+a}$ hervorgeht, so folgt, daß, wenn $\Delta f_x=\varphi_x$ ist, dann auch $\Delta(f_{x+a})=\varphi_{x+a}=\Delta f_{x+a}$ seyn müsse. Deshalb gelten alle vorstehenden Formeln der Differenzen noch, wenn man statt Funktionen von x,

---

*) Legendre hat auch noch die Relation

$$\Delta^n(\sin x) = -(2\sin\tfrac{1}{2}h)^2\cdot[\Delta^{n-1}(\sin x)+\Delta^{n-2}(\sin x)]$$

hingestellt. Sie läßt sich leicht beweisen; auch dadurch leicht finden, daß man $\Delta^{2a}(\sin x)$ und $\Delta^{2a+1}(\sin x)$ der Form nach, aber mit unbestimmten Koefficienten annimmt und dann die Vergleichung anstellt. Doch muß der Beweis, oder die Auffuchung zweimal durchgeführt werden; einmal für den Fall, daß n eine gerade Zahl, und dann noch für den andern Fall, daß n ungerade ist.

Funktionen von $x+a$ nimmt, während a selbst noch h enthalten kann.

§. 109.

Aufgabe.

Man soll die Summe $\Sigma(x^m)$ finden unter der Voraussetzung, daß m eine positive ganze Zahl ist.

Auflösung. A. Man hat (nach §. 105. N. 6.)

$$\Delta(x^r) = r\cdot x^{r-1}\cdot h + r_2\cdot x^{r-2}\cdot h^2 + r_3\cdot x^{r-3}\cdot h^3 + \cdots + r\cdot x\cdot h^{r-1} + h^r.$$

Nimmt man nun hier links und rechts die Summe (das endliche Integral nach x), so erhält man, wenn noch überdies m statt $r-1$ gesetzt wird, ohne viele weitere Rechnung

$$(\odot)\cdots \quad \Sigma(x^m) = \frac{x^{m+1}}{(m+1)h} - \left[\tfrac{1}{2}m\cdot h\cdot\Sigma(x^{m-1}) + \tfrac{1}{3}m_2\cdot h^2\cdot\Sigma(x^{m-2}) + \cdots + \frac{1}{m+1}\cdot h^m\cdot\Sigma(1)\right].$$

B. Diese Formel giebt nun, wenn nach und nach 0, 1, 2, 3, 4, etc. etc. statt m gesetzt wird,

1) $\Sigma(x^0) = \frac{x}{h}$; d. h. $\Sigma(1) = \frac{x}{h}$;

2) $\Sigma(x^1) = \frac{1}{2}\frac{x^2}{h} - \frac{1}{2}x$; d. h. $\Sigma(x) = \frac{1}{2}\frac{x^2}{h} - \frac{1}{2}x$;

3) $\Sigma(x^2) = \frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{h} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2\cdot3}x\cdot h$;

4) $\Sigma(x^3) = \frac{1}{4}\cdot\frac{x^4}{h} - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2\cdot2}x^2\cdot h$;

5) $\Sigma(x^4) = \frac{1}{5}\cdot\frac{x^5}{h} - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3\cdot h - \frac{1}{5\cdot6}x\cdot h^3$;

6) $\Sigma(x^5) = \frac{1}{6}\cdot\frac{x^6}{h} - \frac{1}{2}x^5 + \frac{5}{2\cdot6}x^4\cdot h - \frac{1}{2\cdot6}x^2\cdot h^3$;

u. s. w. f.

C. Um aber das Gesetz besser zu übersehen, nach welchem sich diese Zahlen-Koefficienten richten, so setze man

1) $$\Sigma(x^m) = A\cdot x^{m+1} + B_0\cdot x^m + B_1\cdot x^{m-1} + B_2\cdot x^{m-2} + B_3\cdot x^{m-3} + \cdots,$$

nehme links und rechts die Differenzen, so daß man erhält

2) $$x^m = A(m+1)\cdot x^m\cdot h + \left[\begin{matrix}A(m+1)_2\cdot h^2\\ +B_0 m_1\cdot h\end{matrix}\right]\cdot x^{m-1} + \left|\begin{matrix}A(m+1)_3\cdot h^3\\ +B_0 m_2\cdot h_2\\ +B_1(m-1)_1\cdot h\end{matrix}\right|\cdot x^{m-2}$$
$$+[A(m+1)_4\cdot h^4 + B_0 m_3\cdot h^3 + B_1(m-1)_2\cdot h^2 + B_2(m-2)_1\cdot h]\cdot x^{m-3} + \text{etc. etc.}$$

Hieraus folgt

$$1 = A(m+1)h;$$

während jeder der übrigen Koefficienten (von x^{m-1}, x^{m-2}, x^{m-3}, etc. etc.) zur Rechten, der Null gleich ist. Aus diesen Gleichungen ergiebt sich nun

$$A = \frac{1}{(m+1)\cdot h},$$

und jeder der folgenden Koefficienten B_0, B_1, B_2, etc. etc. durch die vorhergehenden ausgedrückt, nach einem in die Augen fallenden Gesetze. Berechnet man danach die ersten 12 Koefficienten, so erhält man zuletzt

3) $$\Sigma(x^m) = \frac{x^{m+1}}{(m+1)h} - \tfrac{1}{2}x^m + \frac{1}{2\cdot 3}\cdot\tfrac{1}{2}m\cdot h\cdot x^{m-1}$$
$$- \frac{1}{6\cdot 5}\cdot\tfrac{1}{4}m_3\cdot h^3\cdot x^{m-3} + \frac{1}{6\cdot 7}\cdot\tfrac{1}{6}m_5\cdot h^5\cdot x^{m-5}$$
$$- \frac{3}{10\cdot 9}\cdot\tfrac{1}{8}m_7\cdot h^7\cdot x^{m-7} + \frac{5}{6\cdot 11}\cdot\tfrac{1}{10}m_9\cdot h^9\cdot x^{m-9}$$
$$- \frac{691}{210\cdot 13}\cdot\tfrac{1}{12}m_{11}\cdot h^{11}\cdot x^{m-11} + \frac{35}{2\cdot 15}\cdot\tfrac{1}{14}m_{13}$$
$$\times h^{13}\cdot x^{m-13} - \frac{3617}{30\cdot 17}\cdot\tfrac{1}{16}\cdot m_{15}\cdot h^{15}\cdot x^{m-15}$$
$$+ \frac{43867}{42\cdot 19}\cdot\tfrac{1}{18}m_{17}\cdot h^{17}\cdot x^{m-17}$$
$$- \frac{1222277}{110\cdot 21}\cdot\tfrac{1}{20}m_{19}\cdot h^{19}\cdot x^{m-19} + \text{etc. etc.}$$

Diese Reihe bricht für jeden besondern Werth von m, welcher der gemachten Voraussetzung zufolge eine positive ganze Zahl seyn muß, von selber ab, so daß nie eine negative Potenz von x erscheint.

D. Diese Formel 3.) befolgt ein in die Augen fallendes Gesetz, sobald man auf die Zahlen-Koefficienten nicht Rücksicht nimmt. Bezeichnet man diese Zahlen-Koefficienten, deren Gesetz noch nicht einleuchtet, durch $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_3, \mathfrak{B}_5, \mathfrak{B}_7$, etc. etc., so kann man diese Formel 3.) auch so schreiben, nämlich

$$(\mathfrak{C})\cdots \quad \Sigma(x^m) = \frac{x^{m+1}}{(m+1)\cdot h} - \tfrac{1}{2}x^m + \mathfrak{B}_1 \cdot m_1 \cdot \frac{h}{2} \cdot x^{m-1}$$
$$- \mathfrak{B}_3 \cdot m_3 \cdot \frac{h^3}{4} \cdot x^{m-3} + \mathfrak{B}_5 \cdot m_5 \cdot \frac{h^5}{6} \cdot x^{m-5}$$
$$- \mathfrak{B}_7 \cdot m_7 \cdot \frac{h^7}{8} \cdot x^{m-7} + \mathfrak{B}_9 \cdot m_9 \cdot \frac{h^9}{10} \cdot x^{m-9} - \text{etc.}$$

und man nennt die Koefficienten $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_3, \mathfrak{B}_5, \mathfrak{B}_7, \mathfrak{B}_9$, etc. etc. die Bernoulli'schen Zahlen*).

Um das Gesetz zu erhalten, nach welchem diese Koefficienten sich richten, hat Moivre diese Summe $\Sigma(x^m)$ zwischen den Grenzen x und $x+h$ genommen, und dann 0 statt x gesetzt. Da nämlich

$$[\Sigma(x^m)]_{x+h} - \Sigma(x^m) = \Delta(\Sigma(x^m)) = x^m$$

ist; da es ferner einerlei ist, ob man $x+h$ statt x und dann $x=0$, oder lieber sogleich $0+h$ d. h. h statt x setzt; und weil endlich die Glieder rechts (in $\mathfrak{C}$.) für $x=0$ verschwinden, so erhält man auf diesem Wege, nachdem durch h^m noch wegdividirt worden, die Gleichung:

---

*) Jacob Bernoulli ist auf diese Zahlen zuerst gestoßen, indem sie den Koefficienten des letzten Gliedes bilden in dem Ausdrucke, welcher die Summe der unendlichen Reihe

$$S\left[\frac{1}{(a+1)^{2n}}\right] \text{ oder } 1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \frac{1}{5^{2n}} + \cdots \text{ in inf.}$$

liefert.

$$(\sigma)\cdots\quad 0=\frac{1}{m+1}-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}m_1\cdot\mathfrak{B}_1-\tfrac{1}{4}m_3\cdot\mathfrak{B}_3+\tfrac{1}{6}m_5\cdot\mathfrak{B}_5-\tfrac{1}{8}m_7\cdot\mathfrak{B}_7+\text{etc. etc.}$$

Und setzt man hier nach und nach 2, 4, 6, 8, etc. etc. statt m, so erhält man zur Bestimmung der Bernoulli'schen Zahlen, die Gleichungen:

1) $0=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\mathfrak{B}_1$;
2) $0=\frac{1}{5}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot 4\cdot\mathfrak{B}_1-\mathfrak{B}_3$;
3) $0=\frac{1}{7}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot 6\cdot\mathfrak{B}_1-\frac{1}{4}\cdot 6_3\cdot\mathfrak{B}_3+\mathfrak{B}_5$;
4) $0=\frac{1}{9}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot 8\cdot\mathfrak{B}_1-\frac{1}{4}\cdot 8_3\cdot\mathfrak{B}_3+\frac{1}{6}\cdot 8_5\cdot\mathfrak{B}_5-\mathfrak{B}_7$;
5) $0=\frac{1}{11}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot 10\cdot\mathfrak{B}_1-\frac{1}{4}\cdot 10_3\cdot\mathfrak{B}_3+\frac{1}{6}\cdot 10_5\cdot\mathfrak{B}_5-\frac{1}{8}\cdot 10_7\cdot\mathfrak{B}_7+\mathfrak{B}_9$;

u. s. w. f.

Berechnet man danach diese Bernoulli'schen Zahlen, so erhält man

$$\mathfrak{B}_1=0{,}1666666666666$$
$$\mathfrak{B}_3=0{,}0333333333333$$
$$\mathfrak{B}_5=0{,}0238095238095$$
$$\mathfrak{B}_7=0{,}0333333333333$$
$$\mathfrak{B}_9=0{,}0757575757575$$
$$\mathfrak{B}_{11}=0{,}2531135531135$$
$$\mathfrak{B}_{13}=1{,}1666666666666$$
$$\mathfrak{B}_{15}=7{,}0921568627451$$

u. s. w. f.

Die ersten 15 dieser Bernoulli'schen Zahlen findet man von Euler berechnet. Die nächsten 10 (also bis zur 25ten inklusive) hat Rothe berechnet und in der Hallenser allgemeinen Litteratur-Zeitung März 1817. Nro. 63. mitgetheilt. — Später hat Rothe noch die folgenden 6 berechnet (also bis zur 31ten inkl.), welche wir im Manuscripte vor uns liegen haben, und welche wir, einem erhaltenen Auftrage gemäß, der Redaktion des Crelle'schen Journals für Mathematik zur Bekanntmachung zusenden werden.

§. 110.

Ist aber die Aufgabe des §. 109.) gelöst, so kann man die Summe (das endliche Integral) von jeder ganzen Funktion von x finden, weil man hat

$$\Sigma(A\cdot x^{\alpha}+B\cdot x^{\beta}+C\cdot x^{\gamma}+\cdots)=A\cdot\Sigma(x^{\alpha})+B\cdot\Sigma(x^{\beta})+C\cdot\Sigma(x^{\gamma})+\cdots$$

Dieselbe läßt sich aber auch genau so finden, wie im vorhergehenden §. 109.) die Summe $\Sigma(x^m)$ gefunden worden ist. Man nimmt nämlich

$$\Sigma(A_0\cdot x^m+A_1\cdot x^{m-1}+A_2\cdot x^{m-2}+\cdots)=A\cdot x^{m+1}+B_0\cdot x^m+B_1\cdot x^{m-1}+B_2\cdot x^{m-2}+\text{etc. etc.}$$

an, nimmt links und rechts die Differenzen, und vergleicht dann auf jeder Seite die gleichnamigen Glieder mit einander, und man wird die Gleichungen haben, aus denen sich die unbestimmten Koefficienten A und B_0, B_1, B_2, etc. etc. finden lassen.

§. 111.

Zur Auffindung der Summen (der endlichen Integrale) von gebrochenen algebraischen rationalen Funktionen von x, hat man außer den Formeln A. B. des §. 107.), wenn m negativ gedacht wird, fast gar nichts. Man pflegt gewöhnlich noch die Formel

$$\Delta\left(\frac{A}{x+a}\right)=\frac{A}{x+a+h}-\frac{A}{x+a}$$

umzukehren, so daß man

$$(\varphi)\cdots\qquad \Sigma\left(\frac{A}{x+a+h}-\frac{A}{x+a}\right)=\frac{A}{x+a}$$

oder

$$\Sigma\left(\frac{A}{x+a+h}\right)=\Sigma\left(\frac{A}{x+a}\right)+\frac{A}{x+a}$$

erhält. Hernach zerlegt man die gebrochene Funktion, deren Summe gefunden werden soll, in Parzialbrüche, und sucht letztere paarweise so zu ordnen, daß allemal die Summe (das Integral) eines Paares nach der Formel φ.) gefunden werden kann;

Soll z. B. $\Sigma\left(\frac{3x+2h}{x(x+h)(x+2h)}\right)$ gefunden werden, so zerlegt man zunächst den gegebenen Bruch in seine Partial-Brüche, so daß man erhält

$$1)\qquad \frac{3x+2h}{x(x+h)(x+2h)}=\frac{1}{h}\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{h}\cdot\frac{1}{x+h}-\frac{2}{h}\cdot\frac{1}{x+2h}.$$

Man hat nun nach der Formel (♀)

$$2)\quad \Sigma\left(\frac{1}{x+2h}\right)=\Sigma\left(\frac{1}{x+h}\right)+\frac{1}{x+h};$$

und

$$3)\quad \Sigma\left(\frac{1}{x+h}\right)=\Sigma\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x};$$

also

$$4)\quad \Sigma\left(\frac{1}{x+2h}\right)=\Sigma\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x}+\frac{1}{x+h}.$$

Man erhält daher, wenn man von 1.) links und rechts die Summen nimmt, dann aber rechts statt $\Sigma\frac{1}{x+2h}$ und $\Sigma\frac{1}{x+h}$ ihre Werthe aus 3. und 4.) substituirt,

$$\Sigma\frac{3x+2h}{x(x+h)(x+2h)}=-\frac{2}{h}\cdot\frac{1}{x+h}-\frac{1}{h}\cdot\frac{1}{x}=-\frac{1}{h}\cdot\frac{3x+2h}{x(x+h)}.$$

§. 112.

Uebergehen wir die Summen (d. h. die endlichen Integrale) der irrationalen algebraischen Funktionen, über welche man methodisch wenig oder nichts sagen kann, und suchen wir bloß noch die Summen von einigen besonderen Formen transcendenter Funktionen.

A. Man findet die Summe

$$1)\quad \Sigma(a^x\cdot(A_0+A_1\cdot x+A_2\cdot x^2+A_3\cdot x^3+\cdots+A_m\cdot x^m))$$

dadurch, daß man solche

$$2)\quad =a^x\cdot(K_0+K_1\cdot x+K_2\cdot x^2+K_3\cdot x^3+\cdots+K_m\cdot x^m)$$

setzt, dann von beiden Seiten dieser Gleichung die Differenzen nimmt, und nun die gleichnamigen Glieder mit einander vergleicht. Man findet auf diesem Wege:

$$A_0=-K_0+a^h\cdot(K_0+K_1\cdot h+K_2\cdot h^2+\cdots+K_m\cdot h^m)$$
$$A_1=-K_1+a^h\cdot(K_1+2K_2\cdot h+3K_3\cdot h^2+\cdots+mK_m\cdot h^{m-1})$$
$$A_2=-K_2+a^h\cdot(K_2+3K_3\cdot h+6K_4\cdot h^2+\cdots+m_2K_m\cdot h^{m-2})$$
$$A_3=-K_3+a^h\cdot(K_3+4K_4\cdot h+\quad\cdots\quad+m_3K_m\cdot h^{m-3})$$

u. s. w. f.; zuletzt

$$A_m=-K_m+a^h\cdot K_m;$$

aus welchen Gleichungen die unbestimmten Koefficienten K_0, K_1, K_2, K_3, etc. etc. K_m sich bestimmen lassen.

So findet man

$$\Sigma(a^x(A_0+A_1x+A_2x^2))$$

$$=a^x.\frac{a^{2h}(A_0-A_1\cdot h+A_2\cdot h^2)-a^h(2A_0-A_1\cdot h-A_2\cdot h^2)+A_0}{(a^h-1)^3}$$

$$+a^x.\frac{a^h(A_1-2A_2\cdot h)-A_1}{(a^h-1)^2}\cdot x+a^x.\frac{A_2}{a^h-1}\cdot x^2.$$

B. Will man

$$\Sigma(\sin x^m\cdot\cos x^n)$$

finden, unter der Voraussetzung, daß m und n positive ganze Zahlen sind, so verwandle man die Funktion $\sin x^m\cdot\cos x^n$ in eine Reihe von Gliedern von der Form

$$A\cdot\sin qx \quad \text{und} \quad A\cdot\cos qx$$

und nehme dann von jedem einzelnen Gliede das endliche Integral, indem man folgende Formeln anwendet, nämlich

1) $$\Sigma\sin(p+qx)=-\frac{\cos(p+qx-\frac{1}{2}q\cdot h)}{2\sin(\frac{1}{2}q\cdot h)};$$

2) $$\Sigma\cos(p+qx)=\frac{\sin(p+qx-\frac{1}{2}q\cdot h)}{2\sin(\frac{1}{2}q\cdot h)};$$

Und ist ein Glied dabei von der Form

$$A\cdot\cos 0x \quad \text{oder} \quad A,$$

so bekommt die Summe noch das Glied $A\frac{x}{h}$.

C. Man hat auch noch versucht die Summen

$$\Sigma(x^{/p}\cdot\sin x) \quad \text{und} \quad \Sigma(x^{/p}\cdot\cos x)$$

zu finden, unter der Voraussetzung, daß x' eine gegebene Funktion von x ist, deren zu der Differenz h von x gehörige Differenz $\Delta(x')$ durch h' bezeichnet seyn mag. — Das Verfahren dabei ist dasselbe, wie das vorher beobachtete. Man geht nämlich von einer dazu geeigneten Differenz aus, oder von zweien, findet aus den Gleichungen die Ausdrücke $x^{/p}\cdot\sin x$ und $x^{/p}\cdot\cos x$, und nimmt dann von diesen neuen Gleichungen

wieder die Summe, in der Hoffnung dadurch Reduktionsformeln zu bekommen, wie dies im §. 109.) der Fall gewesen ist, wo $\Sigma(x^m)$ in $\Sigma(x^{m-1})$, $\Sigma(x^{m-2})$, $\Sigma(x^{m-3})$, etc. etc. ausgedrückt sich gezeigt hat.

Die Durchführung der Rechnung ist folgende:

Es ist, wenn man die Differenzen nach x nimmt, d. h. statt jedes x jetzt $x+h$, und deshalb statt $x^{(p)}$ jetzt $x^{(p)}+\Delta x^{(p)}$ d. h. $x^{(p)}+h^{(p)}$ schreibt, und die Funktion im alten Zustande von ihr im neuen Zustande subtrahirt,

1) $$\Delta((x^{(p)}-h^{(p)})\cdot cos\,(x-\tfrac{1}{2}h)) = x^{(p)}\cdot cos\,(x+\tfrac{1}{2}h) - (x^{(p)}-h^{(p)})\cdot cos\,(x-\tfrac{1}{2}h) = (p_1\cdot x^{(p-1)}\cdot h^{(p)} - p_2\cdot x^{(p-2)}\cdot h^{(2)} + p_3\cdot x^{(p-3)}\cdot h^{(3)} - \ldots)\cdot cos\,(x-\tfrac{1}{2}h) + x^{(p)}\cdot[cos\,(x+\tfrac{1}{2}h) - cos\,(x-\tfrac{1}{2}h)]$$

2) $$\Delta((x^{(p)}-h^{(p)})\cdot sin\,(x-\tfrac{1}{2}h)) = x^{(p)}\cdot sin\,(x+\tfrac{1}{2}h) - (x^{(p)}-h^{(p)})\cdot sin\,(x-\tfrac{1}{2}h) = (p_1\cdot x^{(p-1)}\cdot h^{(p)} - p_2\cdot x^{(p-2)}\cdot h^{(2)} + p_3\cdot x^{(p-3)}\cdot h^{(3)} - \ldots)\cdot sin\,(x-\tfrac{1}{2}h) + x^{(p)}\cdot[sin\,(x+\tfrac{1}{2}h) - sin\,(x-\tfrac{1}{2}h)].$$

Findet man nun aus diesen Gleichungen 1.) und 2.), nachdem man vorher die Differenzen der Kosinus und der Sinus in Produkte verwandelt hat, so daß $x^{(p)}\cdot sin\,x$ und $x^{(p)}\cdot cos\,x$ darin erscheinen, die Werthe dieser letztern, und nimmt man dann von diesen neuen Gleichungen links und rechts die Summen nach x, so erhält man, wenn zu gleicher Zeit $h^{(p)}$ d. h. $\Delta x^{(p)}$ nach x constant gedacht wird,

3) $$\Sigma(x^{(p)}\cdot sin\,x) = -\frac{(x^{(p)}-h^{(p)})\cdot cos\,(x-\frac{1}{2}h)}{2sin\,\frac{1}{2}h} + \frac{1}{2sin\,\frac{1}{2}h} \times \{p_1\cdot h^{(p)}\cdot\Sigma(x^{(p-1)}\cdot cos\,(x-\tfrac{1}{2}h)) - p_2\cdot h^{(2)}\cdot\Sigma x^{(p-2)}\cdot cos\,(x-\tfrac{1}{2}h) + p_3\cdot h^3\cdot\Sigma x^{(p-3)}\cdot cos\,(x-\tfrac{1}{2}h) - \text{ etc. etc.}\}$$

4) $$\Sigma(x^{(p)}\cdot cos\,x) = \frac{(x^{(p)}-h^{(p)})\cdot sin\,(x-\frac{1}{2}h)}{2sin\,\frac{1}{2}h} - \frac{1}{2sin\,\frac{1}{2}h} \times \{p_1\cdot h\cdot\Sigma x^{(p-1)}\cdot sin\,(x-\tfrac{1}{2}h) - p_2\cdot h^2\cdot\Sigma x^{(p-2)}\cdot sin\,(x-\tfrac{1}{2}h) + p_3\cdot h^3\cdot\Sigma x^{(p-3)}\cdot sin\,(x-\tfrac{1}{2}h) - \text{ etc. etc.}\}.$$

Dies sind die gesuchten Reduktions-Formeln *). — Setzt man in ihnen nach und nach 1, 2, 3, 4, 5, etc. etc. statt p, so erhält man die verlangten Summen aus einander.

Namentlich findet sich für $p = 1$, wenn man zugleich die Formeln B. 1. und 2.) zu Hülfe nimmt,

$$5)\quad \Sigma(x' \cdot \sin x) = -\frac{(x' - h') \cdot \cos(x - \frac{1}{2}h)}{2\sin\frac{1}{2}h} + \frac{h' \cdot \sin(x - \frac{1}{2}h)}{2(\sin\frac{1}{2}h)^2};$$

und

$$6)\quad \Sigma(x' \cdot \cos x) = \frac{(x' - h') \cdot \sin(x - \frac{1}{2}h)}{2\sin\frac{1}{2}h} + \frac{h' \cdot \cos(x - \frac{1}{2}h)}{2(\sin\frac{1}{2}h)^2}.$$

Weil aber h' nach x constant gedacht worden, so folgt aus

$$\Delta x' = h'$$

sogleich, wenn man die Integrale nach x nimmt,

$$7)\quad x' = \frac{h'}{h}x + C_x,$$

wo C_x entweder eine absolute, oder doch eine periodische Constante ist.

Die Formeln 3.—6.) gelten also nur dann, wenn x' keine andere Funktion von x, als nur von der Form 7.), d. h. von der Form

$$x' = a \cdot x + C_x$$

ist, wo a eine absolute Constante (nach x), C_x aber entweder eine absolute oder doch eine periodische Constante ist.

Namentlich sind also durch die Formeln 5.) und 6.) die Summen

$$\Sigma((ax+b)^p \cdot \sin x) \quad \text{und} \quad \Sigma((ax+b)^p \cdot \cos x)$$

zu finden, indem man in jene

$$x' = ax + b \quad \text{und deshalb auch} \quad h' = a \cdot h$$

setzt.

---

*) Dächte man h' nicht nach x constant, so müßten in diesen Formeln die Potenzen von h', welche jetzt außerhalb der Summen-Zeichen gesetzt sind, unter dem Σ Zeichen gesetzt werden; und dann wären die Formeln 3.) und 4.) keine Reduktions-Formeln mehr.

§. 113.

Nach diesen Versuchen, die Summen für einzelne besondere Funktionen zu finden, wollen wir noch zu allgemeinern Reduktions-Formeln zu gelangen suchen.

Bereits im §. 104. N. 5.) haben wir gefunden

$$1) \qquad \Sigma(P_x \cdot Q_x) = Q \cdot \Sigma(P_x) - \Sigma(\Delta Q_x \cdot \Sigma P_{x+h});$$

und die Anwendung dieser Formel nennt man die theilweise Integration. Wendet man nun auf die Summe im zweiten Gliede rechts dieselbe Formel wiederum an und substituirt man den dadurch für $\Sigma(\Delta Q_x \cdot \Sigma P_{x+\Delta x})$ erhaltenen Ausdruck in die 1.), so ergiebt sich

$$2) \qquad \Sigma(P_x \cdot Q_x) = Q \cdot \Sigma P_x - \Delta Q \cdot \Sigma^2 P_{x+h} + \Sigma(\Delta^2 Q \cdot \Sigma^2 P_{x+2h});$$

Wendet man hier auf das dritte Glied zur Rechten die Formel 1.) noch einmal an, so erhält man nach geschehener Substitution in 2.)

$$3) \qquad \Sigma(P_x \cdot Q_x) = Q \cdot \Sigma P_x - \Delta Q \cdot \Sigma^2 P_{x+h} + \Delta^2 Q \cdot \Sigma^3 P_{x+2h} - \Sigma(\Delta^3 Q \cdot \Sigma^3 P_{x+3h});$$

Zuletzt erhält man auf diesem Wege noch

$$(\odot)\cdots \qquad \Sigma(P_x \cdot Q_x) = S\underset{a+b=\mu}{[}(-1)^a \cdot \Delta^a Q_x \cdot \Sigma^{1+a} P_{x+a.h}] + (-1)^{\mu+1} \Sigma(\Delta^{\mu+1} Q_x \cdot \Sigma^{\mu+1} P_{x+(\mu+1)h});$$

Dies ist die von Taylor in den philosophical transactions gegebene Formel. — Condorcet hat sie in seinem Essai sur l'application de l'Analyse à la probabilité des décisions p. 163. dadurch umgeformt, daß er P_x, P_{x+h}, P_{x+2h}, P_{x+3h}, etc. etc. als Glieder einer Ur-Reihe ansieht, und sie in die ersten Glieder ihrer Differenz-Reihen ausdrückt. Nach §. 102. I.) hat man nämlich

$$4) \qquad P_{x+m.h} = S\underset{b+c=m}{[}m_c \cdot \Delta^c P_x].$$

Setzt man daher hier zuerst a, dann $\mu+1$ statt m, und dann den jedesmaligen Werth zur Rechten aus 4.) statt $P_{x+a.h}$ und

statt $P_{x+(\mu+1)h}$ in die Formel ⊙.), so erhält man nach gehöriger Reduktion, weil $\Sigma^{a+1}(\Delta^c P_x) = \Sigma^{a-c+1} P_x$ ist,

$$(\mathfrak{C}) \ldots\ldots \Sigma(P_x \cdot Q_x) = S\left[(-1)^a \cdot a_c \cdot \Delta^a Q_x \cdot \Sigma^{b+1} P_x\right]_{b+c=a,\ a+b=\mu} + (-1)^{\mu+1} \cdot S\left[(\mu+1)_c \cdot \Sigma(\Delta^{\mu+1} Q_x \cdot \Sigma^{\mu+1-c} P_x)\right]_{c+b=\mu+1}.$$

Condorcet giebt dieselbe jedoch viel unvollständiger als wir sie hier gegeben haben. In allen den Fällen aber, in denen $\Delta^{\mu+1} Q_x = 0$ wird, also so oft Q_x eine ganze Funktion von x ist, vom μ^{ten} Grade, verwandelt sich unser zweites Aggregat in $\Sigma(0)$ d. h. in eine periodische Constante, und das erstere Aggregat enthält dann genau das Gesetz des Condorcet, nämlich

$$\Sigma(P_x \cdot Q_x) = Q_x \cdot \Sigma P_x - \Delta Q(\Sigma^2 P_x + \Sigma P_x) + \Delta^2 Q_x \cdot (\Sigma^3 P_x + 2\Sigma^2 P_x + \Sigma P_x) - \Delta^3 Q_x \cdot (\Sigma^4 P_x + 3\Sigma^3 P_x + 3\Sigma^2 P_x + \Sigma P_x) + \text{etc. etc.}$$

§. 114.

Setzt man in der Formel des §. 113.) $P_x = a^x$, so erhält man, weil dann

$$\Sigma^{1+a} P_{x+ah} = \frac{a^{x+ah}}{(a^h - 1)^{1+a}}$$

ist, sogleich

$$\Sigma(a^x \cdot Q_x) = \frac{1}{a^h - 1} \cdot S\left[(-1)^a \cdot \Delta^a Q_x \cdot a^x \cdot \left(\frac{a^h}{a^h - 1}\right)^a\right]_{a+b=\mu} + (-1)^{\mu-1} \cdot \left(\frac{a^h}{a^h - 1}\right)^{\mu+1} \cdot \Sigma(a^x \cdot \Delta^{\mu+1} Q_x).$$

Nach diesen Formeln kann man die Summen finden

1) von jeder Funktion von der Form

$$\frac{A \cdot x^\alpha + B \cdot x^\beta + C \cdot x^\gamma + \ldots}{x^{n|h}},$$

wenn α, β, γ, etc. etc. ganze positive Zahlen und zu gleicher Zeit $< n-1$ sind;

2) von $a^{mx} \cdot (A \cdot x^\alpha + B \cdot x^\beta + C \cdot x^\gamma + \ldots)$,

es mag m eine positive oder negative ganze Zahl seyn, wenn nur α, β, γ, etc. positiv ganz sind *);

*) Die im §. 112. A.) gefundene Summe, welche dort direkt gefun-

3) von jeder Funktion von der Form

$$\sin x^m \cdot \cos x^n \cdot (A \cdot x^\alpha + B \cdot x^\beta + C \cdot x^\gamma + \cdots)$$

wenn m und n positiv ganz sind, eben so wie α, β, γ, etc. etc.; indem man das Produkt $\sin x^m \cdot \cos x^n$ in Sinus und Kosinus der Vielfachen von x umformt.

Und dies ist ohngefähr alles, was sich über die Auffindung der Summen (d. h. der endlichen Integrale) der Funktionen eines einzigen Veränderlichen x, im Allgemeinen, lehren läßt.

§. 115.

Das Verfahren, dessen wir uns im §. 109.) bedient haben, um $\Sigma(x^m)$ in eine nach steigenden Potenzen von h fortlaufende Reihe zu verwandeln, kann man zu verallgemeinern trachten, um durch dasselbe allgemein $\Sigma(f_x)$ in eine nach steigenden Potenzen von h geordnete Reihe umzuwandeln.

A. Man geht nämlich (so wie dort von x^r, welches nicht x^m ist) hier wiederum von einer Funktion z_x aus, welche nicht die gegebene f_x ist, und hat nun, wegen $\Delta z_x = z_{x+h} - z_x$, nach dem Taylor'schen Lehrsatze

$$1) \quad \Delta z_x = \partial z_x \cdot h + \partial^2 z_x \cdot \frac{h^2}{2!} + \partial^3 z_x \cdot \frac{h^3}{3!} + \partial^4 z_x \cdot \frac{h^4}{4!} + \cdots.$$

Nimmt man hier nun wieder links und rechts die Summe genau wie dort, und setzt man, (analog wie dort x^m statt x^{r-1} gesetzt worden ist) hier

$$\partial z_x = f_x, \quad \text{also} \quad z_x = \int f_x \cdot dx;$$

so erhält man

$$2) \quad \Sigma(f_x) = \frac{1}{h} \cdot \int f_x \cdot dx - \left[\frac{h}{2!} \cdot \Sigma(\partial f_x) + \frac{h^2}{3!} \cdot \Sigma(\partial^2 f_x) + \frac{h^3}{4!} \cdot \Sigma(\partial^3 f_x) + \cdots\right],$$

welche Formel genau analog ist mit der dortigen Formel §. 109.)

A.

---

der worden ist, ergiebt sich also auch nach der hier für $\Sigma(P_x \cdot Q_x)$ mitgetheilten Formel.

A. ⊙.), so daß jene aus dieser hervorgeht, wenn man hier x^m statt f_x setzt, wo dann $\int f_x \cdot dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}$, $\partial f_x = m \cdot x^{m-1}$, etc. etc. wird.

B. Setzt man nun hier, statt wie dort im §. 109. B.) weiter fortzufahren, nach und nach ∂f_x, $\partial^2 f_x$, $\partial^3 f_x$, $\partial^4 f_x$ statt f_x, so erhält man eine Reihe von Gleichungen, aus denen allen in Verbindung mit der 2.) zuletzt $\Sigma(\partial f_x)$, $\Sigma(\partial^2 f_x)$, $\Sigma(\partial^3 f_x)$, etc. etc. eliminirt werden können, so daß man erhält

$$3)\quad \Sigma(f_x) = \frac{1}{h} \cdot \int f_x \cdot dx + A_0 \cdot f_x + A_1 \cdot \partial f_x \cdot h + A_2 \cdot \partial^2 f_x \cdot h^2 + A_3 \cdot \partial^3 f_x \cdot h^3 + \cdots.$$

C. Will man aber wiederum wie im §. 109. C.), um das Gesetz besser zu übersehen, nach welchem sich die Koefficienten A_0, A_1, A_2, A_3, etc. etc. richten, die Gleichung 3.) mit unbestimmten Koefficienten annehmen, und nun diese Koefficienten selbst auf anderem Wege zu bestimmen suchen, so wird man hier das Verfahren von dem dort gebrauchten etwas verschieden statt finden lassen müssen. Man wird hier e^x statt f_x setzen, so daß man

$$\Sigma(f_x) = \frac{e^x}{e^h - 1},\quad \int f_x \cdot dx = e^x,\quad \partial f_x = \partial^2 f_x = \partial^3 f_x = \text{etc. etc.} = e^x$$

hat. Die Gleichung 3.) geht dadurch über in

$$4)\quad (e^h - 1)^{-1} = \frac{1}{h} + A_0 + A_1 \cdot h + A_2 \cdot h^2 + A_3 \cdot h^3 + \cdots$$

und dies lehrt uns, daß die Koefficienten in der Formel 3.) keine anderen sind, als die von

$$(e^h - 1)^{-1}\text{ d. h. von }\left(h + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + \frac{h^4}{4!} + \cdots\right)^{-1},$$

wenn solcher Ausdruck nach steigenden Potenzen von h entwickelt gedacht wird.

D. Die Formel 3.) kann man daher, wenn man will, symbolisch so schreiben

$$(\odot)\cdots \qquad \Sigma(f_x) = (e^{\partial h} - 1)^{-1} \cdot f_x,$$

wenn man nur $(e^{\partial h} - 1)^{-1}$ d. h.

$$\left(\partial h + \frac{\partial^2 h^2}{2!} + \frac{\partial^3 h^3}{3!} + \cdots\right)^{-1}$$

nach steigenden Potenzen von ∂h entwickelt sich denkt, dann aber in jedem Gliede von der Form $A_n \cdot \partial^n \cdot h^n$ unmittelbar hinter ∂^n den Faktor f_x schreibt, so daß dieses Glied in

$$A_n \cdot \partial^n f_x \cdot h^n$$

übergeht.

E. Man kann auch dasselbe Resultat so aussprechen: Wenn A_{-1}, A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, etc. etc. die Koefficienten von

$$\text{I.} \qquad (e^h - 1)^{-1} = S[A_{a-1} \cdot h^{a-1}]$$

vorstellen, so hat man allemal auch

$$\text{II.} \qquad \Sigma(f_x) = S[A_{a-1} \cdot \partial^{a-1} f_x \cdot h^{a-1}]$$

$$= \frac{1}{h}\int f_x \cdot dx + A_0 \cdot f_x + S[A_{a+1} \cdot \partial^{a+1} f_x \cdot h^{a+1}],$$

wenn nur statt a nach und nach Null und alle positiven ganzen Zahlen gesetzt werden.

F. Setzt man aber hier in II.) x^m statt f_x, also daß

$$\partial^{a+1} f_x = m^{a+1\,I-1} \cdot x^{m-1-a} = (a+1)!\, m_{a+1} \cdot x^{m-1-a}$$

wird, und vergleicht man dann diese Formel mit der Formel (C.) des §. 109. D.), welche so geschrieben werden kann, nämlich

$$\Sigma(x^m) = \frac{1}{h} \cdot \frac{x^{m+1}}{m+1} - \tfrac{1}{2} x^m$$

$$+ S\left[\mathfrak{B}_{2a+1} \cdot (-1)^a \cdot m_{2a+1} \cdot x^{m-1-2a} \cdot \frac{h^{2a+1}}{2a+2}\right],$$

so folgt augenblicklich

$$\text{III.} \qquad A_0 = -\tfrac{1}{2}, \quad \text{dagegen} \quad A_{2a+2} = 0,$$

so wie noch ebenfalls für jedes a, welches eine ganze Zahl oder Null ist,

IV. $$A_{2a+1} = (-1)^a \cdot \frac{\mathfrak{B}_{2a+1}}{(2a+2)!};$$

d. h. die Koefficienten jeder geraden Potenz von h in der Entwickelung von $(e^h - 1)^{-1}$, ist allemal $= 0$; der Koefficient A_{2a+1} jeder ungeraden Potenz derselben Entwickelung wird dagegen gefunden, wenn man die entsprechende Bernoulli'sche Zahl $\mathfrak{B}_{2a+1}$ noch durch $(2a+2)!$ dividirt, und derselbe ist dabei abwechselnd positiv und negativ.

G. Man kann daher die Formel ⊙.) auch noch so schreiben, nämlich

$$(\mathbb{C}) \cdots \quad \Sigma(f_x) = \frac{1}{h} \cdot \int f_x \cdot dx - \tfrac{1}{2} f_x + S\left[(-1)^a \cdot \frac{\mathfrak{B}_{2a+1}}{(2a+2)!} \cdot \partial^{2a+1} f_x \cdot h^{2a+1}\right],$$

wenn nur statt a Null und jede ganze positive Zahl gesetzt wird.

Anmerkung. Da diese Formeln ⊙.) und ℂ.) des vorstehenden Paragraphen für jede Funktion f_x gelten, so geben sie auch $\Sigma(a^x \cdot y_x)$, wenn $f_x = a^x \cdot y_x$ gesetzt wird, in eine nach steigenden Potenzen von h geordnete Reihe. — Man hat aber auch diesen speciellen Fall auf eine specielle Weise behandelt, nämlich wie folgt. Es ist nach §. 104. N. 5.) d. h. wenn man theilweise integrirt

1) $$\Sigma(a^x \cdot y_x) = \frac{a^x \cdot y_x - a^h \cdot \Sigma(a^x \cdot \Delta y_x)}{a^h - 1}.$$

Setzt man nun hier statt Δy, was die Taylor'sche Reihe dafür liefert, so erhält man

2) $$(a^h - 1) \cdot \Sigma(a^x \cdot y_x) = a^x \cdot y_x - a^h \cdot \left[\frac{h}{1} \cdot \Sigma(a^x \cdot \partial y_x) + \frac{h^2}{2!} \cdot \Sigma(a^x \cdot \partial^2 y_x) + \cdots\right].$$

Setzt man nun hier ∂y_x, $\partial^2 y_x$, $\partial^3 y_x$, etc. etc. nach und nach statt y_x, so erhält man wieder eine unendliche Menge von Gleichungen, aus denen und der 2.) die Summen $\Sigma(a^x \cdot \partial y_x)$, $\Sigma(a^x \cdot \partial^2 y_x)$, etc. etc. eliminirt werden können, so daß man zuletzt erhält die Form

$$3)\quad (a^h - 1)\cdot\Sigma(a^x\cdot y_x) = a^x\cdot y_x + D_1\cdot a^x\cdot\partial y_x\cdot h + D_2\cdot a^x\cdot\partial^2 y_x\cdot h^2 + D_3\cdot a^x\cdot\partial^3 y_x\cdot h^3 + \cdots.$$

Wir wollen jedoch dies hier nicht weiter verfolgen.

Dritte Abtheilung.

Vom Integriren einer gegebenen endlichen Differenzen-Gleichung.

§. 116.

Jede Gleichung zwischen x, y, Δy_x, $\Delta^2 y_x$, etc. etc. heißt eine Differenzen-Gleichung und zwar von der n^{ten} Ordnung, wenn zuletzt $\Delta^n y_x$ noch vorkommt, also von der ersten Ordnung, wenn sie bloß zwischen x, y und Δy_x gegeben ist.

Wenn man y_{x+h}, y_{x+2h}, y_{x+3h}, etc. etc. bezüglich durch y_1, y_2, y_3, etc. etc. bezeichnet, so hat man (nach §. 91. II.) allemal

$$\Delta y_x = y_1 - y, \qquad \Delta^2 y_x = y_2 - 2y_1 + y,$$
$$\Delta^3 y_x = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y; \text{ etc. etc.}$$

Jede solche Differenzen-Gleichung der n^{ten} Ordnung kann also, dadurch daß man in ihr statt Δy_x, $\Delta^2 y_x$, $\Delta^3 y_x$, etc. etc. diese Werthe substituirt, in eine Gleichung zwischen x, y, y_1, y_2, y_3, $\cdots$ y_n verwandelt werden, welche y_n in x, y, y_1, y_2, $\cdots$ y_{n-1} ausgedrückt liefert, welche aber, wenn man $x+h$ statt x setzt (weil dann y in y_1, y_1 in y_2, y_2 in y_3, etc. etc. und y_n in y_{n+1} übergeht) auch noch y_{n+1} und durch dasselbe Verfahren auch noch y_{n+2}, y_{n+3}, in inf. jedesmal in die n nächst vorhergehenden Glieder ausgedrückt liefert.

Wäre also die Differenzen-Gleichung von der ersten Ordnung $f_{x,y,\Delta y_x} = 0$ gegeben, so würde solche y_1, y_2, y_3, y_4, in Inf. (in x und y ausgedrückt) liefern.

Eine Differenzen-Gleichung der n^{ten} Ordnung ist also das Gesetz, nach welchem die Glieder einer Reihe

$$y,\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4,\ y_5,\ \cdots\ y_{n-1},\ y_n,\ y_{n+1},\ y_{n+2},\ \cdots$$

vom n^{ten} Gliede ab sich richten, d. h. das Gesetz, durch welches jedes folgende Glied in die n ihm zunächst vorangehenden Glieder dieser Reihe ausgedrückt wird.

Solche Gesetze, durch welche folgende Glieder einer Reihe in vorhergehende ausgedrückt sich sehen, nennt man rekurrente Gesetze. Findet man aber aus einer solchen Differenzen-Gleichung, welche allemal ein rekurrentes Gesetz einer Reihe ausspricht, y selbst, als Funktion von x, so darf man nur x, $x+h$, $x+2h$, $x+3h$, $\cdots$ $x+nh$, $\cdots$ $x+(n+m)h$, $\cdots$ statt x setzen, um nach und nach in oder außer der Ordnung jedes einzelne Glied der Reihe zu haben. Man hat also dann das independente Gesetz der Reihe $y,\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ \cdots\ y_n$.

Das Geschäft selber, durch welches man aus der Differenzen-Gleichung die Funktion y_x findet, nennt man das Integriren der Differenzen-Gleichung.

Anmerkung. Alle Untersuchungen über Differenzen setzen aber ein bestimmt gegebenes und nicht mehr jedes willkührliche h voraus. So wie h ganz unbestimmt bliebe, so könnte man es sich endlich und unendlich klein zugleich denken, und dies wäre gegen den Begriff des Differenzen-Kalkul, der sich eben dadurch vom Differential-Kalkul unterscheidet, daß in ihm h nicht unendlich-klein ist.

§. 117.

Die lineäre Differenzen-Gleichung der ersten Ordnung

1) $$\Delta y_x + P_x \cdot y_x = Q_x$$

zu integriren.

Man setzt

2) $y_x = u_x \cdot z_x$, also $\Delta y_x = u \cdot \Delta z_x + z \cdot \Delta u_x + \Delta u_x \cdot \Delta u_x$

und die Gleichung 1.) zerlegt sich nun, weil man über u nach Willkühr disponiren kann, in

3) $\Delta u_x + P_x \cdot u_x = 0$ und 4) $u_x \cdot \Delta z_x + \Delta u_x \cdot \Delta z_x = Q_x$.

Die letztere giebt

$$5) \qquad \Delta z_x = \frac{Q_x}{u_x + \Delta u_x} = \frac{Q_x}{u_{x+h}},$$

also

$$6) \quad z_x = \Sigma\left(\frac{Q_x}{u_{x+h}}\right) \quad \text{und} \quad 7) \quad y_x = u_x \cdot z_x,$$

sobald nur u_x selbst aus der Gleichung 3.) gefunden seyn wird.

In der Gleichung 3.) kann man aber die Veränderlichen u und x trennen, indem man sie so schreibt

$$8) \qquad \frac{\Delta u_x}{u_x} = -P_x.$$

Führt man, um diese Gleichung zu integriren, einen neuen Veränderlichen t ein, so daß

9) $u_x = e^t$, also $\Delta u_x = e^t \cdot (e^{\Delta t} - 1)$

wird, so erhält man aus 8.)

$$e^{\Delta t} - 1 = -P_x \quad \text{oder} \quad e^{\Delta t} = 1 - P_x,$$

d. h.

10) $\Delta t = log(1 - P_x)$ und $t = \Sigma log(1 - P_x)$.

Kann man also $\Sigma log(1 - P_x)$ finden, so hat man t, dann aus 9.) auch u, — hernach aus 6.) auch z_x, wenn nämlich die dortige Integration ausgeführt werden kann; — und dann hat man aus 7.) auch y_x. Dabei geht in t eine periodische oder absolute Constante ein, welche sich also auch in y mit herüberzieht, so daß man zuletzt y in x und einer periodischen Constante gefunden hat. — Für den Hülfs-Ausdruck u braucht man nur einen genügenden Werth, weshalb in t oder $\Sigma log(1 - P_x)$ keine willkührliche Constante zugelassen zu werden braucht.

Um aber $\Sigma log(1 - P_x)$ zu finden, geht man von dem Satze §. 102. IV.) aus, nach welchem

$$\Sigma log\,(1-P_{x+nh})-\Sigma log\,(1-P_x)$$

die Summe der Logarithmen der n Ausdrücke

$$1-P_x,\quad 1-P_{x+h},\quad 1-P_{x+2h},\quad \cdots\quad 1-P_{x+(n-1)h},$$

also der Logarithme des Produkts dieser n Ausdrücke ist. Man bekommt aber auf diesem Wege nicht eigentlich $\Sigma log\,(1-P_x)$, sondern das zwischen den Grenzen $x=x$ und $x=x+nh$ genommene Integral. Und wollte man hier $x-nh$ statt x setzen, so würde man für die Differenz

$$\Sigma log\,(1-P_x)-\Sigma log\,(1-P_{x-nh})$$

den Logarithmen des Produkts

$$(1-P_{x-nh})(1-P_{x-(n-1)h})\cdots(1-P_{x-2h})(1-P_{x-h})$$

erhalten, und dieser letztere Logarithme könnte nur in den Fällen statt $\Sigma log\,(1-P_x)$ gesetzt werden, in welchen für irgend eine bestimmte Zahl n, $\Sigma log\,(1-P_{x-nh})$ einer willkührlichen absoluten oder periodischen Constante gleich, angesehen werden kann *).

Ist P constant nach x, so giebt die Gleichung 10.) sogleich, wenn der Bequemlichkeit wegen $1-P=R$ gesetzt wird, so daß R und auch $log\,R$ ebenfalls (nach x) constant sind,

$$11)\qquad t=\Sigma(log\,R)=(log\,R)\cdot\frac{x}{h};$$

also wird nun

$$12)\qquad u=e^{t}=e^{(log\,R)\cdot\frac{x}{h}}=R^{\frac{x}{h}},$$

wo die willkührliche Constante deshalb weggelassen wird, weil u ein bloßer Hülfs-Ausdruck ist, und jeder besondere Werth von u, welcher der Gleichung 3.) genügt, als der zweckmäßige angesehen werden kann.

Ist nun auch noch Q nach x constant, so erhält man weiter aus 6.)

$$z=\Sigma\left(\frac{Q}{R^{\frac{x}{h}+1}}\right)=\Sigma Q\cdot R^{-\frac{x}{h}-1}=Q\cdot\Sigma R^{-\frac{x}{h}-1}\qquad\text{(nach §. 104. IV.);}$$

d. h. (nach §. 105. N. 2.)

---

*) Lagrange hat dieses Verfahren der Integration der Gleichung $\Delta y+Py=Q$, im Jahre 1761 zuerst gegeben. Wir können sein Resultat, dem oben zuletzt Gesagten gemäß, nicht für vollständig halten, ja im Allgemeinen kaum für richtig.

13) $$z = Q \cdot \frac{R^{-\frac{x}{h}-1}}{R^{-1}-1} + C_x = \frac{Q}{1-R} \cdot R^{-\frac{x}{h}} + C_x,$$

wo C_x eine periodische oder absolute Constante vorstellt. Dann wird aber (aus 7. und 12.)

14) $$y = \frac{Q}{1-R} + C_x \cdot R^{\frac{x}{h}} = \frac{Q}{P} + C_x \cdot (1-P)^{\frac{x}{h}},$$

wo C_x die periodische oder absolute willkührliche Constante ist.

§. 118.

Kennt man zwei specielle Werthe y'_x und y''_x, welche der reducirten linearen Differenzen-Gleichung der 2ten Ordnung

1) $$y_{x+2h} + P_x \cdot y_{x+h} + Q_x \cdot y_x = 0$$ *)

genügen, so ist das vollständige Integral dieser Gleichung offenbar

2) $$y_x = C'_x \cdot y'_x + C''_x \cdot y''_x,$$

wenn C'_x und C''_x zwei willkührliche periodische oder absolute Constanten sind.

Denn, so wie y'_x oder y''_x statt y_x gesetzt, der Gleichung 1.) genügen, so genügt ihr auch der Ausdruck zur Rechten in 2.), wenn man solchen statt y_x substituirt, deshalb, weil dann der Ausdruck links in zwei Theile zerfällt, die einzeln der Null gleich sind. Ueberdieß enthält aber der Ausdruck in 2.) zwei willkührliche Constanten.

Hat man aber das Integral 2.) der reducirten Gleichung 1.) gefunden, so kann man auch das Integral derselben Gleichung finden, wenn sie rechts statt der Null noch eine Funktion V_x zu stehen hat, nämlich das Integral der vollständigen Gleichung

3) $$y_{x+2h} + P_x \cdot y_{x+h} + Q_x \cdot y_x = V_x,$$

indem man das Integral 2.) der Form nach beibehält, aber C'_x und C''_x nicht als periodische Constanten ansieht, sondern

---

*) Man substituirt in die gegebene Gleichung zwischen x, y, Δy_x und $\Delta^2 y_x$, zunächst $y_{x+h} - y_x$ statt Δy_x und noch $y_{x+2h} - 2 \cdot y_{x+h} + y_x$ statt $\Delta^2 y_x$ und dadurch geht die gegebene Gleichung in die 1.) über, wenn sie linear gewesen ist.

als noch unbekannte Funktionen von x, die erst noch so gefunden werden müssen, daß die Gleichung 2.) als vollständiges Integral der Gleichung 3.) angesehen werden kann.

Aus 2.), unter dieser letztern Voraussetzung gedacht, folgt aber

$$4) \quad y_{x+h} = C'_{x+h} \cdot y'_{x+h} + C''_{x+h} \cdot y''_{x+h} = C'_x \cdot y'_{x+h} + C''_x \cdot y''_{x+h} + (y'_{x+h} \cdot \Delta C'_x + y''_{x+h} \cdot \Delta C''_x).$$

Setzt man nun den eingeklammerten Theil, der Null gleich, so erhält man

$$5) \quad \Delta C'_x \cdot y'_{x+h} + \Delta C''_x \cdot y''_{x+h} = 0;$$

und y_{x+h} ist dann, für diese Funktionen C'_x und C''_x, welche der Gleichung 5.) genügen, genau eben so (der Form nach), wie wenn C'_x, C''_x noch periodische oder absolute Constanten wären.

Setzt man aber in 4.) noch einmal $x+h$ statt x, so erhält man, unter der Voraussetzung der Gleichung 5.),

$$6) \quad y_{x+2h} = C'_{x+h} \cdot y'_{x+2h} + C''_{x+h} \cdot y''_{x+2h} = C'_x \cdot y'_{x+2h} + C''_x \cdot y''_{x+2h} + (y'_{x+2h} \cdot \Delta C'_x + y''_{x+2h} \cdot \Delta C''_x).$$

Substituirt man nun diese Werthe aus 4.), 5.) und 6.) statt y_{x+h} und y_{x+2h} in die Gleichung 3.), so wird der Ausdruck links der Null gleich, bis auf den Theil, welcher von dem eingeklammerten Theil von y_{x+2h} in 6.) herrührt. Die Gleichung 3.) geht daher nun über in

$$7) \quad y'_{x+2h} \cdot \Delta C'_x + y''_{x+2h} \cdot \Delta C''_x = V_x.$$

Die beiden Gleichungen 5.) und 7.) kann man nun nach $\Delta C'_x$ und $\Delta C''_x$ algebraisch auflösen. Kann man nun diese, für $\Delta C'_x$ und $\Delta C''_x$ gefundenen und entwickelt gegebenen Funktionen von x (nach den Methoden der vorhergehenden Abtheilung dieses Kapitels) integriren, so hat man C'_x und C''_x, jedes noch mit einer willkührlichen periodischen oder absoluten Constante c'_x und c''_x; und diese Werthe in die 2.) substituirt, geben zuletzt das allgemeine Integral der vollständigen Gleichung 3.).

Man wird bemerken, daß dies nichts anders ist als die „Methode der Variation der Constanten", welche Lagrange, der sie für die Integration

der Differential-Gleichungen gegeben hat, auch hier bei den Differenzen-Gleichungen in Anwendung bringt. — Ferner sieht man leicht ein, daß diese Methode — von dem Integral der reducirten Gleichung, wo $V = 0$ ist, zu dem der vollständigen Gleichung, wo V nicht Null ist, überzugehen — auf lineare Differenzen-Gleichungen aller Ordnungen ausgedehnt werden kann.

§. 119.

Sind in der reducirten Gleichung

1) $$y_{x+3h} + P \cdot y_{x+2h} + Q \cdot y_{x+h} + R \cdot y = 0$$

die Koefficienten P, Q, R constant (nach x), so setze man, um sie zu integriren, $y = m^x$, so daß $y_{x+h} = m^h \cdot m^x$, $y_{x+2h} = m^{2h} \cdot m^x$ und $y_{x+3h} = m^{3h} \cdot m^x$ wird. Dann geht die Gleichung 1.) über in

2) $$(m^h)^3 + P \cdot (m^h)^2 + Q \cdot (m^h) + R = 0.$$

Findet man hieraus für m^h drei Werthe und zu jedem Werth M von m^h einen zugehörigen Werth von m (also aus $m^h = M$, $m = M^{\frac{1}{h}}$) und bezeichnet man die so erhaltenen drei Werthe von m durch m_1, m_2 und m_3, so hat man

$$y = C'_x \cdot (m_1)^x + C''_x \cdot (m_2)^x + C'''_x \cdot (m_3)^x,$$

wenn nur C'_x, C''_x und C'''_x drei willkührliche periodische Constanten sind.

Werden zwei, oder alle drei Werthe von m einander gleich, oder sind zwei der drei Werthe von m imaginär, so finden ganz analoge Modificationen (in dem Ausdrucke für y) statt, wie solche bei Gelegenheit der Integration der linearen Differential-Gleichungen bereits mitgetheilt worden sind.

Endlich läßt sich das Gesagte auf reducirte lineare Gleichungen mit (nach x) constanten Koefficienten, von jeder Ordnung ohne Weiteres ausdehnen.

Anmerkung. Die durch die Gleichung 1.), auch wenn man sie sich von beliebiger Ordnung denkt, und wenn man $h = 1$ setzt, ausgedrückten Reihen, nannte man früher vorzugsweise „rekurrirende Reihen". — Die Integration der

Gleichung 1.) giebt also das independente Gesetz dieser sogenannten rekurrirenden Reihen.

Dabei müssen wir aber noch einmal ausdrücklich bemerken, daß jede Differenzen-Gleichung das „rekurrirende Gesetz" einer Reihe ausdrückt, d. h. zeigt, wie jedes folgende Glied von den nächst vorhergehenden Gliedern abhängig ist; und daß die Integration der Gleichung allemal das „independente Gesetz" derselben Reihe liefert (vgl. §. 116. und auch noch §. 49. des I. Bds.), wenn hier $h = 1$ gedacht wird.

Was endlich die Bestimmung der Constanten betrifft, so muß man, wenn die Differenzen-Gleichung von der n^{ten} Ordnung war, dies Integral also n periodische oder absolute Constanten aufgenommen hat, eben so viele, also n Glieder der Reihe als bekannt ansehen, und daraus die Constanten bestimmen, genau so wie man in der Differential- und der dazu gehörigen Integral-Rechnung die Constanten bestimmt. Die Constanten selbst erscheinen in diesen Anwendungen zunächst als absolute, und nicht als periodische Constanten.

§. 120.

Ueber die Bestimmung der durch die Integration eingehenden periodischen Constanten.

Da die periodischen Constanten für die Werthe x, $x+h$, $x+2h$, $x+3h$, ... $x+rh$, ... immer dieselben Werthe annehmen, so bestimmen sie sich offenbar dadurch nicht, daß man die Werthe von y_x kennt, für die constanten Werthe 0, h, 2h, 3h, etc. etc. von x. — Ist daher durch Integration einer Differenzen-Gleichung, z. B. der ersten Ordnung (zwischen x, y_x und Δy_x, oder zwischen x, y_x und y_{x+h}), eine solche periodische Constante C_x eingegangen, so bestimmt sie sich nur daraus, daß man die Werthe von y in einem bestimmten Raume, etwa von $x = 0$ bis $x = h$ hin, für alle dazwischen liegenden Werthe von x schon kennt*). —

*) Stellt man sich x als Abscisse, y_x als Ordinate einer Kurve vor,

Dies wird auf folgende Weise deutlich gemacht.

Löst man nämlich die gegebene Differenzen-Gleichung nach Δy_x algebraisch auf, so daß sie die Form annimmt

1) $$\Delta y_x = F_{x,y_x} \quad \text{oder} \quad y_{x+h} = y_x + F_{x,y_x},$$

so geht aus ihr, indem man nach und nach $x+h$, $x+2h$, etc. etc. statt x setzt, noch hervor

2) $$y_{x+2h} = y_{x+h} + F_{x,y_{x+h}};$$

3) $$y_{x+3h} = y_{x+2h} + F_{x,y_{x+2h}};$$

u. s. w. f. Kennt man nun für jeden Werth x', der zwischen 0 und h liegt, jedesmal den zugehörigen Werth von y, nämlich $y_{x'}$, so geben, wenn man diesen Werth x' statt x setzt, die Gleichungen 1.) sogleich den Werth von $y_{x'+h}$, d. h. alle Werthe von y, welche den Werthen von x zwischen h und 2h zukommen, weil $h+x'$ oder $x'+h$ alle diese letztern Werthe ausdrückt, so oft statt x' alle Werthe zwischen 0 und h gesetzt werden. Desgleichen giebt dann die Gleichung 2.) alle Werthe von y für alle zwischen 2h und 3h liegenden Werthe von x; und dann giebt die Gleichung 3.) alle Werthe von y, für alle zwischen 3h und 4h liegenden Werthe von x; u. s. w. f.

Ist daher $\Pi_{x,y_x,c_x} = 0$ das gefundene Integral dieser Differenzen-Gleichung der ersten Ordnung mit der periodischen Constante C_x (welche letztere eine Funktion von $\sin\frac{2\pi x}{h}$ und $\cos\frac{2\pi x}{h}$ seyn muß), so muß man f_x statt y_x substituiren, die Gleichung $\Pi_{x,y_x,c_x} = 0$, nach C_x algebraisch auflösen, so daß man für C_x eine bestimmte Funktion von x erhält, nämlich

$$C_x = \varphi_x,$$

und dann muß man eine Funktion von $\sin\frac{2\pi x}{h}$ und $\cos\frac{2\pi x}{h}$ aufsuchen, welche in dem Raume von $x=0$ an bis $x=h$

---

die durch eine solche Differenzen-Gleichung gegeben ist, so kann man z. B. noch verlangen, daß diese Kurve mit einer andern gegebenen Kurve $y = f_x$ in den zu allen Werthen von x, die von $x=0$ an bis $x=h$ hin genommen werden, gehörigen Punkten zusammenfällt.

hin genau mit φ_x zusammenfällt, und dabei noch den übrigen Nebenbedingungen genügt.

Daß und wie dieser letztere Theil der gegenwärtigen Untersuchung auszuführen ist, hat Fourier in seiner théorie de la chaleur. Paris 1822. zuerst gezeigt, und die daher rührenden sogenannten Fourier'schen Reihen bilden in der neuesten Zeit einen höchst wichtigen aggregirenden Theil der höhern Analysis. Auch wir werden sie hier noch, in einem der nächsten Kapitel näher betrachten.

Wir bemerken nur noch, daß die gegebene f_x nicht einmal eine stetige Funktion von x zu seyn braucht, wenn man nur für alle Werthe von x zwischen 0 und h, alle zugehörigen Werthe von y ausgedrückt hat, es mögen letztere dann in diesem Raume von $x = 0$ bis $x = h$ ein einziges, oder hinter einander mehrere verschiedene Gesetze befolgen, d. h. sie mögen durch eine continuirliche oder durch eine discontinuirliche Funktion ausgedrückt seyn.

Anmerkung. Ueberhaupt mag man noch einmal bemerken, daß es in dem Charakter der Differenzen-Rechnung liegt, daß h, was zuweilen auch durch Δx bezeichnet wird, einen völlig bestimmten Werth hat, also nicht mehr unbestimmt oder veränderlich sey; daß also jede Differenzen-Gleichung, z. B. der ersten Ordnung nur den Uebergang des Zustandes y_x zu dem bestimmt entfernten Zustande y_{x+h} ausdrückt, daß daher jede Differenzen-Gleichung allemal eine Unstetigkeit (Discontinuität) der durch sie vorgestellten Funktionen zu Grunde liegen hat *).

---

*) Da in der Differenzen-Rechnung die Differenz h von x, allemal einen bestimmten Werth hat, so mag man sich auch hüten, aus einer Gleichung von der Form

$$A_0 + A_1 \cdot h + A_2 \cdot h^2 + A_3 \cdot h^3 + \cdots = B_0 + B_1 \cdot h + B_2 \cdot h^2 + B_3 \cdot h^3 + \cdots$$

zu folgern, daß $A_0 = B_0$, $A_1 = B_1$, $A_2 = B_2$, $A_3 = B_3$, etc. etc. seyn müsse, weil dies letztere nur dann so seyn muß, wenn die gegebene Gleichung für jedes h, oder doch für eine unendliche Menge stetig auf einander folgender Werthe von h, statt findet.

§. 121.

Laplace hat noch Probleme behandelt von folgender Gattung:

Eine Funktion φ_y zu finden, welche die Eigenschaft hat, daß wenn man statt y zwei bekannte Funktionen f_x und F_x setzt, dann φ_f und φ_F zu einander in einer gegebenen Relation stehen.

Wir wollen ein bestimmtes Beispiel nehmen. — Es sey nämlich φ so zu finden, daß

1) $$\varphi_x{}^2 = \varphi_{2x} + 2$$

wird, so daß in diesem Beispiele $f_x = x$, $F_x = 2x$ ist. — Laplace führt nun einen neuen Veränderlichen z ein, welcher von x dergestalt abhängig gedacht wird, daß

2) $f_x = x = u_z$ und 3) $F_x = 2x = u_{z+1}$

wird, wo u_z eine unbekannte und gesuchte Funktion von z ist; er eliminirt dann aus diesen beiden Gleichungen den Veränderlichen x. Man erhält

4) $u_{z+1} = 2u_z$, oder $u_{z+h} = 2u_z$ für $h = 1$.

Diese Gleichung, integrirt, giebt

5) $u_z = C \cdot 2^z$, also $x = C \cdot 2^z$,

wo C eine willkührliche, periodische oder absolute Constante ist.

Man sucht nun eine Funktion y_z der Bedingung gemäß, daß

6) $\varphi_f = \varphi_x = y_z$ und 7) $\varphi_F = \varphi_{2x} = y_{z+1}$

ist; dieselbe bestimmt sich aus der gegebenen Gleichung 1.), welche jetzt die nachstehende wird, nämlich

8) $y_{z+1} = y_z{}^2 - 2$, oder $y_{z+h} = y_z{}^2 - 2$ für $h = 1$.

Gelingt es nun, diese Gleichung 8.) zu integriren, so darf man nur diese Funktion y_z in 6.) subsstituiren, um, wenn man z mittelst der 5.) eliminirt hat, φ_x und also auch, wenn y statt x gesetzt wird, φ_y so gefunden zu haben, wie in der Aufgabe verlangt wird.

Nimmt man aber $y_1 = a^1 + a^{-1}$, wo a eine willkührliche Constante ist, so giebt die Gleichung 8.) sogleich

$$y_2 = a^2 + a^{-2}; \quad y_3 = a^4 + a^{-4}; \quad y_4 = a^8 + a^{-8};$$

und zuletzt

$$y_n = a^{2^{n-1}} + a^{-2^{n-1}};$$

d. h.

9) $$y_z = a^{2^{z-1}} + a^{-2^{z-1}},$$

wo a eine willkührliche, absolute oder periodische Constante seyn kann, wo also a eine jede Funktion von z seyn kann, welche ihren Werth nicht ändert, wenn $z+1$ statt z gesetzt wird. Die Gleichung 9.) ist nun das Integral der Gleichung 8.).

Nimmt man daher nach 6.)

$$\varphi_x = a^{2^{z-1}} + a^{-2^{z-1}},$$

und eliminirt man z mittelst der Gleichung 5.), welche $2^{z-1} = \frac{x}{2C}$ liefert, so erhält man

10) $$\varphi_x = a^{\frac{x}{2C}} + a^{-\frac{x}{2C}},$$

oder wenn man $a^{\frac{1}{2C}}$ durch b bezeichnet,

11) $$\varphi_x = b^x + b^{-x},$$

wenn statt b eine absolute oder eine (nach z) periodische und jedesmal willkührliche Constante gesetzt wird, d. h. eine Funktion von z, welche sich nicht ändert, wenn man $z+1$ statt z setzt; d. h. eine Funktion von x, welche sich nicht ändert, so oft man 2x statt x schreibt, so daß also statt b z. B. eine willkührliche Funktion von $\sin 2\pi x$ und $\cos 2\pi x$ gesetzt werden kann.

Gewöhnlich sieht man die Gleichung 1.) nämlich

$$\varphi_{2x} = \varphi_x{}^2 - 2$$

selbst schon als eine Differenzen-Gleichung an, in welcher man aber nicht x um h, sondern x um x gewachsen sich denkt; eben so betrachtet man im Allgemeinen eine solche Gleichung wie

$$\varphi_{(F_x)} = \varphi_{(f_x)}{}^2 - 2$$

als eine Differenzen-Gleichung, in welcher x nicht um h oder 1, sondern um eine Funktion von x wächst, dergestalt, daß f_x in F_x übergeht; und man

vergleicht dann diese Art Differenzen-Gleichungen mit jenen Differential-Gleichungen, in denen dx nicht constant, sondern selbst noch veränderlich ist. — In dieser Beziehung muß man die gegenwärtige Aufgabe als ein Beispiel zur Integration solcher Differenzen-Gleichungen ansehen, in welchen x nicht um etwas constantes (h oder 1) wächst, sondern selbst noch um etwas Veränderliches; in so fern nämlich x als eine Funktion von z angesehen wird, und der neue Zustand von x aus dem alten dadurch hervorgeht, daß z um den constanten Werth 1 wachsend gedacht wird.

§. 122.

Es kommen in manchen Untersuchungen auch Gleichungen vor, wie z. B.

1) $$\partial y_x + a \cdot \Delta y_x + b y_x = 0,$$

oder

2) $$\partial(\Delta y_x)_x + a \cdot \partial y_x + b \cdot \Delta y_x + c y_x = 0,$$

wo Δy_x den Zuwachs von y vorstellen soll, wenn x um 1 wächst. Dies sind Gleichungen, in denen Differenzen und Differential-Koefficienten zugleich vorkommen. Ihre Behandlung gehört zu dem „Kalkul mit gemischten Differenzen", dem wir hier nur seine Stelle anweisen wollen. Bis jetzt hat man wenig Fortschritte darin gemacht.

Was aber die vorstehenden beiden Gleichungen betrifft, so kann man aus ihnen einen Werth y_x finden, wenn man

$$y = C \cdot e^{mx}$$

setzt; sie gehen dann bezüglich über in

3) $$m + a \cdot (e^m - 1) + b = 0,$$

und in

4) $$m(e^{m-1}) + a^m + b \cdot (e^m - 1) + c = 0.$$

Findet man aus 3.), oder aus 4.), Werthe von m, z. B. m_1, m_2, m_3, m_4, etc. etc., so ist, weil die beiden gegebenen Gleichungen linear sind, für jede derselben

$$y = C_1 \cdot e^{m_1 x} + C_2 \cdot e^{m_2 x} + C_3 \cdot e^{m_3 x} + C_4 \cdot e^{m_4 x} + \ldots$$

zu nehmen, wo C_1, C_2, C_3, C_4, etc. etc. willkührliche Constanten vorstellen. —

Die weitere Untersuchung erlaubt uns der Zweck der gegenwärtigen Schrift nicht.

Schluß-

Schluß-Anmerkung.

Man kann sich auch Doppel-Reihen denken, welche durch das allgemeine Glied $u_{x,y}$ vorgestellt sind, so daß ihre Glieder aus $u_{x,y}$ hervorgehen, wenn man nach und nach x, $x+h$ $x+2h$, $x+3h$, ... statt x setzt, und für jeden Werth von x, auch jedesmal noch y, $y+k$, $y+2k$, $y+3k$, etc. etc. statt y schreibt. — Dann kann man von Differenzen Δu_x, $\Delta^2 u_x$, $\Delta^3 u_x$, etc. etc. nach x, aber auch gleichzeitig von Differenzen Δu_y, $\Delta^2 u_y$, $\Delta^3 u_y$, etc. etc. nach y sprechen, und auch von solchen, die nach x und nach y zugleich genommen sind, nämlich $\Delta^{1,1} u_{x,y}$, $\Delta^{2,1} u_{x,y}$, $\Delta^{1,2} u_{x,y}$, ... $\Delta^{m,n} u_{x,y}$; man kann diese Differenzen Partial-Differenzen nennen, und man bekommt dann auch Partial-Differenzen-Gleichungen und deren Integration; u. s. w. f.

Wenn es aber schon bei den einfachsten Differenzen-Gleichungen nur selten gelingen dürfte, ein Integral in endlicher Form zu erhalten, so muß dies noch mehr in den zusammengesetztern Untersuchungen der Fall seyn. Deshalb können wir hier nur die möglichen Fragen andeuten, uns aber selbst nicht weiter auf deren Beantwortung einlassen.

Dreizehntes Kapitel.

Einige Anwendungen der Differenzen-Rechnung.

Erste Abtheilung.

Einiges über Berechnung von Tafeln mittelst der Differenzen-Rechnung.

§. 123.

Man soll alle Werthe

$$\cdots u_{-5},\ u_{-4},\ u_{-3},\ u_{-2},\ u_{-1},\ u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3 \cdots$$

einer ganzen Funktion u_x z. B. $x^3 - 5x^2 + 6x - 1$ berechnen für alle ganzen Zahlen

$$\cdots -5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7, \cdots$$

welche statt x gesetzt werden.

1) Man berechnet für $h = \Delta x = 1$, die Differenzen von u_x, nämlich

$$\Delta u_x = 3x^2 - 7x + 2;\quad \Delta^2 u_x = 6x - 4;\quad \Delta^3 u_x = 6;\quad \Delta^4 u_x = \Delta^5 u_x = \text{etc. etc.} = 0;$$

so hat man die allgemeinen Glieder der Ur-Reihe und ihrer ersten, zweiten, dritten Differenz-Reihen, während die Glieder der vierten und folgenden Differenz-Reihen alle der Null gleich sind. Die Ur-Reihe bildet also eine arithmetische Reihe der dritten Ordnung.

2) Nun setzt man $x = 0$ und findet aus u_x, Δu_x, $\Delta^2 u_x$ und $\Delta^3 u_x$ sogleich

$$\Delta^3 u_0 = 6,\quad \Delta^2 u_0 = -4,\quad \Delta u_0 = 2 \quad \text{und} \quad u_0 = -1.$$

Also kennt man nun alle Glieder der dritten Differenz-Reihe, und von jeder ihrer Summen-Reihen das dem Zeiger 0 zugehörige Glied $\Delta^2 u_0$, Δu_0 und u_0; und man bildet sich daher die Glieder dieser Reihen auseinander nach der Formel des §. 87.), nämlich nach der Formel

$$1)\quad \Delta^p u_{r+1} = \Delta^p u_r + \Delta^{p+1} u_r \quad \text{oder} \quad 2)\quad \Delta^p u_r = \Delta^p u_{r+1} - \Delta^{p+1} u_r.$$

Man schreibt also nun hin die den Zeigern

... −4, −3, −2, −1, 0, +1, +2, +3, +4, +5, +6, ...

entsprechenden Glieder der

IIIten D.R. ...	6,	6,	6,	6,	6,	6,	6,	6,	6,	6,	6,	...
IIten D.R. ...	−28,	−22,	−16,	−10,	−4,	2,	8,	14,	20,	26,	32,	...
Iten D.R. ...	78,	50,	28,	12,	2,	−2,	0,	8,	22,	42,	78,	...
U.R. ...	−169,	−91,	−41,	−13,	−1,	1,	−1,	−1,	7,	29,	71,	...

indem man von den zu dem Zeiger 0 gehörigen Gliedern ausgeht, und für die zur Rechten derselben hinzuschreibenden Zahlen, die Gleichung 1.), für die zur Linken derselben stehenden Zahlen dagegen die Gleichung 2.) anwendet. — Die gefundenen Glieder der Ur-Reihe sind nun die gesuchten Werthe von

u_x für $x = \cdots, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5, +6, \ldots$.

Anmerkung. Diesem Resultate zufolge liegt zwischen 0 und 1, desgleichen zwischen 1 und 2, endlich auch zwischen 3 und 4 ein Werth von x, welcher $u_x = 0$ macht, d. h. welcher der Gleichung

$$x^3 - 5x^2 + 6x - 1 = 0$$

genügt. Diese Gleichung hat also drei reelle und noch überdies positive Wurzel-Werthe.

§. 124.

Man soll die Werthe derselben Funktion u_x, z. B. $x^3 - 5x^2 + 6x - 1$ berechnen, für alle Werthe von x, welche $= 3;\ 3{,}1;\ 3{,}2;\ 3{,}3;\ 3{,}4;\ 3{,}5;\ 3{,}6;\ 3{,}7;\ 3{,}8;\ 3{,}9$ sind.

Man setze $x = 3 + \frac{z}{10}$, so geht u_x über in

$$u_x = (z^3 - 20z^2 + 300z - 1000) \cdot \tfrac{1}{1000}.$$

Man setzt nun

$$z^3 - 20z^2 + 300z - 1000 = v_z,$$

berechnet sich (nach §. 123.) die Werthe von v_z für $z = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, dividirt jeden derselben durch 1000, und man hat dann die gesuchten Werthe von u_x. Die Rechnung macht sich so: für $h = \Delta z = 1$, findet sich

$$\Delta v_z = 3z^2 - 37z + 281, \quad \Delta^2 v_z = 6z - 34; \quad \Delta^3 v_z = 6;$$

also hat man jetzt für $z = 0$, $v_0 = -1000$, $\Delta v_0 = 281$, $\Delta^2 v_0 = -34$ und $\Delta^3 v_0 = 6$. — Folglich berechnen sich die zu den Zeigern

	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,
gehörigen Glieder der										
IIIten D. R.	6,	6,	6,	6,	6,	6,	6,	6,	6,	6,
IIten D. R.	−34,	−28,	−22,	−16,	−10,	−4,	2,	8,	14,	20,
Iten D. R.	281,	247,	219,	197,	181,	171,	167,	169,	177,	191,
u. R.	−1000,	−719,	−472,	−253,	−56,	125,	296,	463,	632,	809,

aus den zu $z = 0$ gehörigen Gliedern derselben ohne Weiteres. Dividirt man aber die Glieder der Ur-Reihe durch 1000, so erhält man

-1; $-0{,}719$; $-0{,}472$; $-0{,}253$; $-0{,}056$; $+0{,}125$; $+0{,}296$; $+0{,}463$; $+0{,}632$; $+0{,}809$

als die zu den Werthen

3; 3,1; 3,2; 3,3; 3,4; 3,5; 3,6; 3,7; 3,8; 3,9

von x gehörigen Werthe von u_x d. h. von $x^3 - 5x^2 + 6x - 1$.

Anmerkung. Bei dieser Gelegenheit sieht man, daß zwischen 3,4 und 3,5 ein Wurzel-Werth der Gleichung $x^3 - 5x^2 + 6x - 1 = 0$ liegt.

Man kann jetzt wieder die Werthe von u_x suchen für die Werthe von x, welche nach und nach

$= 3{,}40$; $3{,}41$; $3{,}42$; $3{,}43$; $3{,}44$; $3{,}45$; $3{,}46$; $3{,}47$; $3{,}48$; $3{,}49$

gesetzt werden, indem man $x = 3{,}4 + \frac{z}{100}$ setzt, und auf eine ganz analoge Weise verfährt.

Dadurch ist aber das, was im I. Bd.) über die numerische Auflösung der höhern Gleichungen gesagt sich findet, vervollständigt.

§. 125.

Berechnung von Logarithmen-Tafeln.

Es ist allemal, sobald u_x den Brigg'schen Logarithmen von x vorstellt (nach I. Bd. §. 69.)

$$u_x = \frac{log\, x}{log\, 10},$$

wenn *log* x und *log* 10 natürliche (Neper'sche) Logarithmen bedeuten. Bezeichnet man $\frac{1}{log\, 10}$, welches ein für allemal

berechnet werden kann, durch M (diese Zahl M heißt der Modul des Brigg'schen Logarithmen-Systems), so hat man

$$u_x = M \cdot log\, x;$$

also findet sich für $h = \Delta x$

$$\Delta u_x = M \cdot log\left(1 + \frac{h}{x}\right) = M\left(\frac{h}{x} - \frac{h^2}{2x^2} + \frac{h^3}{3x^3} - \frac{h^4}{4x^4} + \cdots\right).$$

Daraus folgt weiter

$$\Delta^2 u_x = M\left(-\frac{h^2}{x^2} + 2\frac{h^3}{x^3} + \cdots\right)$$

$$\Delta^3 u_x = M\left(\frac{2h^3}{x^3} + \cdots\right) *)$$

$$\Delta^4 u_x = M\left(-\frac{6h^4}{x^4} + \cdots\right)$$

u. s. w. f. —. Ist also $\frac{h}{x}$ ein kleiner Bruch, so werden die Differenzen Δu_x, $\Delta^2 u_x$, $\Delta^3 u_x$, $\Delta^4 u_x$, ··· nach und nach immer kleiner und so äußerst klein, daß die übrigen eine lange Zeit außer Acht gelassen werden können; d. h. wenn man die Logarithmen bis auf zehn Decimalstellen berechnen will, so kann man diejenige Differenz und dann alle folgenden außer Acht lassen, die so klein ist, daß sie auf die ersten zehn Decimalstellen des Logarithmen keinen Einfluß mehr ausübt.

Denkt man sich z. B. die Brigg'schen Logarithmen

u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5

der Zahlen

10000, 10001, 10002, 10003, 10004, 10005, etc. etc.

---

*) Wir erinnern den Leser daran, daß $\Delta^3 u_x$ z. B. gefunden wird, wenn man von der Gleichung

$$\Delta^3 u_x = (u_1 - 1)^3 u_x = u_{x+3} - 3u_{x+2} + 3u_{x+1} - u_x,$$

d. h.

$$\Delta^3 u_x = log(x+3h) - 3log(x+2h) + 3log(x+h) - log\, x$$

$$= log\left(1 + \frac{3h}{x}\right) - 3log\left(1 + \frac{2h}{x}\right) + 3log\left(1 + \frac{h}{x}\right)$$

ausgeht, diese drei Logarithmen nach der bekannten Reihe für $log(1+z)$ in Reihen verwandelt, die nach Potenzen von $\frac{h}{x}$ fortlaufen, dann aber diese drei Reihen in eine einzige vereinigt.

so findet sich für sie, weil $h = 1$ und $x = 10000$ ist,

$$\begin{aligned} \Delta u_0 &= \quad 0{,}00004\ 34272\ 76863 \\ \Delta^2 u_0 &= -0{,}00000\ 00043\ 42076 \\ \Delta^3 u_0 &= \quad 0{,}00000\ 00000\ 00868. \end{aligned}$$

Deshalb kann man $\Delta^4 u_0$, $\Delta^5 u_0$, etc. etc., aber auch $\Delta^4 u_1$, $\Delta^5 u_1$, etc. etc. und $\Delta^4 u_2$, $\Delta^5 u_2$, etc. etc. etc., welche bezüglich, weil x größer geworden ist, noch kleiner seyn werden, eine lange Zeit hindurch außer Acht lassen. Man denkt sich daher die Glieder der dritten Differenz-Reihe alle einander gleich, berechnet daraus und aus dem direkt berechneten $\Delta^2 u_0$ die Glieder der zweiten Differenz-Reihe bloß durch fortgesetzte Addition, daraus die Glieder der ersten Differenz-Reihe, in so fern das Glied Δu_0 durch direkte Berechnung bekannt ist, und daraus, so wie aus $u_0 = 4$, die Glieder der Ur-Reihe selbst. Diese letzteren sind dann die gesuchten Logarithmen.

Da nach §. 91. I.)

$$u_n = u_0 + n_1 \cdot \Delta u_0 + n_2 \cdot \Delta^2 u_0 + n_3 \cdot \Delta^3 u_0 + n_4 \cdot \Delta^4 u_0 + \cdots + \Delta^n u_0$$

ist, wo n_1, n_2, n_3, n_4, etc. etc. Binomial-Koefficienten sind, so folgt, daß wenn n sehr groß wird, dann die Glieder $n_4 \cdot \Delta^4 u_0 + n_5 \cdot \Delta^5 u_0 + \cdots + \Delta^n u_0$ doch bedeutend genug werden können und daher nicht mehr außer Acht gelassen werden dürfen.

Weil aber $\Delta^4 u_0$, wenn $u_x = M \cdot log\, x$ ist, mit dem Gliede $-6M\frac{h^4}{x^4}$ beginnt, so würde das 51te Glied u_{50} d. h. $log\, 10050$, je nachdem man das Glied $n_4 \cdot \Delta^4 u_0$ wegläßt oder noch hinzunimmt, um

$\frac{50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot 6M \cdot \frac{1}{10^{16}}$ größer oder kleiner werden, während M zwischen $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{2}$ liegt. Dieser Unterschied, als Decimal-Bruch ausgedrückt, hat noch in den 10 ersten Decimalstellen lauter Nullen; also kann man auf diesem Wege die Logarithmen der Zahlen 10000 bis 10050 bis auf 10 Decimalstellen genau berechnen, wenn man nur die ganze Rechnung mit 15 Decimalstellen führt. — Um eine Kontrolle der Rechnung zu haben, muß man von Zeit zu Zeit einzelne Logarithmen, z. B. die der zusammengesetzten Zahlen, direkt berechnen, welche letzteren durch Addition der Logarithmen ihrer Faktoren erhalten werden.

Hörte aber bei 10051 die Genauigkeit der Rechnung auf, so würde man von vorn anfangen, und

$log\, 10050$, $log\, 10051$, $log\, 10052$, $log\, 10053$, $log\, 10054$, etc. etc.

durch

$$u_0, \qquad u_1, \qquad u_2, \qquad u_3, \qquad u_4, \text{ etc. etc.}$$

vorstellen, für $x = 10050$ und $h = 1$, die Werthe Δu_0, $\Delta^2 u_0$, $\Delta^3 u_0$ direkt

aus den Formeln berechnen, und nun aus der dritten Differenz-Reihe die zweite, aus dieser die erste, und aus dieser zuletzt wieder die Ur-Reihe durch fortgesetzte Addition bilden. — U. s. f. —

Zur Berechnung der Differenzen Δu_x, $\Delta^2 u_x$, $\Delta^3 u_x$, etc. etc. aus $u_x = M \cdot log\, x$, kann man sich auch noch viel schneller convergirende Reihen bilden. Man nimmt nämlich nach §. 67. des I. Bds.) für $\Delta x = h$,

1) $$\Delta u_x = M \cdot log\,(x+h) - M \cdot log\, x$$
$$= 2M\left[\frac{h}{2x+h} + \frac{1}{3}\left(\frac{h}{2x+h}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{h}{2x+h}\right)^5 + \cdots\right].$$

Hernach hat man noch

$$\Delta^2 u_x = M \cdot log\,(x+2h) - 2M \cdot log\,(x+h) + M \cdot log\, x.$$

Geht man nun von

$$log\,(x+h) - log\, x = log\left(1+\frac{h}{x}\right)$$
$$= \left(\frac{h}{x} - \frac{1}{2}\frac{h^2}{x^2} + \frac{1}{3}\frac{h^3}{x^3} + \frac{1}{4}\frac{h^4}{x^4} + \cdots\right)$$

aus, setzt man hier $-h$ statt h, addirt man dann die beiden Gleichungen, und wird zuletzt noch $x+h$ statt x gesetzt, so erhält man für $\Delta x = h$,

2) $$\Delta^2 u_x = -2M\left[\frac{1}{2}\left(\frac{h}{x+h}\right)^3 + \frac{1}{4}\left(\frac{h}{x+h}\right)^4 + \frac{1}{6}\left(\frac{h}{x+h}\right)^6 + \cdots\right].$$

Will man nur eine Genauigkeit in den zehn erstern Decimalstellen, denkt man sich $h = 1$ und $x = 10000$, so reichen in 1.) die zwei ersten Glieder, in 2.) aber reicht schon das erste Glied allein aus, um die gewünschte Genauigkeit zu geben *).

§. 126.

Berechnung von Sinus- und Kosinus-Tafeln.

I. Zur Berechnung der Sinus-Tafeln wendet man auf eine sehr bequeme Weise die Formel an

---

*) Mehr hierüber findet man in den neuern Turiner Memoiren vom Jahre 1790—91 von Delambre.

$$u_2 = u_1 + \Delta u_1 = u_1 + \Delta u_0 + \Delta^2 u_0.$$

Es giebt, wenn man unter u_0, u_1, u_2 bezüglich *sin* x, *sin* (x+h), *sin* (x+2h) versteht, zunächst

$$\Delta u_0 = sin\,(x+h) - sin\,x = 2cos\,(x+\tfrac{1}{2}h)\cdot sin\,\tfrac{1}{2}h$$
$$\Delta^2 u_0 = 2sin\,\tfrac{1}{2}h\cdot[cos\,(x+\tfrac{3}{2}h) - cos\,(x+\tfrac{1}{2}h)]$$
$$= -2(sin\,\tfrac{1}{2}h)^2\cdot sin\;x+h)$$

und dann

1) $$sin\,(x+2h) = sin\,(x+h) + [sin\,(x+h) - sin\,x] - 2(sin\,\tfrac{1}{2}h)^2\cdot sin\,(x+h).$$

Diese Formel 1.) wird nun auf folgende Art zur Berechnung der *sin* 2°, *sin* 3°, *sin* 4°, *sin* 5°, *sin* 6°, etc. etc. benutzt. Man setzt nämlich h = 1°, also $\frac{1}{2}h = \frac{1}{2}$ und berechnet sich aus der Reihe

2) $$sin\,x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots$$

den Sinus von $\frac{1}{2}$ Grad, indem man nach der Proportion

$$180 : \pi = \tfrac{1}{2} : x, \quad x = \frac{\pi}{360}$$

findet, wo π den halben Umfang des Kreises für den Radius 1 vorstellt und diese Zahl statt x in 2.) substituirt. Setzt man dann in 2.) statt x die doppelt so große Zahl, so findet man auch noch *sin* 1° direkt. — Hernach aber setzt man in die Formel 1.) zuerst h = 1°, und statt x nach und nach 0°, 1°, 2°, 3°, 4°, ... bis 60°, und man erhält, nach Delambre, diese Sinus bis auf 10 Decimalstellen genau. Die Rechnung wird erleichtert, wenn man $2(sin\,\frac{1}{2}h)^2$ ein für allemal mit den neun Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 multiplicirt, um statt der Multiplikation von $2(sin\,\frac{1}{2}h)^2$ mit *sin*(x+h) die einzelnen Reihen bloß addiren zu dürfen. Nachgehends wendet man die Formel

$$sin(60° + \varphi) = sin(60° - \varphi) + sin\,\varphi$$

an, um die Sinus von 60° bis zu 90° zu berechnen.

Zur Kontrolle der Rechnung dienen

$sin\,15° = \sqrt{\frac{3}{8}} - \sqrt{\frac{1}{6}}$; $sin\,18° = \frac{1}{4}\sqrt{5} - \frac{1}{4}$; $sin\,30° = \frac{1}{2}$;
$sin\,45° = \frac{1}{2}\sqrt{2}$; $sin\,54° = \frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$; $sin\,60° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Auf dieselbe Weise kann man aber auch dann die Sinus von Minute zu Minute, oder von 10 Sekunden zu 10 Sekunden berechnen.

Setzt man aber in der Gleichung 1.) x − 2h statt x, so erhält man noch

3) $$sin\,(x-2h) = sin\,(x-h) - [sin\,x - sin\,(x-h)] - 2(sin\,\tfrac{1}{2}h)^2\cdot sin\,(x-h).$$

Mittelst dieser Formel kann man die Sinus auch rückwärts berechnen, indem man von $sin\,90^0 = 1$ ausgeht.

II. Wendet man die von Legendre gegebene Formel (§. 108. Note)

$$\Delta^n(sin\,x) = -2(sin\,\tfrac{1}{2}h)^2 \cdot [\Delta^{n-1} sin\,x + \Delta^{n-2} sin\,x]$$

an, um $\Delta(sin\,x)$, $\Delta^2(sin\,x)$, $\Delta^3(sin\,x)$, $\Delta^4(sin\,x)$, etc. etc. etwa für $x = 0$ zu berechnen, so kann man die Sinus aller Bogen, wie im vorhergehenden Paragraphen die Logarithmen durch fortgesetzte Bildung der dritten, zweiten und ersten Differenz-Reihe berechnen *).

§. 126bis.

Berechnung der Logarithmen der Sinus und Kosinus in Tafeln.

I. Um die Logarithmen der Sinus zu berechnen, dazu schlägt Delambre die Gleichung vor

$$1)\quad log\cdot sin\,(x+h) = log\cdot sin\,x + 2M\cdot\left[\frac{\Delta sin\,x}{2sin\,x+\Delta sin\,x} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{\Delta sin\,x}{2sin\,x+\Delta sin\,x}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\frac{\Delta sin\,x}{2sin\,x+\Delta sin\,x}\right)^5 + \ldots\right]$$

und er empfiehlt, letztere dazu zu gebrauchen, um $log\cdot sin\,x$ von 45^0 bis zu 90^0 zu berechnen. Die Logarithmen der Sinus der Winkel unter 45^0 finden sich dann aus der Gleichung

$$2)\quad log\cdot sin\,\tfrac{1}{2}\varphi = log\cdot sin\,\varphi - (log\cdot cos\,\tfrac{1}{2}\varphi + log\,2).$$

II. Die Taylor'sche Reihe giebt

$$3)\quad \Delta log\cdot sin\,x = log\cdot sin\,(x+h) - log\cdot sin\,x$$
$$= cotg\,x\cdot h - (1+cotg\,x^2)\cdot\frac{h^2}{2!} + \ldots;$$

und hier reichen die zwei ersten Glieder aus, um $\Delta log\cdot sin\,x$ zu liefern, wenn h sehr klein ist.

---

*) Auf diesem Wege sind unter Prony's Leitung die großen Sinus-Tafeln von 0,00001 zu 0,00001 des Quadranten, in dem Cadastre-Büreau zu Paris, berechnet worden, von denen zwei gleichlautende Abschriften in die Archive des Längenbüreau's der Sternwarte zu Paris niedergelegt worden sind.

III. Es ist

$$2sin\,x + \Delta sin\,x = sin\,x + sin\,(x+h),$$

also

$$\frac{\Delta sin\,x}{2sin\,x + \Delta sin\,x} = \frac{sin\,(x+h) - sin\,x}{sin\,(x+h) + sin\,x} = tg\,\tfrac{1}{2}h \cdot cotg\,(x + \tfrac{1}{2}h).$$

Substituirt man dies in die Formel 1.), so wird solche brauchbar, um bereits vorhandene Tafeln zu verificiren, indem man die Glieder der Reihe dadurch berechnet, daß man die Logarithmen der Tangenten und Kotangenten aus den gegebenen Tafeln selbst nimmt, da die Fehler in den letztern Decimalstellen bei dieser Rechnung keinen Einfluß ausüben.

Auf diesem Wege hat Delambre mehrere Unrichtigkeiten in den großen Vlacq'schen Tafeln entdeckt *).

Zweite Abtheilung.

Von der Interpolation.

§. 127.

Ist u eine, entweder wirklich unbekannte Funktion von x, oder eine, zwar bekannte Funktion von x, welche man aber etwa wegen ihrer, zu numerischen Rechnungen unbequemen Form ignoriren will; kennt man ferner zu n Werthen $x_1, x_2, x_3, \cdots x_n$ von x die zugehörigen Werthe $u_1, u_2, u_3, \cdots u_n$ von u, alle in Ziffern ausgedrückt, und sucht man nun zu gegebenen Werthen von x, welche zwischen diesen n Werthen liegen, die zugehörigen Werthe von u, so sagt man: „man wolle Werthe von u interpoliren oder einschalten. —

---

*) Delambre findet noch, indem er in der Reihe für $log(1+y) - z^2$ statt y schreibt

$$log\,(1-z^2) = -M(z^2 + \tfrac{1}{2}z^4 + \tfrac{1}{3}z^6 + \tfrac{1}{4}z^8 + \cdots);$$

und daraus, indem er $z = sin\,x$ also $1 - z^2 = cos\,x^2$ nimmt

$$log\,cos\,x = -M(\tfrac{1}{2}sin\,x^2 + \tfrac{1}{4}sin\,x^4 + \tfrac{1}{6}sin\,x^6 + \cdots).$$

Diese Formel ist ungemein schnell convergent, so lange x noch klein ist.

§. 128.

Das einfachste Mittel, wenn z. B. zu vier Werthen von x die vier Werthe von u bekannt sind, solche Zwischen-Werthe von u zu finden, besteht darin, daß man statt u eine ganz beliebige Funktion von x setzt mit vier noch unbestimmten Koefficienten a, b, c, d, z. B.

$$(\odot)\ldots \quad \begin{cases} u = \dfrac{a + bx + cx^3}{dx^2} \\ \text{oder} \\ u = a + b \cdot \sin x + c \cdot \cos x + dx^2, \end{cases}$$

dann in diese Gleichung nach und nach jedes der vier zusammengehörigen Paare x_1, u_1; x_2, u_2; x_3, u_3, zuletzt x_4, u_4 statt x und u substituirt, — aus den vier dadurch hervorgehenden Gleichungen aber, die vier Unbekannten a, b, c und d findet. — Diese gefundenen Werthe werden dann statt a, b, c und d in die genommene Gleichung (⊙.) substituirt, und die so bestimmte Gleichung (⊙.) ist dann eine Interpolations-Formel.

Die genommene Gleichung (⊙) liefert nämlich nun, zu den Werthen x_1, x_2, x_3 und x_4 von x, genau wieder die Werthe u_1, u_2, u_3 und u_4 von u; an diesen Stellen fällt also die in ⊙.) gefundene Funktion u mit der wirklichen unbekannten oder ignorirten Funktion u_x zusammen. Für die Zwischen-Werthe von x liefert aber nun die Gleichung ⊙.) ebenfalls zugehörige Werthe von u, welche zwar nicht mit den Werthen genau zusammenfallen werden, welche die unbekannte oder ignorirte wirkliche Funktion u_x geliefert haben würde, von denen man aber annimmt, daß sie von den letzteren sehr wenig nur abweichen*).

---

*) Denkt man sich x und u als Koordinaten-Werthe, so drückt die genommene Gleichung ⊙.) eine Kurve aus, welche mit der durch die Gleichung $u = u_x$ gegebenen Kurve, (wenn u_x die unbekannte oder ignorirte Funktion ist) die 4 zu $x = x_1, x_2, x_3, x_4$ gehörigen Punkte gemein hat, in allen übrigen Punkten aber von der letztern Kurve verschieden seyn wird, während man hofft, daß dieser Unterschied der Ordinaten zwischen diesen vier Punkten nur unbedeutend ist.

§. 129.

Statt aber eine beliebige Funktion von x zu nehmen, nimmt man gewöhnlich die einfachste unter allen, nämlich eine ganze (algebraische rationale) Funktion von x, d. h. man setzt

$$(\mathfrak{C})\cdots \qquad u = a + bx + cx^2 + dx^3,$$

und bestimmt auf die vorbeschriebene Weise die unbestimmt gelassenen Koefficienten a, b, c und d.

Die Hauptsache bleibt nun die Frage: durch welche Rechnung lassen sich aus den vier Gleichungen

$$\begin{aligned} u_1 &= a + bx_1 + cx_1^2 + dx_1^3 \\ u_2 &= a + bx_2 + cx_2^2 + dx_2^3 \\ u_3 &= a + bx_3 + cx_3^2 + dx_3^3 \\ u_4 &= a + bx_4 + cx_4^2 + dx_4^3 \end{aligned}$$

die vier Unbekannten a, b, c und d am bequemsten finden? —

Laplace, welcher von dem Princip der successiven Annäherung ausging, stellte diese ganze Funktion von x in der folgenden Form hin, nämlich ganz allgemein

$$\text{I.} \quad u = u_1 + (x-x_1)\cdot\delta u_1 + (x-x_1)(x-x_2)\cdot\delta^2 u_1 + (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\cdot\delta_3 u_1 + \cdots,$$

wo die Koefficienten δu_1, $\delta^2 u_1$, $\delta^3 u_1$ bestimmt werden aus den Gleichungen

$$\delta u_1 = \frac{u_2 - u_1}{x_2 - x_1}, \qquad \delta u_2 = \frac{u_3 - u_2}{x_3 - x_2}, \qquad \delta u_3 = \frac{u_4 - u_3}{x_4 - x_3},$$

$$\delta u_4 = \frac{u_5 - u_4}{x_5 - x_4}, \cdots$$

$$\delta^2 u_1 = \frac{\delta u_2 - \delta u_1}{x_3 - x_1}, \qquad \delta^2 u_2 = \frac{\delta u_3 - \delta u_2}{x_4 - x_2}, \qquad \delta^2 u_3 = \frac{\delta u_4 - \delta u_3}{x_5 - x_3}, \cdots$$

$$\delta^3 u_1 = \frac{\delta^2 u_2 - \delta^2 u_1}{x_4 - x_1}, \qquad \delta^3 u_2 = \frac{\delta^2 u_3 - \delta^2 u_2}{x_5 - x_2}, \cdots$$

$$\delta^4 u_1 = \frac{\delta^3 u_2 - \delta^3 u_1}{x_5 - x_1}, \cdots$$

Diese Form läßt sich aber auf beliebig viel zum interpoliren benutzte Werthe von x ausdehnen *).

Man wird aber diese Formel nur dann anwenden, wenn man bemerkt, daß in dem Schema

$$\begin{array}{llll} \delta u_1, & \delta u_2, & \delta u_3, & \delta u_4, \quad \cdots \\ \delta^2 u_1, & \delta^2 u_2, & \delta^2 u_3, & \cdots \\ \delta^3 u_1, & \delta^3 u_2, & \cdots & \\ \delta^4 u_1, & \cdots & & \end{array}$$

die Glieder der folgenden und namentlich die der letztern Horizontal-Reihen sehr klein werden; und man wird dann in der I.) so viele Glieder nehmen, daß das letzte mit diesem sehr kleinen Koefficienten $\delta^3 u_1$, oder $\delta^4 u_1$, oder $\delta^5 u_1$, etc. bereits versehen ist.

§. 130.

Verfolgt man die Bildung der Ausdrücke für δu_1, $\delta^2 u_1$, $\delta^3 u_1$, so findet man, daß δu_1 sich nicht verändert, wenn die Zeiger 1 und 2 an x (und u) beliebig mit einander vertauscht werden; daß $\delta^2 u_1$ sich nicht verändert, wenn man die Zeiger 1, 2, 3, an x (und u) beliebig mit einander vertauscht; daß endlich auch $\delta^3 u_1$ unverändert bleibt, wenn man die Zeiger 1, 2, 3, 4 an x (und u) beliebig mit einander vertauscht, wenn nur diese Vertauschung bei x und u zugleich und gleichmäßig geschieht.

Bezeichnet man daher die Koefficienten

---

*) Man findet diese Formel I.), wenn man die ganze Funktion (.) sogleich in dieser Form annimmt, nämlich

$$u = u_1 + (x - x_1)\cdot\delta u_1 + (x - x_1)(x - x_2)\cdot\delta^2 u_1 + (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\cdot\delta^3 u_1$$

mit den unbestimmten Koefficienten δu_1, $\delta^2 u_1$, $\delta^3 u_1$, — und in sie statt x und u, nach und nach x_2 und u_2, dann x_3 und u_3, endlich x_4 und u_4 substituirt. Aus den dadurch hervorgehenden Gleichungen

$$u_2 = u_1 + (x_2 - x_1)\cdot\delta u_1, \quad u_3 = u_1 + (x_3 - x_1)\cdot\delta u_1 + (x_3 - x_1)(x_3 - x_2)\cdot\delta^2 u_1$$

und $$u_4 = u_1 + (x_4 - x_1)\cdot\delta u_1 + (x_4 - x_1)(x_4 - x_2)\cdot\delta^2 u_1 + (x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)\cdot\delta^3 u_1$$

werden dann die durch δu_1, $\delta^2 u_1$, $\delta^3 u_1$ bezeichneten und vorher unbestimmt gelassenen Koefficienten ohne Weiteres, so wie sie oben gefunden sind, bestimmt.

δu_1, $\delta^2 u_1$, $\delta^3 u_1$, $\delta^4 u_1$
bezüglich durch $[1,2]$, $[1,2,3]$, $[1,2,3,4]$, $[1,2,3,4,5]$,
so ist $[1,2] = [2,1]$, $[1,2,3] = [2,1,3] = [3,1,2] =$ etc.
so wie $[1,2,3,4] = [2,3,1,4] =$ etc. etc. etc.
Und diese Ausdrücke bilden sich aus dem Schema

x_1	u_1	$[1,2]$			
x_2	u_2	$[2,3]$	$[1,2,3]$		
x_3	u_3	$[3,4]$	$[2,3,4]$	$[1,2,3,4]$	$[1,2,3,4,5]$
x_4	u_4	$[4,5]$	$[3,4,5]$	$[2,3,4,5]$	
x_5	u_5				

auf folgende Weise. Jedes Glied in jeder Vertikal-Reihe dieses Schema wird nämlich gefunden, wenn man die Differenz der beiden Glieder in der nächst vorhergehenden Vertikal-Reihe, zwischen denen das zu findende im Schema sichtbar ist, durch die Differenz $x_\nu - x_\mu$ dividirt, wenn statt ν die letzte Ziffer des Minuenden, statt μ dagegen die erste Ziffer des Subtrahenden in der durch $x_\nu - x_\mu$ zu dividirenden Differenz gesetzt wird.

Und hat man diese Werthe berechnet, so ist die Interpolations-Formel I.) jetzt so zu nehmen

II. $$u = u_1 + (x-x_1)[1,2] + (x-x_1)(x-x_2)[1,2,3] + (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)[1,2,3,4] + \cdots.$$

§. 131.

In einer andern Form giebt Lagrange das End-Resultat der zu Anfange des vorhergehenden Paragraphen angedeuteten Rechnung. Dieser findet nämlich die Formel C. des §. 129.) in der Form

III. $$u = \frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)} \cdot u_1 + \frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)} \cdot u_2 + \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)} \cdot u_3 + \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)} \cdot u_4.$$

Man sieht es der Formel sogleich an, daß sie für $x = x_1, x_2, x_3, x_4$ allemal bezüglich $u = u_1, u_2, u_3, u_4$ liefert, und daß sie rechts in eine ganze Funktion von x vom dritten Grade umgeformt werden kann. — Auch ist es jedem Anfänger leicht, dieselbe Formel für den Fall auszudehnen, wo mehr oder weniger als vier Werthe zum Interpoliren benutzt werden sollen. Sollen z. B. nur die zwei Paare von Werthen x_1, u_1 und x_2, u_2 benutzt werden, so erhält man

$$1) \qquad u' = \frac{(x-x_2)}{x_1-x_2}\cdot u_1 + \frac{x-x_1}{x_2-x_1}\cdot u_2,$$

wo u' die statt der unbekannten oder ignorirten Funktion u_x jetzt gesetzte ganze Funktion (vom ersten Grade) ist. — Und will man auch noch das dritte Paar Werthe, nämlich x_3, u_3 zum Interpoliren benutzen, so erhält man die ganze Funktion u'' vom zweiten Grade, nämlich

$$2) \quad u'' = \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}\cdot u_1 + \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}\cdot u_2 + \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}\cdot u_3,$$

welche jetzt statt der gesuchten oder ignorirten Funktion u_x gesetzt wird *).

---

*) Man kann aus diesen Formen des Lagrange auch leicht wieder die des Laplace ableiten. Aus 1.) folgt nämlich augenblicklich

$$1') \quad u' = u_1 + (x-x_1)\cdot\left[\frac{u_1}{x_1-x_2} + \frac{u_2}{x_2-x_1}\right] = u_1 + (x-x_1)\cdot\delta u_1.$$

Aus 2.) dagegen, wenn man die 1.) subtrahirt, ergiebt sich

$$2') \quad u'' = u' + (x-x_1)(x-x_2) \times\left[\frac{u_1}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + \frac{u_2}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + \frac{u_3}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}\right] = u' + (x-x_1)(x-x_2)\cdot\delta^2 u_1.$$

Und aus III.) ergiebt sich, wenn man die 2.) subtrahirt

$$3') \quad u = u'' + (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) \times\left[\frac{u_1}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)} + \frac{u_2}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)} + \frac{u_3}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)} + \frac{u_4}{(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)}\right] = u'' + (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\cdot\delta^3 u_1.$$

Addirt man aber alle drei letzteren Gleichungen und hebt man links und rechts die u' und u'' gegenseitig weg, so erhält man

$$u = u_1 + (x-x_1)\cdot\delta u_1 + (x-x_1)(x-x_2)\cdot\delta^2 u_1 + (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\cdot\delta^3 u_1,$$

wo die δu_1, $\delta^2 u_1$, $\delta^3 u_1$ die in den eckigen Klammern stehenden Ausdrücke bedeuten. Dies ist aber die Form des Laplace §. 129. I.) oder §. 130. II.).

Aus dieser Betrachtung geht zugleich die Symmetrie der durch δu_1

Anmerkung. Es ist sehr leicht, nach dem Muster der Lagrange'schen Formel, noch neue Interpolations-Formeln zu bilden, welche zwar nicht mit einander übereinstimmen, von denen aber jede die gegebenen Werthe von u genau liefert, und Zwischen-Werthe berechnen läßt. Nimmt man z. B.

$$u = \frac{\sin p(x - x_2)\cdot\sin q(x - x_3)\cdot\sin r(x - x_4)}{\sin p(x_1 - x_2)\cdot\sin q(x_1 - x_3)\cdot\sin r(x_1 - x_4)}\cdot u_1$$
$$+\frac{\sin p'(x - x_2)\cdot\sin q'(x - x_3)\cdot\sin r'(x - x_4)}{\sin p'(x_2 - x_1)\cdot\sin q'(x_2 - x_3)\cdot\sin r'(x_2 - x_4)}\cdot u_2$$
$$+\frac{\sin p''(x - x_1)\cdot\sin q''(x - x_2)\cdot\sin r''(x - x_4)}{\sin p''(x_3 - x_1)\cdot\sin q''(x_3 - x_2)\cdot\sin r''(x_3 - x_4)}\cdot u_3$$
$$+\frac{\sin p'''(x - x_1)\cdot\sin q'''(x - x_2)\cdot\sin r'''(x - x_3)}{\sin p'''(x_4 - x_1)\cdot\sin q'''(x_4 - x_2)\cdot\sin r'''(x_4 - x_3)}\cdot u_4,$$

wo p, q, r, p′, q′, r′, p″, q″ und r″ ganz beliebige reelle Zahlen vorstellen, — so hat man nach den verschiedenen Werthen dieser letztern, unendlich viele transcendente Funktionen von derselben Form, welche für $x = x_1, x_2, x_3, x_4$ nach der Reihe $u = u_1, u_2, u_3, u_4$ liefern, welche also als Interpolations-Formeln gebraucht werden können (nach §. 128.).

Und nimmt man dieselbe Form, setzt man aber statt der Sinus, jetzt Tangenten, so hat man abermals unendlich viele, wiederum transcendente Interpolations-Formeln.

Alle diese Formeln würden jedoch wenig Bequemlichkeit in der Rechnung gewähren.

§. 132.

Encke giebt (nach Gauß *) den Rath, die zum Interpoliren mittelst der Form des Laplace (§. 130. II.) zu benutzenden Werthe von

---

oder [1, 2], $\delta^2 u_1$ oder [1, 2, 3], $\delta^3 u_1$ oder [1, 2, 3, 4] bezeichneten Ausdrücke augenfällig hervor, während die Gleichungen 1′.), 2′.) und 3′.) deutlich sehen lassen, daß jedes folgende Glied der Laplace'schen Form eine neue Correktion ist, des bis zu diesem Gliede für u genommenen Ausdrucks.

*) S. Berliner astronom. Jahrbuch für das Jahr 1830. Berlin 1828.

von x (und u) jedesmal so zu wählen, daß man von dem Werthe von x (und zugehörigem Werthe von u) ausgeht, welcher dem x am nächsten liegt, und solchen nach und nach durch diejenigen Werthe von x (und u) verbessert, welche abwechselnd auf beiden Seiten des bestimmten Werthes x liegen und immer der Reihe nach die nächsten sind. Man kann zu dem Ende die Formel II. des §. 130.) vorher danach umformen, wenn man nur eben so viele zum Interpoliren zu benutzende Werthe von x (und u) hat, welche dem bestimmten Werth x (zu welchem das zugehörige u gefunden werden soll) der Größe nach vorausgehen, als auch solche, die diesem bestimmten Werthe von x der Größe nach folgen.

Sind z. B. die der Größe nach geordneten Werthe von x durch x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, etc. vorgestellt, und liegt x zwischen x_2 und x_3, aber dem x_3 näher als dem x_2, so kann man in der Form II. des §. 130.) zuerst x_3, dann x_2, hernach x_4 und zuletzt x_1 benutzen, und sie nimmt dann, wenn daselbst 3, 2, 4, 1 statt bezüglich 1, 2, 3, 4 substituirt und dabei die Gleichheit der Ausdrücke [2,3,4], [3,4,2], etc. etc. beachtet wird, wie solche im §. 130.) bemerkbar gemacht worden, — die folgende Form an:

$$\text{IV.}\quad u = u_3 + (x-x_3)[2,3] + (x-x_3)(x-x_2)[2,3,4] + (x-x_3)(x-x_2)(x-x_4)[1,2,3,4].$$

Dieser Form würde man sich also bedienen, wenn x zwischen x_2 und x_3 und dem x_3 näher läge, als dem x_2. — Dabei liegen die Differenz-Werthe [2,3], [2,3,4], [1,2,3,4] im Schema des §. 130.) alle der Reihe nach abwechselnd oberhalb und unterhalb eines und desselben Horizontalstriches, der im gedachten Schema zwischen u_3 und [2,3] gedacht wird, der also auch zwischen u_3 und u_2, aber dem u_3 näher liegt.

Liegt x abermals zwischen x_2 und x_3, aber dem x_2 näher, so nimmt man zuerst x_2, dann x_3, hernach x_1, zuletzt x_4, und die Formel §. 130. II.) ändert sich dann so um:

V. $$u = u_2 + (x-x_2)[2,3] + (x-x_2)(x-x_3)[1,2,3] + (x-x_2)(x-x_3)(x-x_1)[1,2,3,4],$$

welche Form jetzt gebraucht wird, immer unter der Voraussetzung, daß unter x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 die der Größe nach auf einander folgenden Werthe von x verstanden werden. — Dabei liegen die jetzt gebrauchten Differenz-Größen $[2,3]$, $[1,2,3]$, $[1,2,3,4]$ der Reihe nach abwechselnd (im Schema des §. 130.) unterhalb und oberhalb des Horizontal-Striches, der zwischen u_2 uud $[2,3]$ gedacht wird, der also zwischen u_2 und u_3, aber dem u_2 näher liegt.

Und liegt x zwischen x_3 und x_4, so wird man x_1 gar nicht, dagegen x_5 benutzen, und zwar, wenn x dem x_3 näher als dem x_4 liegt, zuerst x_3, dann x_4, hernach x_2, zuletzt x_5, so daß die Formel II. des §. 130.) jetzt so umgeformt wird, nämlich

VI. $$u = u_3 + (x-x_3)[3,4] + (x-x_3)(x-x_4)[2,3,4] + (x-x_3)(x-x_4)(x-x_2)[2,3,4,5];$$

und diese Form ist es also, welche jetzt benutzt wird. — Die hier gebrauchten Differenz-Werthe $[3,4]$, $[2,3,4]$, $[2,3,4,5]$ liegen jetzt der Reihe nach abwechselnd unterhalb und oberhalb des Horizontal-Striches, welcher im Schema des §. 130.) zwischen u_3 und $[3,4]$ hindurchgedacht wird, welcher also zwischen u_3 und u_4, aber dem u_3 näher liegt.

§. 133.

I. Denkt man sich die Differenzen der auf einander folgenden Werthe x_1, x_2, x_3, x_4, ... von x, alle einander gleich und $= h$, so liefert die Formel §. 102. I.), wenn man daselbst zuerst x_1 statt x, und dann x statt $x_1 + nh$ substituirt, so daß

1) $$t = \frac{x - x_1}{h} \quad \text{statt } n$$

gesetzt werden muß, sogleich die Interpolations-Formel

$$2)\quad u = u_1 + t\cdot\Delta u_1 + \frac{t(t-1)}{2}\cdot\Delta^2 u_1 + \frac{t(t-1)(t-2)}{2\cdot 3}\cdot\Delta^3 u_1 + \cdots.$$

Denn diese Formel enthält zur Rechten, weil $t = \frac{x - x_1}{h}$ ist, eine ganze Funktion von x, und giebt, so oft $x = x_1$, oder $x = x_2$, oder $x = x_3$, oder $x = x_4$, etc. etc. gesetzt wird, insofern dann $t = 1, 2, 3$ oder 4, etc. genommen werden muß (nach §. 91. I.), allemal auch die gegebenen zugehörigen Werthe u_1, u_2, u_3, u_4, etc. etc. (aus denen die Differenzen Δu_1, $\Delta^2 u_1$, $\Delta^3 u_1$ etc. berechnet worden sind).

Dieser Interpolations-Formel bediente man sich früher gewöhnlich; sie geht aber auch aus der Formel II. des §. 130.) hervor. Man findet nämlich unter der jetzigen Voraussetzung daselbst

$$[1,2] = \frac{\Delta u_1}{h};\quad [1,2,3] = \frac{\Delta^2 u_1}{2!h^2};\quad [1,2,3,4] = \frac{\Delta^3 u_1}{3!h^3};\ \text{u. s. f.,}$$

und deshalb geht die Formel §. 130. II.) sogleich in die vorliegende 2.) über.

II. Die Formel §. 132. IV.) giebt dagegen unter der jetzigen Voraussetzung, während x zwischen x_2 und x_3, dem x_3 aber näher gedacht bleibt, und wenn

$$3)\qquad \frac{x_3 - x}{h} = t \qquad \text{gesetzt wird,}$$

$$4)\quad u = u_3 - t\cdot\Delta u_2 + \frac{t(t-1)}{2}\cdot\Delta^2 u_2 - \frac{t(t-1)(t+1)}{2\cdot 3}\cdot\Delta^3 u_1 + \cdots.$$

Die Formel §. 132. V.) dagegen, wo x abermals zwischen x_2 und x_3 und dem x_2 näher gedacht ist, giebt, wenn

$$5)\qquad \frac{x - x_2}{h} = t \qquad \text{gesetzt wird,}$$

$$6)\quad u = u_2 + t\cdot\Delta u_2 + \frac{t(t-1)}{2}\cdot\Delta^2 u_1 + \frac{t(t-1)(t+1)}{2\cdot 3}\cdot\Delta^3 u_1 + \cdots\text{*}).$$

---

*) Für die wirkliche Ausrechnung schreibt man die Formeln 4.) und 6.) noch so:

Was aber die Anwendung dieser Formeln betrifft, so wird man, wenn genug Werthe von u zu Gebote stehen, so viele Glieder nehmen, bis die folgenden der Differenzen $\Delta^2 u$, $\Delta^3 u$, $\Delta^4 u$, $\Delta^5 u$, etc. etc. sehr klein werden. Würden letztere nämlich zuletzt der Null genau gleich, so wäre die unbekannte und ignorirte Funktion u_x selbst eine ganze Funktion von x (nach den §§. 101. und 93.), und dann würde jede dieser Interpolations-Formeln mit ihr genau zusammenfallen, auch in allen Zwischen-Werthen.

§. 134.

In dem besonderen Falle, wo x genau in der Mitte zwischen x_2 und x_3 liegt, wo also im §. 133. N. 6.) $t = \frac{1}{2}$ seyn sollte, würde diese Formel 6.) selbst werden, wenn man bis zu $\Delta^4 u_0$ fortgeht,

1) $$u = u_2 + \tfrac{1}{2}\Delta u_2 - \tfrac{1}{8}\Delta^2 u_1 - \tfrac{1}{16}\Delta^3 u_1 + \tfrac{3}{128}\Delta^4 u_0.$$

Unter derselben Voraussetzung giebt aber die Formel §. 131. N. 4.) noch, weil daselbst $t = -\frac{1}{2}$ genommen werden muß,

2) $$u = u_3 - \tfrac{1}{2}\Delta u_2 - \tfrac{1}{8}\Delta^2 u_2 + \tfrac{1}{16}\Delta^3 u_1 + \tfrac{3}{128}\Delta^4 u_1.$$

Addirt man nun beide Resultate, und nimmt man von der Summe die Hälfte, so hat man zuletzt

3) $$u = \tfrac{1}{2}(u_2 + u_3) - \tfrac{1}{16}(\Delta^2 u_1 + \Delta^2 u_2) + \tfrac{3}{256}(\Delta^4 u_0 + \Delta^4 u_1),$$

wo die Differenzen immer über und unter einem durch x_2 und x_3 gezogenen Horizontal-Striche nächst anliegen, sobald man sie nach dem Schema des §. 130.) bildet. Setzt man aber

$$u_2 + u_3 = k, \quad \Delta^2 u_1 + \Delta^2 u_2 = k', \quad \Delta^4 u_0 + \Delta^4 u_1 = k'',$$
$$\Delta^6 u_{-1} + \Delta^6 u_0 = k''', \quad \text{u. s. w. s.}$$

so geht die Form 3.) noch über in

4) $$u = \tfrac{1}{2}\left(k - \tfrac{1}{8}\left[k' - \tfrac{3}{16}\left(k'' - \tfrac{5}{24}\left\{k''' - \cdots\right\}\right)\right]\right),$$

wo x_{-1}, etc. Werthe von x vorstellen, die dem x_0 noch an Größe vorausgehen.

---

4) $$u = u_3 - t\left(\Delta u_2 - \frac{t-1}{2}\left[\Delta^2 u_2 - \frac{t+1}{3}\left(\Delta^3 u_1 - \frac{t-2}{4}\Delta^4 u_1\right)\right]\right),$$

wo t die Bedeutung in 3.) hat; — und

6) $$u = u_2 + t\left(\Delta u_2 + \frac{t-1}{2}\left[\Delta^2 u_1 + \frac{t+1}{3}\left(\Delta^3 u_1 + \frac{t-2}{4}\Delta^2 u_0\right)\right]\right),$$

wo t die Bedeutung in 5.) hat, während $\Delta^4 u_0$ voraussetzt, daß man noch $x_0 < x_1$ und das zugehörige u_0 zum interpoliren benützt habe.

Nach dieser Formel rechnet man bequem, und sie giebt u oft aus zwei Gliedern derselben genau genug, wenn nämlich die 4ten Differenzen schon sehr klein seyn sollten, so daß sie außer Acht gelassen werden können.

Will man aber zwischen u_2 und u_3 drei Glieder einschalten, so kann man zuerst zwischen je zwei Gliedern genau in die Mitte eines einschalten nach der vorstehenden Formel; dann aber, nachdem die neuen Differenzen gebildet sind, zwischen diesem und x_2, und zwischen diesem und x_3 jedesmal noch eines einschalten, und dazu sich derselben Formel bedienen. — U. s. w. f.

Dritte Abtheilung.

Summation endlicher Reihen.

§. 135.

Die Formel §. 102. IV.), nämlich

$$(\odot)\cdots \quad f_x + f_{x+h} + f_{x+2h} + \cdots + f_{x+(n-1)h} = \Sigma f_{x+nh} - \Sigma f_x,$$

giebt die Summe von n Gliedern einer Reihe, welche alle aus einem allgemeinen Gliede f_x dadurch hervorgehen, daß man statt x nach und nach n verschiedene, um gleichviel (nämlich um h) von einander verschiedene Werthe setzt; — sobald man nur aus dem gegebenen f_x dies endliche Integral Σf_x zu finden im Stande ist.

Setzt man also z. B. statt f_x nach und nach die Funktionen, für welche man (in den §.§. 105. 107. 108. und 109.) die endlichen Integrale finden konnte, so erhält man die Summen der n ersten Glieder einer größeren Anzahl solcher Reihen. Namentlich geht aus §. 105. N. 2.)

$$1) \quad a^x + a^{x+h} + a^{x+2h} + \cdots + a^{x+(n-1)h} = \frac{a^{x+nh} - a^x}{a^h - 1}$$

hervor. Dies ist die Summe der ersten n Glieder einer sogenannten geometrischen Progression, die man in den Elementen auch auf andere Weise findet (S. I. Bd. pag. 87. N. 6.).

Ferner aus §. 107. A. 1.)

2) $x^{mIh}+(x+h)^{mIh}+(x+2h)^{mIh}+\cdots+(x+(n-1)h)^{mIh}$
$$=\frac{(x+(n-1)h)^{m+1Ih}-(x-h)^{m+1Ih}}{(m+1)h},$$
wenn nur m positiv oder negativ ganz oder Null ist.

Aus §. 107. B. 1.) ergiebt sich ferner

3) $x^{mI-h}+(x+h)^{mI-h}+(x+2h)^{mI-h}+\cdots+(x+(n-1)h)^{mI-h}$
$$=\frac{(x+nh)^{m+1I-h}-x^{m+1I-h}}{(m+1)h}.$$
wenn nur m positiv oder negativ ganz oder Null ist.

Dagegen findet sich aus §. 107. C. 1.) für die Summe von n auf einander folgenden Binomial-Koefficienten (für $h=1$ genommen)

4) $x_m+(x+1)_m+(x+2)_m+\cdots+(x+n-1)_m=(x+n)_{m+1}-x_{m+1}$,
wenn nur m entweder Null oder eine positive ganze Zahl ist *).

Ferner geben die Formeln §. 108. N.N. 3. und 4.)

5) $cos\,x+cos(x+h)+cos(x+2h)+\cdots+cos(x+(n-1)h)$
$$=\frac{sin(x+(n-\frac{1}{2})h)-sin(x-\frac{1}{2}h)}{2sin\frac{1}{2}h}=\frac{cos(x+\frac{1}{2}(n-1)h)\cdot sin\frac{1}{2}nh}{sin\frac{1}{2}h},$$

6) $sin\,x+sin(x+h)+sin(x+2h)+\cdots+sin(x+(n-1)h)$
$$=\frac{cos(x-\frac{1}{2}h)-cos(x+(n-\frac{1}{2})h)}{2sin\frac{1}{2}h}=\frac{sin(x+\frac{1}{2}(n-1)h)\cdot sin\frac{1}{2}nh}{sin\frac{1}{2}h}.$$

u. s. w. f.

Diese Formeln N.N. 1.—6.) sind nur als eben so viele Beispiele anzusehen. — Hier noch einige weitere Beispiele.

Ist z. B. die arithmetische Reihe der ersten Ordnung gegeben, *nämlich*

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ \cdots\ n-1,\ n,\ n+1,\ \cdots,$$

und soll die Summe ihrer n ersten Glieder gefunden werden, so hat man das allgemeine x^{te} Glied $=x$ und $h=1$; also $f_x=x$, und (nach §. 109. N. 2. für $h=1$)

$$\Sigma f_x=\tfrac{1}{2}(x^2-x)=\tfrac{1}{2}x(x-1)=\frac{x(x-1)}{2}.$$

Folglich findet sich (nach ⊙.)

7) $x+(x+1)+(x+2)+\cdots+(x+n-1)=\frac{(x+n)(x+(n-1))}{2}-\frac{x(x-1)}{2}$;

also für $x=1$

8) $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n^{2I1}}{2}$.

Soll nun die Summe der n ersten Glieder der figurirten Reihe der zweiten Ordnung

---

*) Nimmt man h nicht $=1$, sondern $h=h$, so erhält man die Summe von n Binomial-Koefficienten, von denen je zwei nächst auf einander folgende um $h-1$ zwischenliegender von einander entfernt sind.

1, 3, 6, 10, 15, ...

gefunden werden, deren allgemeines x^{tes} Glied $\frac{x^{2|1}}{2}$ ist (und welche man auch die Triangular-Zahlen nennt), so hat man $h=1$ und $f_x=\frac{x^{2|1}}{2}$, also nach §. 107. N. 1.) und §. 104. N. 4.)

$$\Sigma f_x = \frac{(x-1)^{3|1}}{3!};$$

folglich hat man (nach ⊙)

$$9)\quad \frac{x^{2|1}}{2}+\frac{(x+1)^{2|1}}{2}+\frac{(x+2)^{2|1}}{2}+\cdots+\frac{(x+n-1)^{2|1}}{2} = \frac{(x+(n-1)^{3|1}-(x-1)^{3|1}}{3!},$$

und für $x=1$

$$10)\quad 1+3+6+\cdots+\frac{n^{2|1}}{2!}=\frac{n^{3|1}}{3!}.$$

So finden sich hier die Summen der n ersten Glieder aller figurirten Reihen direkt, welche wir im I. Bd. §. 33.) auf indirektem Wege gefunden haben. Auf demselben Wege kann man also die Summe von n auf einander folgenden Gliedern von unzählich vielen solchen Reihen finden.

§. 136.

Man findet dieselben Resultate auch durch folgende Betrachtung. Bezeichnet man nämlich durch S_x die Summe der ersten x—1 Glieder einer Reihe, deren allgemeines x^{tes} Glied $=f_x$ ist (so daß die Reihe selbst durch

$$f_1,\quad f_2,\quad f_3,\quad f_4,\quad \cdots\ f_{x-1},\quad f_x$$

vorgestellt wird), so ist S_{x+1} die Summe der ersten x Glieder, also die Summe aus S_x und f_x, d. h. es ist

$$S_{x+1}=S_x+f_x,\quad \text{folglich}\quad S_{x+1}-S_x=f_x,$$

d. h.

$$(\mathbb{C})\cdots\quad \Delta_1 S_x = f_x \quad \text{und} \quad S_x=\Sigma_1 f_x+C_x,$$

wo C_x eine jedesmal noch zu bestimmende Constante ist, während Δ_1 und Σ_1 die zu Ende des §. 99.) festgestellte Bedeutung haben.

Soll also die Summe der n ersten Glieder dieser Reihe gefunden werden, so wird man nach ℂ.) S_x finden, dann aber $n+1$ statt x setzen.

Beispiel 1. Wollte man danach z. B. die Summe der n ersten Glieder der Reihe 1.) des §. 135.), nämlich der Reihe

$$a^x,\ a^{x+h},\ a^{x+2h},\ a^{x+3h},\ \ldots\ a^{x+(n-1)h}$$

finden, so würde man vor allen Dingen einen andern Buchstaben, etwa z, statt x setzen, um statt n jetzt x setzen zu können, so daß, wenn man noch p statt h setzt, zu summiren wäre die Reihe

$$a^z,\ a^{z+p},\ a^{z+2p},\ \ldots\ a^{z+(x-1)p}.$$

Hernach hätte man

$$f_x = a^{z+(x-1)p} = a^{z-p}\cdot a^{xp};$$

also (nach §. 104. IV.)

$$\Sigma_1 f_x = a^{z-p}\cdot\Sigma_1(a^{xp}) = a^{z-p}\cdot\frac{a^{xp}\ *)}{a^p-1} = \frac{a^{z+(x-1)p}}{a^p-1}.$$

Man hat daher nun nach der Formel (C.)

$$1)\qquad S_x = \frac{a^{z+(x-1)p}}{a^p-1} + C,$$

wo die Constante C noch zu bestimmen bleibt, während S_x die Summe der ersten $x-1$ Glieder der Reihe vorstellt. Setzt man daher $x=2$, so bedeutet S_x das erste Glied a^z der Reihe, und die vorliegende Gleichung 1.) geht daher über in

$$2)\qquad a^z = \frac{a^{z+p}}{a^p-1} + C,\quad \text{und giebt}\quad C = -\frac{a^z}{a^p-1}.$$

Dieser Werth von C in die 1.) substituirt, giebt nun

$$3)\qquad S_x = \frac{a^{z+(x-1)p} - a^z}{a^p-1}.$$

Setzt man nun hier $n+1$ statt x, so wie wiederum x statt z, und h statt p, so erhält man die Summe der ersten n Glieder der Reihe

$$a^x,\ a^{x+h},\ a^{x+2h},\ \ldots\ a^{x+(n-1)h},\ = \frac{a^{x+nh}-a^x}{a^h-1},$$

d. h. genau so wie im vorhergehenden §. 135. N. 1.).

Wir wollen es dem Anfänger überlassen, auch die übrigen Nummern des vorhergehenden §. 135.) auf dem jetzigen Wege wieder zu finden, und geben lieber hier noch mehrere besondere Beispiele.

Beispiel 2. Es sey zu summiren die Reihe von Brüchen, deren Zähler $=1$, deren Nenner aber die figurirten Zahlen der mten Ordnung sind. — Es ist also zu summiren die Reihe, deren allgemeines xtes Glied

---

*) Setzt man nämlich $a^p = b$, so ist $a^{xp} = b^x$ und $\Sigma_1(a^{xp}) = \Sigma_1(b^x) = \frac{b^x}{b-1}$ (nach §. 105. N. 2.) d. h. $\Sigma_1 a^{xp} = \frac{a^{xp}}{a^p-1}$.

$$f_x = \frac{(m-1)!}{x^{m-1|1}}$$

ist, d. h. die Reihe (für $x = 1, 2, 3, 4, \cdots x$)

$$1, \quad \frac{1}{m}, \quad \frac{2!}{m(m+1)}, \quad \frac{3!}{m(m+1)(m+2)}, \quad \cdots.$$

Man hat hier, weil (nach I. Bd. §§. 26. 27.)

$$\frac{1}{x^{m-1|1}} = (x+m-1)^{-(m-1)|1}$$

und (nach §. 104. N. 6. und §. 107. N. 1.)

$$\Sigma_x(x+m-1)^{-(m-1)|1} = \frac{(x+m-2)^{-(m-2)|1}}{-m+2} = -\frac{1}{(m-2)\cdot x^{m-2|1}}$$

ist, — sogleich

$$\Sigma_x(f_x) = (m-1)!\,\Sigma_x\left(\frac{1}{x^{m-1|1}}\right) = -\frac{(m-1)!}{(m-2)\cdot x^{m-2|1}}.$$

Folglich giebt die Formel (C.) jetzt

$$1) \qquad S_x = -\frac{(m-1)!}{(m-2)\cdot x^{m-2|1}} + C,$$

wo die Constante C noch zu bestimmen bleibt, während S_x die Summe der ersten $x-1$ Glieder der Reihe repräsentirt. Setzt man daher $x=2$, so stellt S_x das erste Glied 1 der Reihe vor, und die letztere Gleichung geht dadurch über in

$$2) \qquad 1 = -\frac{1}{m-2} + C, \quad \text{so daß} \quad C = \frac{m-1}{m-2}$$

wird. Dieser Werth von C in S_x substituirt, giebt

$$3) \qquad S_x = \frac{m-1}{m-2} - \frac{(m-1)!}{(m-2)\cdot x^{m-2|1}}.$$

Setzt man daher hier statt x jetzt $n+1$, so erhält man die Summe der ersten n Glieder der gegebenen Reihe

$$1 + \frac{1}{m} + \frac{2!}{m(m+1)} + \frac{3!}{m(m+1)(m+2)} + \frac{4!}{m(m+1)(m+2)(m+3)} + \cdots,$$

$$= \frac{m-1}{m-2}\cdot\left[1 - \frac{(m-2)!}{(n+1)^{m-2|1}}\right].$$

Beispiel 3. Sollte die Summe der ersten n Glieder der Reihe

$$1^m, \quad 2^m, \quad 3^m, \quad 4^m, \cdots x^m, \cdots$$

gefunden werden, für irgend eine bestimmte ganze positive Zahl m, so würde man nach §. 109.) $\Sigma_x(x^m)$ nehmen, dann

$$S_x = \Sigma_x(x^m) + C$$

haben; hierauf für $x=2$, $S_x = 1^m = 1$ nehmen müssen und daraus C bestimmen; diesen Werth von C hier herein substituiren, zuletzt aber $n+1$ statt x setzen.

Diese Beispiele mögen aber ausreichen, um den Anfänger in den Stand zu setzen, deren noch mehrere und beliebig viele, welche eine glückliche Lösung zulassen, selbst zu lösen.

§. 137.

Hat man die Summe von n Gliedern einer Reihe gefunden, so darf man nur n immer größer und größer sich denken, zuletzt aber unendlich groß, um die Summe von immer mehr und mehr und zuletzt von unendlich vielen Gliedern derselben Reihe zu haben, wenn nur im letztern Falle die unendliche Reihe selbst convergent ist.

So kann man also in vielen Fällen auch die Summen von unendlichen und convergenten Reihen angeben.

Setzt man z. B. im Beispiel 2.) zu §. 136.) $n = \infty$, so erhält man sogleich

$$1 + \frac{1}{m} + \frac{2!}{m(m+1)} + \frac{3!}{m(m+1)(m+2)} + \cdots \text{ in inf.} = \frac{m-1}{m-2},$$

wenn nicht $(m-2)!$ die Form $\frac{1}{0}$ annimmt, also wenn $m \gtreqless 2$ ist.

Also findet sich für $m = 3, 4, 5,$

$$1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{10} + \tfrac{1}{15} + \tfrac{1}{21} + \cdots = 2,$$
$$1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{10} + \tfrac{1}{20} + \tfrac{1}{35} + \tfrac{1}{56} + \cdots = \tfrac{3}{2},$$
$$1 + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{15} + \tfrac{1}{35} + \tfrac{1}{70} + \tfrac{1}{126} + \cdots = \tfrac{4}{3},$$

u. s. w. f.; wobei man nicht übersehen wird, daß die Nenner dieser Reihen genau die figurirten Zahlen der 2ten, 3ten, 4ten, etc. etc. Ordnung sind.

Für $m = 2$ würde man finden

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \cdots \text{ in inf.} = \tfrac{1}{0}.$$

Wir wissen aber, daß diese Reihe die gemeine harmonische Reihe und divergent ist.

Vierzehntes Kapitel.

Von der Summation allgemeiner und numerischer unendlichen Reihen, namentlich solcher die nach Sinus und Kosinus der vielfachen Bogen fortlaufen.

§. 138.

Außer den unendlichen, nach Potenzen von z fortlaufenden Reihen, welche durch die Division zweier ganzen Funktionen von z hervorgehen, und welche in der Geschichte der Mathematik unter dem Namen der recurrenten (recurrirenden) Reihen vorkommen, bemerke man noch die Reihen

1) $1+m_1z+m_2z^2+m_3z^3+m_4z^4+\cdots$ in inf. $=(1+z)^m$,

wo m_1, m_2, m_3, m_4, etc. etc. Binomial-Koefficienten vorstellen,

2) $1+\frac{z\cdot log\,a}{1}+\frac{z^2\cdot(log\,a)^2}{2!}+\frac{z^3\cdot(log\,a)^3}{3!}+\cdots=a^z$,

also

3) $1+\frac{z}{1}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots=e^z$,

wenn *log* a den natürlichen Logarithmen und e die Basis desselben vorstellt; — ferner

4) $z-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{3}z^3-\frac{1}{4}z^4+\cdots=log\,(1+z)$,

5) $z+\frac{1}{3}z^3+\frac{1}{5}z^5+\frac{1}{7}z^7+\cdots=\frac{1}{2}log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$,

6) $z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\cdots=sin\,z$,

7) $1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\frac{z^8}{8!}-\cdots=cos\,z$,

8) $z - \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{5}z^5 - \frac{1}{7}z^7 + \cdots = \frac{1}{tg} z$ d. h. *arc. tg* z,

9) $z + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}z^3 + \frac{1}{5} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot z^5 + \frac{1}{7} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot z^7 + \cdots = \frac{1}{sin} z$

d. h. *arc. sin* z,

welche am gewöhnlichsten und häufigsten erscheinen.

Setzt man in diesen Reihen statt z irgend einen andern zusammengesetzten Ausdruck, z. B. eine Funktion von x, so kann man die Resultate nach einem andern Veränderlichen, z. B. x ordnen; aber die Ausdrücke, welche sich zur Rechten ergeben, heißen dann doch immer die Summen dieser unendlichen Reihen zur Linken.

Man kann sich ferner eine unendliche Reihe aus zwei, drei, oder mehreren solchen unendlichen Reihen, deren Summen man kennt, durch arithmetische Operationen verbunden denken, und man erhält durch dieselbe Verbindung ihrer Summen einen Ausdruck in endlicher Form, der, in eine Reihe entwickelt, dieselbe wieder hervorbringt. Auch dieser Ausdruck wird die Summe dieser unendlichen Reihe genannt; und ihn zu finden heißt „die unendliche Reihe summiren."

Man kann aber auch aus gefundenen Summen die Summen von neuen Reihen dadurch finden, daß man die gegebenen nach irgend einem der vorkommenden Buchstaben differenziirt oder integrirt.

Die Kunst des Summirens einer Reihe besteht also im Wesentlichen darin, daß man sucht die Reihe in solche zu zerlegen, deren Summe man kennt, oder durch Einführung eines neuen Veränderlichen auf eine andere zurückzuführen, deren Summe bekannt ist.

Wir wollen aber hier nur einige der interessantesten summirbaren Reihen geben, und uns nachgehends auf die Kunst des Summirens hier nicht weiter einlassen.

§. 139.

Lehrsatz.

Ist bekannt die Summe irgend einer Reihe

1) $A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+A_4x^4+\cdots=F_x$,

so kann man sogleich auch eine nach Sinus oder Kosinus der vielfachen Bogen fortlaufende Reihe summiren, welche dieselben Koefficienten hat; denn es ist dann allemal

2) $A_0+A_1v\cdot\cos z+A_2v^2\cdot\cos 2z+A_3v^3\cdot\cos 3z$
$+A_4v^4\cdot\cos 4z+\cdots=\frac{1}{2}([F_x]_{v\cdot e^{zi}}+[F_x]_{v\cdot e^{-zi}})$

und

3) $A_1v\cdot\sin z+A_2v^2\cdot\sin 2z+A_3v^3\cdot\sin 3z$
$+A_4v^4\cdot\sin 4z+\cdots=\frac{1}{2i}([F_x]_{v\cdot e^{zi}}-[F_x]_{v\cdot e^{-zi}})$,

wo $[F_x]_{v\cdot e^{zi}}$ und $[F_x]_{v\cdot e^{-zi}}$ das bedeuten, was aus F_x wird, wenn man bezüglich $v\cdot e^{zi}$ und $v\cdot e^{-zi}$ statt x schreibt, während statt e^{zi} auch $\cos z+i\cdot\sin z$, und statt e^{-zi} auch $\cos z-i\cdot\sin z$ geschrieben werden kann (nach I. Bd. §. 70. III. u. IV.).

Und sind die Reihen 2.) und 3.) convergent, sobald $v=1$ gesetzt wird, so hat man dann auch noch

4) $A_0+A_1\cdot\cos z+A_2\cdot\cos 2z+A_3\cdot\cos 3z+A_4\cdot\cos 4z+\cdots$
$=\frac{1}{2}[F_x]_{e^{zi}}+\frac{1}{2}[F_x]_{e^{-zi}}$;

und

5) $A_1\cdot\sin z+A_2\cdot\sin 2z+A_3\cdot\sin 3z+A_4\cdot\sin 4z+\cdots$
$=\frac{1}{2i}[F_x]_{e^{zi}}-\frac{1}{2i}[F_x]_{e^{-zi}}$.

Der Grund davon ist folgender: das allgemeine r^{te} Glied der Reihe 3.) ist

$$A_r\cdot v^r\cdot\sin rz,\quad\text{also auch}\quad A_r\cdot v^r\cdot\frac{e^{rzi}-e^{-rzi}}{2i},$$

folglich auch

$$\frac{1}{2i}A_r\cdot(v\cdot e^{zi})^r-\frac{1}{2i}A_r\cdot(v\cdot e^{-zi})^r.$$

Die Reihe 3.) zerfällt daher in die Differenz zweier anderen Reihen, deren allgemeine Glieder (wenn man den gemeinschaftlichen Faktor $\frac{1}{2i}$ herausgesetzt sich denkt) bezüglich

$$A_r\cdot(v\cdot e^{zi})^r\quad\text{und}\quad A_r\cdot(v\cdot e^{-zi})^r$$

sind, deren Summen also nach 1.) bezüglich

$$= [F_x]_{v \cdot e^{zi}} \quad \text{und} \quad = [F_x]_{v \cdot e^{-zi}}$$

gefunden werden. — Auf ganz analoge Weise zerlegt sich die Reihe 2.), wenn man den Faktor $\frac{1}{2}$ herausſetzt, in die Summe dieſer beiden letztern Reihen.

§. 140.

Geſetzt es wären zu ſummiren die beiden Reihen

$$(R)\cdots \quad \cos nz + n_1 \cdot \cos(n-2)z + n_2 \cdot \cos(n-4)z + n_3 \cdot \cos(n-6)z + \cdots$$

und

$$(S)\cdots \quad \sin nz + n_1 \cdot \sin(n-2)z + n_2 \cdot \sin(n-4)z + n_3 \cdot \sin(n-6)z + \cdots,$$

in welchen n_1, n_2, n_3, etc. etc. die auf einander folgenden Binomial-Koefficienten einer n^{ten} Potenz vorſtellen, ſo daß man hat

$$1) \quad 1 + n_1 x + n_2 x^2 + n_3 x^3 + n_4 x^4 + \cdots = (1+x)^n,$$

ſo würde man alſo damit beginnen, daß man dieſe Reihen in einfachere zerlegte. Weil aber

$$\cos(n-2r)z = \cos nz \cdot \cos 2rz + \sin nz \cdot \sin 2rz$$

und $$\sin(n-2r)z = \sin nz \cdot \cos 2rz - \cos nz \cdot \sin 2rz$$

iſt, und dies immer gilt, wenn ſtatt r nach und nach 1, 2, 3, 4, 5, 6, und alle poſitiven ganzen Zahlen geſetzt werden, ſo reduciren ſich dieſe Reihen R und S ſogleich auf dieſe anderen Reihen

$$(R_1)\cdots \quad 1 + n_1 \cdot \cos 2z + n_2 \cdot \cos 4z + n_3 \cdot \cos 6z + n_4 \cdot \cos 8z + \cdots$$

$$(S_1)\cdots \quad n_1 \cdot \sin 2z + n_2 \cdot \sin 4z + n_3 \cdot \sin 6z + n_4 \cdot \sin 8z + \cdots,$$

ſo nämlich, daß man hat:

$$2) \quad R = R_1 \cdot \cos nz + S_1 \cdot \sin nz;$$

$$3) \quad S = R_1 \cdot \sin nz - S_1 \cdot \cos nz;$$

und man darf daher nur noch die Summen der Reihen R_1 und S_1 finden.

Dieſe letzteren Reihen werden aber nun unmittelbar nach

§. 139.) summirt, wenn man statt 2z einen einzigen Buchstaben setzt. Man erhält nämlich aus der 1.), nach §. 139.)

$$4) \qquad R_1 = \frac{(1+e^{2zi})^n + (1+e^{-2zi})^n}{2}$$

und

$$5) \qquad S_1 = \frac{(1+e^{2zi})^n - (1+e^{-2zi})^n}{2i}.$$

Aus diesen Ausdrücken zur Rechten muß man aber, indem man sie umformt, i d. h. $\sqrt{-1}$ herausschaffen, weil sich letztere wechselseitig aufheben müssen. Nun ist aber

$$1+e^{2zi} = (e^{zi}+e^{-zi})\cdot e^{zi} = 2\cos z\cdot(\cos z + i\cdot\sin z)$$

und

$$1+e^{-2zi} = (e^{zi}+e^{-zi})\cdot e^{-zi} = 2\cos z\cdot(\cos z - i\cdot\sin z);$$

folglich auch

$$6) \qquad (1+e^{2zi})^n = (2\cos z)^n\cdot(\cos nz + i\cdot\sin nz)$$

$$7) \qquad (1+e^{-2zi})^n = (2\cos z)^n\cdot(\cos nz - i\cdot\sin nz),$$

wo jedesmal der Faktor $(2\cos z)^n$ alle Werthe vorstellt, welche die n^{te} Potenz hat, damit die Ausdrücke zur Rechten genau eben so viele und genau dieselben Werthe vorstellen, welche die n^{ten} Potenzen zur Linken haben.

Will man aber in diesen Ausdrücken 6.) und 7.) zur Rechten die Potenz $(2\cos z)^n$ nur als eindeutig behandeln und so als ob sie in jedem dieser beiden Ausdrücke 6.) und 7.) jedesmal einen und denselben Werth vorstelle, so darf man nur den Faktor 1^n oder $\cos 2nc\pi + i\cdot\sin 2nc\pi$ noch hinzufügen, wo c 0 und jede positive oder negative ganze Zahl vorstellt, und man hat dann

$$8) \quad (1+e^{2zi})^n = (2\cos z)^n\cdot[\cos n(2a\pi+z) + i\cdot\sin n(2a\pi+z)]$$

$$9) \quad (1+e^{-2zi})^n = (2\cos z)^n\cdot[\cos n(2b\pi+z) - i\cdot\sin n(2b\pi+z)],$$

wo wir einmal a, das andere Mal b statt c gesetzt haben, um die Unabhängigkeit der Werthe von 9.) und 8.) deutlich auszusprechen, während statt a, wie statt b nach und nach Null

und alle positiven und negativen ganzen Zahlen gesetzt werden müssen, der Faktor $(2\cos z)^n$ aber in beiden Ausdrücken einen und denselben seiner Werthe vorstellt.

Addirt man nun die Ausdrücke in 8.) und 9.) zur Rechten, so ist die Hälfte dieser Summe die Summe der Reihe R_1 (nach 4.); subtrahirt man dagegen den Ausdruck in 9.) zur Rechten, von dem in 8.) zur Rechten, und dividirt man die Differenz noch durch 2i, so erhält man die Summe der Reihe S_1 (nach 5.).

Weil aber die Ausdrücke in 8.) und 9.) zur Rechten, so oft n eine ganze Zahl nicht ist, mehrere Werthe haben, so entsteht jetzt die wichtigste der Fragen, nämlich, welche dieser Werthe man addiren muß, um R_1, welche derselben man subtrahiren muß, um S_1 wirklich zu bekommen? — Um diese Frage zu beantworten, wollen wir annehmen, daß n beliebig reell sey; dann muß man unterscheiden,

a) wenn $\cos z$ positiv ist, also $(2\cos z)^n$ auch positiv und eindeutig genommen werden kann;

b) wenn $\cos z$ negativ, also $-2\cos z$ positiv ist, folglich $(-2\cos z)^n$ einen einzigen positiven Werth vorstellen kann.

I. Ist nun erstlich $\cos z$ positiv, — wird dann unter $(2\cos z)^n$ ihr einziger positiver Werth verstanden, und hat man sich endlich überzeugt, daß die Reihen R_1 und S_1 convergent sind (für diese Werthe von z, welche man jetzt im Auge hat), so muß man in 8.) und 9.) $b = a$ nehmen, damit die imaginären Theile herausfallen; und man erhält daher nun

$$10) \qquad R_1 = (2\cos z)^n \cdot \cos n(2a\pi + z)$$

und

$$11) \qquad S_1 = (2\cos z)^n \cdot \sin n(2a\pi + z),$$

wo nur noch ausgemittelt werden darf, ob Null statt a, oder welche ganze Zahl statt a gesetzt werden muß.

Weil

Weil jedoch die Gleichungen 10.) und 11.) nicht für alle Werthe von z gelten, sondern nur für diejenigen, welche *cos* z positiv machen, also nur für die Werthe von z, welche in dem $(4\mathfrak{d}-1)^{ten}$ oder $(4\mathfrak{d}+1)^{ten}$ Quadranten liegen, wo $\mathfrak{d}$ entweder 0 oder jede positive oder negative ganze Zahl vorstellt; — weil also diese Gleichungen 10.) und 11.) immer nur für Werthe von z gelten, welche in zwei auf einander folgenden Quadranten liegen, für die Werthe von z aber nicht mehr gelten, welche in den nächsten beiden Quadranten genommen werden, wohl aber wieder in den dann nächsten beiden Quadranten ihre Wahrheit behalten, u. s. w. f.; so behält $\mathfrak{a}$ entweder immer einen und denselben Werth (der nur einmal bestimmt zu werden braucht, um für immer bestimmt zu seyn), oder es kann sich der Werth von $\mathfrak{a}$ ändern müssen, so oft z eine neue Kluft von zwei Quadranten übersprungen hat, innerhalb welcher die Formeln 10.) und 11.) nicht gelten können. Innerhalb je zweier Quadranten aber, für welche die Formeln 10.) und 11.) wieder gelten, und wo gar nichts vorhanden ist, was die Unterbrechung des Stetigkeits-Gesetzes rechtfertigen könnte, muß $\mathfrak{a}$ einen und denselben Werth behalten. Da nun für $z = 0$, die Reihe $R_1, = 2^n$ und die Reihe $S_1, = 0$ wird, sobald man diese Reihe für $z = 0$ direckt betrachtet; und da dieselben Resultate auch aus den Formeln 10.) und 11.) hervorgehen, wenn man Null statt $\mathfrak{a}$ setzt, so folgt:

daß man für alle Werthe von z, welche zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegen (für welche *cos* z positiv wird, und unter denen sich $z = 0$ befindet) $\mathfrak{a} = 0$ nehmen müsse.

Die Formeln 10.) und 11.) geben daher

12) $R_1 = (2\,cos\,z)^n \cdot cos\,nz$ und $S_1 = (2\,cos\,z)^n \cdot sin\,nz$;

und dann noch (wegen 2. und 3.)

13) $R = (2\,cos\,z)^n$ und $S = 0$

für alle Werthe von z, welche zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegen.

Für $z = 2\mu\pi$, wo μ irgend eine bestimmte ganze Zahl vorstellt, nehmen die Reihen R_1 und S_1, wenn man sie direkt betrachtet, offenbar dieselben Werthe an, wie für $z = 0$, nämlich bezüglich 2^n und 0. Die Formeln 10.) und 11.) geben aber dieselben Resultate (für jedes reelle n) nur dann, wenn $n = -\mu$ genommen wird.

Also muß für alle Werthe von z, welche zwischen $(2\mu - \frac{1}{2})\pi$ und $(2\mu + \frac{1}{2})\pi$ liegen, $n = -\mu$ genommen werden.

Die Formeln 10.) und 11.) geben daher

$$14)\quad \begin{cases} R_1 = (2\cos z)^n \cdot \cos n(-2\mu\pi + z) \\ \qquad\qquad = (2\cos z)^n \cdot \cos n(2\mu\pi - z) \\ S_1 = (2\cos z)^n \cdot \sin n(-2\mu\pi + z) \\ \qquad\qquad = -(2\cos z)^n \cdot \sin n(2\mu\pi - z); \end{cases}$$

und (wegen 2. und 3.) dann auch noch

$$15)\quad \begin{cases} R = (2\cos z)^n \cdot \cos 2\mu n\pi \\ S = (2\cos z)^n \cdot \sin 2\mu n\pi, \end{cases}$$

für alle Werthe von z, welche zwischen $(2\mu - \frac{1}{2})\pi$ und $(2\mu + \frac{1}{2})\pi$ liegen, wo μ entweder 0 oder positiv oder negativ ganz gedacht wird, so daß die Formeln 14.) und 15.) (für $\mu = 0$) die Formeln 12.) und 13.) in sich schließen.

II. Betrachtet man aber die übrigen Werthe von z, für welche $\cos z$ negativ, also $-\cos z$ positiv ist, so daß statt $(-\cos z)^n$ ein positiver Werth gesetzt werden kann, so setze man in den Formeln 6.) und 7.) statt $(2\cos z)^n$ zunächst $(-2\cos z)^n \cdot (-1)^n$, dann aber statt $(-1)^n$ wiederum $\cos n(2c+1)\pi + i \cdot \sin n(2c+1)\pi$, und denke sich unter der Potenz $(-2\cos z)^n$ ihren einzigen positiven Werth. Dann erhält man statt der Gleichungen 8.) und 9.) jetzt

$$8')\quad (1 + e^{2zi})^n$$
$$= (-2\cos z)^n \cdot [\cos n((2a+1)\pi + z) + i \cdot \sin n((2a+1)\pi + z)]$$

$$9')\quad (1 + e^{-2zi})^n$$
$$= (-2\cos z)^n \cdot [\cos n((2b+1)\pi + z) - i \cdot \sin n((2b+1)\pi + z)].$$

Statt der Gleichungen 10.) und 11.) erhält man jetzt, so oft *cos* z negativ ist,

$$10') \quad R_1 = (-2\cos z)^n \cdot \cos n((2a+1)\pi+z)$$

$$11') \quad S_1 = (-2\cos z)^n \cdot \sin n((2a+1)\pi+z).$$

Weil nun für $z=(2\mu+1)\pi$ (welches in der Mitte liegt zwischen den Grenz-Werthen $z=(2\mu+\frac{1}{2})\pi$ und $z=(2\mu+\frac{3}{2})\pi$, innerhalb welcher *cos* z jedesmal negativ wird)

$\cos 2z = \cos 4z = \text{etc.} = 1$ und $\sin 2z = \sin 4z = \text{etc.} = 0$

wird, — so geben die Reihen R_1 und S_1 für $z=(2\mu+1)\pi$ direkt bezüglich die Werthe 2^n und 0. — Dieselben Resultate gehen aber (für jedes reelle n) auch aus den Formeln 10'.) und 11'.) hervor, wenn man daselbst $(2\mu+1)\pi$ statt z setzt, also -1 statt *cos* z, zugleich aber $a=-(\mu+1)$ nimmt. Folglich

hat man für alle Werthe von z, welche zwischen $(2\mu+\frac{1}{2})\pi$ und $(2\mu+\frac{3}{2})\pi$ liegen, $a=-(\mu+1)$ zu nehmen. Es ist daher

$$12') \quad \begin{cases} R_1 = (-2\cos z)^n \cdot \cos n(-(2\mu+1)\pi+z) \\ S_1 = (-2\cos z)^n \cdot \sin n(-(2\mu+1)\pi+z) \end{cases}$$

oder

$$13') \quad \begin{cases} R_1 = \quad (-2\cos z)^n \cdot \cos n((2\mu+1)\pi-z) \\ S_1 = -(-2\cos z)^n \cdot \sin n((2\mu+1)\pi-z); \end{cases}$$

und dann auch (wegen 2. und 3.)

$$14') \quad \begin{cases} R = (-2\cos z)^n \cdot \cos (2\mu+1)n\pi \\ S = (-2\cos z)^n \cdot \sin (2\mu+1)n\pi \end{cases}$$

für jeden Werth von z, welcher zwischen $(2\mu+\frac{1}{2})\pi$ und $(2\mu+\frac{3}{2})\pi$ liegt, während μ Null oder irgend eine positive oder negative ganze Zahl vorstellt*).

---

*) In den „Aufsätzen aus dem Gebiete der höhern Mathematik", Berlin 1823, hat der Verfasser (in der vierten Abtheilung) die Summen dieser Reihen zuerst gegeben. Sie sind auch von Poinsot und Cauchy eben so gefunden worden, von Poinsot fast gleichzeitig, von Cauchy spä-

§. 141.

Als ein Beispiel anderer Art zur Erläuterung des im §. 138.) beschriebenen Summations-Verfahrens summiren wir noch die unendliche Reihe

$$(T)\cdots \quad \sin z - \frac{1}{3^4}\cdot\sin 3z + \frac{1}{5^4}\cdot\sin 5z - \frac{1}{7^4}\cdot\sin 7z + \cdots.$$

Nach §. 139.) würde die Summe dieser Reihe gefunden seyn, sobald man die Summe der Reihe

$$(U)\cdots \quad x - \frac{1}{3^4}\cdot x^3 + \frac{1}{5^4}\cdot x^5 - \frac{1}{7^4}\cdot x^7 + \cdots$$

gefunden hätte. Weil aber diese letztere Summe nicht so bequem gefunden werden kann, so greifen wir die Reihe T direckt an. Sie giebt sogleich

$$1)\ \partial T_z = \cos z - \frac{1}{3^3}\cdot\cos 3z + \frac{1}{5^3}\cdot\cos 5z - \frac{1}{7^3}\cdot\cos 7z + \cdots$$

$$2)\ \partial^2 T_z = -\sin z + \frac{1}{3^2}\cdot\sin 3z - \frac{1}{5^2}\cdot\sin 5z + \frac{1}{7^2}\cdot\sin 7z - \cdots$$

---

ter. — Der Verfasser legt weniger Werth auf die Resultate, als auf die ganz elementaren Mittel, welche er zu deren Erzielung angewandt hat. Früher hatten Euler und Lagrange gelehrt, daß die Reihe R für alle Werthe von z, also unter allen Umständen $= (2\cos z)^n$, und $S = 0$ sey; Resultate, die, wenn nicht n eine ganze Zahl ist, dem Obigen zu Folge, nur dann wahr sind, wenn z zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegt. Beide große Analysten haben versäumt, die Mehrdeutigkeit der Potenzen zu beachten und gehörig in Rechnung zu bringen. Die mehrdeutigen Ausdrücke entstehen aber allemal da, wo verschiedene Zustände in einer und derselben Rechnungsform ausgedrückt sich finden. Sucht man also mit der nöthigen Aufmerksamkeit die zusammengehörigen Werthe heraus, so wird man eine Menge von anscheinenden Sonderbarkeiten (Paradoxien) des Kalkuls entweder nicht vorfinden, oder doch sogleich auf den ersten Wegen erklärt haben.

Ehe man aber Reihen summirt, die nicht mehr allgemein sind, muß man sich vorher immer erst überzeugen, ob oder wenn die Reihen convergent sind. Man vergleiche besonders die oben erwähnten „Aufsätze aus dem Gebiete der höhern Mathematik", wo die wichtigsten praktischen Lehren für die Behandlung unendlicher Reihen zusammengestellt sind und durch Beispiele erläutert sich finden.

3) $\partial^3 T_z = -\cos z + \frac{1}{3}\cdot\cos 3z - \frac{1}{5}\cdot\cos 5z + \frac{1}{7}\cdot\cos 7z - \cdots$

Die für $-\partial^3 T_z$ erhaltene Reihe läßt sich nun nach §. 139.) summiren, sobald man §. 138. N. 8.) zu Hülfe nimmt.

Man findet nämlich sogleich allgemein

4) $v\cdot\cos z - \frac{1}{3}v^3\cdot\cos 3z + \frac{1}{5}v^5\cdot\cos 5z - \cdots$

$$= \tfrac{1}{2}\frac{1}{tg}\left(\frac{2v}{1-v^2}\cdot\cos z\right),$$

also für $v = 1$, weil $\frac{1}{tg}\frac{1}{0} = (b + \frac{1}{2})\pi$ ist,

5) $\cos z - \frac{1}{3}\cos 3z + \frac{1}{5}\cos 5z - \cdots = \frac{1}{2}b\pi + \frac{1}{4}\pi,$

wo b eine noch näher zu ermittelnde ganze Zahl oder Null vorstellt. Diese Gleichung gilt aber nur, so lange nicht $\cos z = 0$ (weil dann der Ausdruck zur Rechten in 4., für $v = 1$, $= \frac{1}{tg}\frac{0}{0}$ wird), d. h. so lange nicht $z = (\mu + \frac{1}{2})\pi$ ist, wo μ Null oder jede ganze Zahl vorstellt. Aber eben weil für $z = \frac{1}{2}\pi$, $\frac{3}{2}\pi$, $\frac{5}{2}\pi$, $\cdots$, $-\frac{1}{2}\pi$, $-\frac{3}{2}\pi$, etc. das Gesetz der Stetigkeit unterbrochen wird, in so fern für diese Einzel-Werthe von z die Gleichung 5.) nicht mehr gilt, so wird b zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ seinen Werth nicht ändern, wohl aber vielleicht für andere Grenzen von z anders werden. Weil aber für $z = 0$ die Reihe 5.) zur Linken in

$$1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \cdots$$

übergeht, von der wir wissen, daß sie den Werth $\frac{1}{4}\pi$ hat, so folgt, daß $b = 0$ genommen werden muß, für alle Werthe von z, welche zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegen.

Man findet also jetzt aus 5.)

6) $\cos z - \frac{1}{3}\cdot\cos 3z + \frac{1}{5}\cdot\cos 5z - \frac{1}{7}\cdot\cos 7z + \cdots = +\frac{1}{4}\pi,$

für alle Werthe von z, welche zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegen.

Für $z = \pi$, ist $\cos z = \cos 3z = \cos 5z = \text{etc.} = -1$; daher ist die Summe der Reihe 5.), wenn sie direckt gefunden wird, $= -\frac{1}{4}\pi$; also muß man jetzt $b = -1$ nehmen; folg-

lich muß auch für alle Werthe von z, welche zwischen $\frac{1}{2}\pi$ und $\frac{3}{2}\pi$ liegen, $b = -1$ genommen werden. Man hat daher aus 5.)

7) $\cos z - \frac{1}{3}\cdot\cos 3z + \frac{1}{5}\cdot\cos 5z - \frac{1}{7}\cdot\cos 7z + \cdots = -\frac{1}{4}\pi$,

für alle Werthe von z, welche zwischen $\frac{1}{2}\pi$ und $\frac{3}{2}\pi$ liegen.

Verfolgt man diese Untersuchung nur noch einen Schritt weiter, so findet man allgemein

8) $\cos z - \frac{1}{3}\cdot\cos 3z + \frac{1}{5}\cdot\cos 5z - \frac{1}{7}\cdot\cos 7z + \cdots = \pm\frac{1}{4}\pi$,

wo zur Rechten das + Zeichen gilt, so oft $\cos z$ positiv ist, wo dagegen das — Zeichen genommen werden muß, so oft $\cos z$ negativ ist. — Für alle Werthe von z endlich, für welche $\cos z = 0$ wird, gilt die Formel 8.) gar nicht.

Man hat also gefunden

$$-\vartheta^3 T_z = \pm\tfrac{1}{4}\pi.$$

Integrirt man diese Gleichung nun nach z, so findet man

$$-\vartheta^2 T_z = \pm\tfrac{1}{4}\pi z + const.$$

d. h.

9) $\sin z - \frac{1}{3^2}\cdot\sin 3z + \frac{1}{5^2}\cdot\sin 5z - \cdots = \pm\frac{1}{4}\pi z + C$,

wo C die noch zu bestimmende Constante vorstellt, während zur Rechten das + Zeichen gilt, wenn $\cos z$ positiv, das — Zeichen dagegen, so oft $\cos z$ negativ ist.

Setzt man nun $z = 2\mu\pi$, welches in der Mitte zwischen den Grenz-Werthen $(2\mu - \frac{1}{2})\pi$ und $(2\mu + \frac{1}{2})\pi$ liegt, innerhalb welcher $\cos z$ positiv ist, so wird die Reihe in 9.) zur Linken $= 0$, während man rechts $+\frac{1}{4}\pi(2\mu\pi) + C$ erhält. Dies giebt $C = -\frac{1}{2}\mu\pi^2$.

Setzt man aber $z = (2\mu + 1)\pi$, welches in der Mitte liegt zwischen den Grenz-Werthen $(2\mu + \frac{1}{2})\pi$ und $(2\mu + \frac{3}{2})\pi$, innerhalb welcher $\cos z$ negativ ist, so erhält man in 9.) zur Linken ebenfalls Null, während der Ausdruck zur Rechten

$$-\tfrac{1}{4}(2\mu+1)\pi^2+C$$

liefert. Dies giebt $C = +\frac{1}{4}(2\mu+1)\pi^2$ *).

Man hat daher

10) $$\sin z - \frac{1}{3^2}\cdot\sin 3z + \frac{1}{5^2}\cdot\sin 5z - \cdots = \tfrac{1}{4}\pi z - \tfrac{1}{2}\mu\pi^2.$$

so oft z zwischen $(2\mu-\frac{1}{2})\pi$ und $(2\mu+\frac{1}{2})\pi$ liegt.

Man hat aber

11) $$\sin z - \frac{1}{3^2}\cdot\sin 3z + \frac{1}{5^2}\cdot\sin 5z - \cdots$$
$$= -\tfrac{1}{4}\pi z + \tfrac{1}{4}(2\mu+1)\pi^2,$$

so oft z zwischen $(2\mu+\frac{1}{2})\pi$ und $(2\mu+\frac{3}{2})\pi$ genommen wird. — An den Grenzen $z = (2\mu-\frac{1}{2})\pi$ oder $z = (2\mu+\frac{3}{2})\pi$ und $z = (2\mu+\frac{1}{2})\pi$ selbst, gelten beide Resultate nicht mehr.

Nachdem wir jedoch in diesem letztern Falle die Art und Weise, wie nach dem Integriren die Constante bestimmt wird, gehörig auseinander gesetzt haben, auch daß diese Constante immer einen andern Werth annimmt, so oft die Reihe das Gesetz der Stetigkeit unterbricht; — so wollen wir von nun an, bei der Fortsetzung unserer gegenwärtigen Untersuchung nur den Fall betrachten, wo z zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegt.

Man hat aber aus 10.), indem man $\mu = 0$ setzt,

12) $$-\partial^2\Gamma_z = \sin z - \frac{1}{3^2}\cdot\sin 3z + \frac{1}{5^2}\cdot\sin 5z - \cdots = \tfrac{1}{4}\pi z$$

---

*) Die Constante C eines Integrals, welches jedesmal die Summe einer und derselben unendlichen Reihe ausdrückt, erhält also nach und nach, je nachdem μ positiv oder negativ genommen wird, die verschiedenen Werthe

$0, -\frac{1}{2}\pi^2, +\frac{1}{2}\pi^2, -\pi^2, +\pi^2, -\frac{3}{2}\pi^2, +\frac{3}{2}\pi^2, -2\pi^2$, etc. etc.

und dann noch die verschiedenen Werthe

$+\frac{1}{4}\pi^2, +\frac{3}{4}\pi^2, -\frac{1}{4}\pi^2, +\frac{5}{4}\pi^2, -\frac{3}{4}\pi^2, +\frac{7}{4}\pi^2, -\frac{5}{4}\pi^2, +\frac{9}{4}\pi^2,$

etc. etc

nach den verschiedenen Räumen, in denen sich der Veränderliche z befindet, und welche durch natürliche Grenzen von einander getrennt sind. Dies ist daher ein schlagendes Beispiel zu der Behauptung, welche wir im §. 19.) machen mußten.

für alle Werthe von z, welche zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegen.

Integrirt man nun diese Gleichung noch einmal, so erhält man

13) $\partial T_z = \cos z - \frac{1}{3^3}\cdot\cos 3z + \frac{1}{5^3}\cdot\cos 5z - \cdots = -\frac{1}{8}\pi z^2 + C,$

wo die Constante C (für z zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$) noch näher bestimmt werden muß. Setzt man zu dem Ende $z = 0$, so geht die Reihe links in

$$1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \cdots$$

über, deren Summe zwar $= \frac{1}{32}\pi^3$ ist, aber nicht so augenblicklich gefunden werden kann. Wollte man deshalb in der Gleichung 13.) lieber $z = \frac{1}{2}\pi$ setzen, so würden alle Glieder zur Linken $= 0$ werden und man würde

$$0 = -\frac{1}{32}\pi^3 + C, \quad \text{d. h.} \quad C = \frac{1}{32}\pi^3$$

erhalten. Allein da man nicht weiß, ob überhaupt die Form 13.) der Summe, noch an der Grenze von z, d. h. für $z = -\frac{1}{2}\pi$ oder für $z = +\frac{1}{2}\pi$ gilt, so bleibt dieses letztere Verfahren, zur Bestimmung der Constante, immer gewagt, und wäre hier höchstens nur dadurch zu rechtfertigen, daß die Formeln 10.) und 11.) für $z = \frac{1}{2}\pi$, also für $\mu = 0$, alle beide in einander übergehen. Man braucht jedoch nicht gerade $z = \frac{1}{2}\pi$ zu nehmen, sondern kann $z = \frac{1}{2}\pi - \varkappa$ setzen, dagegen $\varkappa$ unendlich-klein sich denken. Man hat dann

$\cos z = \sin \varkappa$, $\cos 3z = -\sin 3\varkappa$, $\cos 5z = \sin 5\varkappa$, etc.

und die Gleichung 13.) wird nun

$$\sin \varkappa + \frac{1}{3^3}\cdot\sin 3\varkappa + \frac{1}{5^3}\cdot\sin 5\varkappa + \cdots = -\frac{1}{8}\pi(\tfrac{1}{2}\pi - \varkappa)^2 + C.$$

Da sich nun die Reihe links immer mehr der Null nähert, je kleiner $\varkappa$ gedacht ist, und für $\varkappa$ unendlich klein (wegen der unendlich großen Nenner im Unendlichen) selber unendlich klein wird, so hat man für $\varkappa$ unendlich-klein

$$0 = -\frac{1}{32}\pi^3 + C, \quad \text{also} \quad C = +\frac{1}{32}\pi^3.$$

Es ist daher ∂T_z oder

14) $$\cos z - \frac{1}{3^3}\cdot\cos 3z + \frac{1}{5^3}\cdot\cos 5z - \cdots = \frac{1}{32}\pi^3 - \tfrac{1}{8}\pi z^2$$

für alle Werthe von z, welche zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegen.

Wird nun zuletzt diese Gleichung 14.) noch einmal integrirt, so erhält man, weil das Resultat für $z = 0$, links $= 0$ wird, folglich auch rechts $= 0$ werden muß, T oder

15) $$\sin z - \frac{1}{3^4}\cdot\sin 3z + \frac{1}{5^4}\cdot\sin 5z - \cdots = \tfrac{1}{3}\tfrac{1}{2}\pi^3 z - \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{4}\pi z^3,$$

so oft z zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ liegt.

Will man jedoch untersuchen, welche Summe dieselbe Reihe T.), d. h. die Reihe in 15.) zur Linken hat, wenn $z > \frac{1}{2}\pi$ wird, — so setze man $z = \pi - u$, während man sich u zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ denkt, so daß z selbst eben deshalb zwischen $\frac{1}{2}\pi$ und $\frac{3}{2}\pi$ liegt. Weil dann

$$\sin(2a+1)z = \sin[(2a+1)\pi - (2a+1)u] = \sin(2a+1)u$$

wird, so wird jetzt die Summe der gedachten Reihe

$$= \tfrac{1}{3}\tfrac{1}{2}\pi^3 u - \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{4}\pi u^3;$$ also daß man hat

16) $$\sin z - \frac{1}{3^4}\cdot\sin 3z + \frac{1}{5^4}\cdot\sin 5z - \cdots$$

$$= \tfrac{1}{3}\tfrac{1}{2}\pi^3(\pi - z) - \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{4}\pi(\pi - z)^3;$$

und diese Gleichung gilt für alle Werthe von z, welche zwischen $\frac{1}{2}\pi$ und $\frac{3}{2}\pi$ liegen.

Es ist aber leicht auf diesem letztern Wege weiter zu gehen und die Summe derselben Reihe T zu finden, wenn z zwischen $\frac{3}{2}\pi$ und $\frac{5}{2}\pi$, dann zwischen $\frac{5}{2}\pi$ und $\frac{7}{2}\pi$ liegt, u. s. w. f. Setzt man aber allgemeiner $z = (2\mu+1)\pi - u$ und denkt man sich u zwischen $+\frac{1}{2}\pi$ und $-\frac{1}{2}\pi$, so liegt z zwischen $(2\mu+\frac{1}{2})\pi$ und $(2\mu+\frac{3}{2})\pi$. Für diesen Werth von z geht aber die Reihe T wiederum in

$$sin\,u - \frac{1}{3^4}\cdot sin\,3u + \frac{1}{5^4}\,sin\,5u - \cdots$$

über, deren Summe (nach 15.) $= \frac{1}{3\cdot 2}\pi^3 u - \frac{1}{2\cdot 4}\pi u^3$ ist. Folglich erhält man

17) $$sin\,z - \frac{1}{3^4}\cdot sin\,3z + \frac{1}{5^4}\cdot sin\,5z - \cdots$$
$$= \frac{1}{3\cdot 2}\pi^3[(2\mu+1)\pi - z] - \frac{1}{2\cdot 4}\pi[(2\mu+1)\pi - z]^3,$$

so oft z zwischen $(2\mu+\frac{1}{2})\pi$ und $(2\mu+\frac{3}{2})\pi$ liegt.

Setzt man aber $z = 2\mu\pi - u$, und denkt man sich u zwischen $+\frac{1}{2}\pi$ und $-\frac{1}{2}\pi$, so liegt z zwischen $(2\mu-\frac{1}{2})\pi$ und $(2\mu+\frac{1}{2})\pi$. Weil aber nun $sin\,(2a+1)z = -sin\,(2a+1)$ wird, so geht die Reihe T.) jetzt in eine andere über, deren Summe $= -\frac{1}{3\cdot 2}\pi^3 u + \frac{1}{2\cdot 4}\pi u^3$ ist. Daher findet sich nun

18) $$sin\,z - \frac{1}{3^4}\cdot sin\,3z + \frac{1}{5^4}\cdot sin\,5z - \cdots$$
$$= -\frac{1}{3\cdot 2}\pi^3(2\mu\pi - z) + \frac{1}{2\cdot 4}\pi(2\mu\pi - z)^3.$$

so oft z zwischen $(2\mu-\frac{1}{2})\pi$ und $(2\mu+\frac{1}{2})\pi$ liegt, wo μ entweder Null oder jede positive oder negative ganze Zahl vorstellt.

Durch die Gleichungen 17.) und 18.) sieht sich aber nun die zu Eingange des Paragraphen gegebene Aufgabe auf das vollständigste gelöst, nämlich für alle reellen Werthe von z.

§. 142.

Wir wollen uns noch mit der Summation der Reihe U.) des §. 141.), nämlich der Reihe

(U)··· $$x - \frac{1}{3^4}\cdot x^3 + \frac{1}{5^4}\cdot x^5 - \frac{1}{7^4}\cdot x^7 + \cdots$$

etwas beschäftigen, um neue Modifikationen des Summations-Verfahrens daran sichtbar machen zu können.

Differenziirt man nämlich die Gleichung

1) $$U = x - \frac{1}{3^4}x^3 + \frac{1}{5^4}x^5 - \frac{1}{7^4}x^7 + \cdots,$$

so erhält man

$$2)\quad \partial U_x = 1 - \frac{1}{3^3}\cdot x^2 + \frac{1}{5^3}\cdot x^4 - \frac{1}{7^3}\cdot x^6 + \ldots.$$

Wollte man nun diese Gleichung noch einmal differenziiren, so würde sich der Exponent in den Nennern nicht vermindern und man würde seinen Zweck verfehlen. Multiplicirt man aber die Gleichung 2.) vorher mit x und differenziirt man dann die hervorgehende Gleichung, so erhält man

$$3)\quad \partial(x\cdot\partial U_x)_x = 1 - \frac{1}{3^2}\cdot x^2 + \frac{1}{5^2}\cdot x^4 - \frac{1}{7^2}\cdot x^6 + \ldots.$$

Auf demselben Wege findet sich aber weiter

$$4)\quad \partial(x\cdot\partial(x\cdot\partial U_x)_x)_x = 1 - \tfrac{1}{3}x^2 + \tfrac{1}{5}x^4 - \tfrac{1}{7}x^6 + \ldots.$$

Multiplicirt man diese Gleichung noch einmal mit x, so ist die Reihe zur Rechten (nach §. 138. N. 8.) summirbar und $= \frac{1}{tg}x$. Also hat man

$$5)\quad \partial(x\cdot\partial(x\cdot\partial U_x)_x)_x = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{tg}x.$$

Integrirt man nun und bestimmt man die Constante so, daß das Integral mit $x = 0$ anfängt, so erhält man

$$6)\quad x\cdot\partial(x\cdot\partial U_x)_x = x - \frac{1}{3^2}\cdot x^3 + \frac{1}{5^2}\cdot x^5 - \frac{1}{7^2}\cdot x^7 + \ldots$$

$$= \int_{x\div 0} \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{tg}x\cdot dx.$$

Dividirt man diese Gleichung durch x, und integrirt man noch einmal, so daß das Integral mit $x = 0$ anfängt, so ergiebt sich

$$7)\quad x\cdot\partial U_x = x - \frac{1}{3^3}\cdot x^3 + \frac{1}{5^3}\cdot x^5 - \frac{1}{7^3}\cdot x^7 + \ldots$$

$$= \int_{x\div 0}\left(\frac{1}{x}\int_{x\div 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{tg}x\cdot dx\right)\cdot dx.$$

Dividirt man diese Gleichung noch einmal durch x und integrirt man dann zum dritten Male, so erhält man

$$8)\quad U = x - \frac{1}{3^4}\cdot x^3 + \frac{1}{5^4}\cdot x^5 - \frac{1}{7^4}x^7 + \cdots$$

$$= \int_{x\div 0}\left(\frac{1}{x}\int_{x\div 0}\left(\frac{1}{x}\int_{x\div 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{tg}x\cdot dx\right)\cdot dx\right)\cdot dx.$$

Die Schwierigkeit ist jetzt auf die Aus-Werthung der Integrale zurückgeführt; aber diese letztere ist so groß, daß man sich aller dieser Gleichungen lieber dazu bedienen wird, diese Integrale zur Rechten in die Reihen zur Linken auszuwerthen, als dazu, diese Reihen zu summiren, wenn man nicht eben diese angezeigten Integrationen als endliche Summen-Formen für diese Reihen ansehen will.

Namentlich giebt die Gleichung 7.), wenn man $x = 1$ setzt, und wenn man sich aus §. 141.) noch erinnert, daß

$$1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \cdots = \tfrac{1}{32}\pi^3$$

gefunden wird, den Werth des bestimmten Integrals

$$\int_{1\div 0}\left(\frac{1}{x}\int_{x\div 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{tg}x\cdot dx\right)\cdot dx = \tfrac{1}{32}\pi^3,$$

welche Formel als ein Beitrag zu denen des achten Kapitels anzusehen ist.

Anmerkung. Da wir über Summation der unendlichen Reihen nur Andeutungen geben können, so halten wir das vorstehende für dazu ausreichend, und bemerken nur noch, daß man sich zuweilen eine endliche Reihe als die Differenz zweier summirbaren unendlichen Reihen denken kann, und daß man in diesem Falle die Summe einer endlichen Reihe dadurch findet, daß man unendliche Reihen summirt.

Funfzehntes Kapitel.

Von der Entwickelung beliebig gegebener Funktionen in Reihen, die nach Sinus und Kosinus der vielfachen Bogen fortlaufen.

(Fourier's Reihen.)

§. 143.

In der Abtheilung über Interpoliren und zwar im §. 128.) haben wir bereits die Aufgabe behandelt: eine Funktion von beliebig angenommener Form, aber unbestimmten Koefficienten so vollends zu bestimmen, daß ihre, zu n Werthen x_1, x_2, x_3, ... x_n von x gehörigen n Werthe, mit den n zu denselben Werthen von x gehörigen Werthen u_1, u_2, u_3, ... u_n irgend einer andern bekannten oder unbekannten Funktion u_x, bezüglich zusammenfallen. Die so gefundene Funktion wird im Allgemeinen n Glieder haben müssen, weil sie anfänglich eben so viel unbestimmte Koefficienten haben muß, welche (nach §. 128.) ihre Bestimmung finden.

Ist nun $x_1 = a$ und $x_n = b$, und sind alle übrigen Werthe x_2, x_3, x_4, ... x_{n-1} nach und nach immer größer werdend, und dabei alle größer als a und kleiner als b; und denkt man sich zuletzt die Zahl der Werthe von x zwischen a und b, also die Zahl n, die beliebig groß seyn kann, immer größer, so bekommt man jedesmal eine, aber immer aus mehr Gliedern bestehende Funktion (Reihe), welche mit der andern Funktion u_x immer mehr Werthe gemein hat, während diese gemeinschaftlichen Werthe zu solchen Werthen von x gehören, welche zwischen a

und b liegen. Und denkt man sich endlich n unendlich groß, d. h. denkt man sich zwischen a und b unendlich viele Werthe von x, die alle unendlich wenig von einander verschieden sind, so wird man auf diesem Wege auch eine Funktion von unendlich vielen Gliedern bekommen können, d. h. eine unendliche Reihe, welche mit u_x alle, zu den von a bis b stetig neben einander liegenden Werthen von x gehörigen Werthe von u_x gemein hat, dagegen für alle Werthe von x, die kleiner als a oder größer als b sind, von der Funktion u_x abweichen wird.

Und weil dabei die Form der gesuchten Funktion oder Reihe noch ganz willkührlich ist (nach §. 128.), so wird man auf diesem Wege mehrere verschiedene unendliche Reihen finden können, welche alle die Werthe von u_x liefern, so lange x zwischen a und b sich befindet, welche aber, so oft $x < a$ oder $x > b$ ist, von einander und auch von dem Werthe von u_x verschiedene Werthe liefern werden.

Man darf sich jedoch dabei nicht verhehlen, daß sich der Ausführung dieser Idee Hindernisse in den Weg stellen können. Diese Hindernisse treten aber nicht ein, wenn man die gesuchte Funktion aus einer Reihe von Gliedern bestehen läßt, die nach Sinus oder nach Kosinus vielfacher Bogen fortlaufen, wie dies in den wichtigsten Anwendungen der Mathematik auf Physik wünschenswerth, ja unentbehrlich wird. — Die nächsten Paragraphen werden dies bestätigen.

§. 144.

Es sey u_x eine beliebig gegebene völlig bestimmte Funktion von x. Man sucht nun die Koefficienten $A_1, A_2, A_3, \cdots$ der endlichen Reihe

1) $A_1 \cdot \sin x + A_2 \cdot \sin 2x + A_3 \cdot \sin 3x + \cdots + A_{n-1} \cdot \sin(n-1)x$

so zu bestimmen, daß diese Reihe für $x = \frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \frac{3\pi}{n}, \cdots \frac{(n-1)\pi}{n}$, mit den zugehörigen Werthen von u_x, die wir bezüg-

lich durch $u_1, u_2, u_3, \cdots u_{n-1}$ bezeichnen wollen, einerlei Werth erhalte.

Nach §. 128.) hat man zur Bestimmung dieser n—1 Koefficienten die n—1 Gleichungen

$$A_1 \cdot \sin\frac{\pi}{n} + A_2 \cdot \sin\frac{2\pi}{n} + A_3 \cdot \sin\frac{3\pi}{n} + \cdots + A_{n-1} \cdot \sin\frac{(n-1)\pi}{n} = u_1$$

$$A_1 \cdot \sin\frac{2\pi}{n} + A_2 \cdot \sin\frac{4\pi}{n} + A_3 \cdot \sin\frac{6\pi}{n} + \cdots + A_{n-1} \cdot \sin\frac{2(n-1)\pi}{n} = u_2$$

$$A_1 \cdot \sin\frac{3\pi}{n} + A_2 \cdot \sin\frac{6\pi}{n} + A_3 \cdot \sin\frac{9\pi}{n} + \cdots + A_{n-1} \cdot \sin\frac{3(n-1)\pi}{n} = u_3$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$A_1 \cdot \sin\frac{(n-1)\pi}{n} + A_2 \cdot \sin\frac{2(n-1)\pi}{n} + A_3 \cdot \sin\frac{3(n-1)\pi}{n} + \cdots + A_{n-1} \cdot \sin\frac{(n-1)^2\pi}{n} = u_{n-1}.$$

Diese Gleichungen gehören zu den einfachen algebraischen Gleichungen und müssen nun nach den n—1 Unbekannten A_1, A_2, A_3, $\cdots A_{n-1}$ aufgelöst werden.

Um aber aus diesen Gleichungen einen der unbekannten Koefficienten z. B. A_m zu finden, muß man die n—2 übrigen eliminiren; und dazu kann man sich der Methode der Multiplikatoren (der französischen oder Bezout'schen Eliminations-Methode) bedienen. Im gegenwärtigen Falle erreicht man seinen Zweck sogleich, wenn man diese n—1 Gleichungen nach der Reihe mit

$$2\sin\frac{m\pi}{n},\quad 2\sin\frac{2m\pi}{n},\quad 2\sin\frac{3m\pi}{n},\quad \cdots\ 2\sin\frac{(n-1)m\pi}{n}$$

multiplicirt und zuletzt alle addirt. Betrachtet man nämlich

dann in der neuen Gleichung das mit A_ν afficirte Glied, so hat solches den Koefficienten,

$$2\sin\frac{m\pi}{n}\cdot\sin\frac{\nu\pi}{n}+2\sin\frac{2m\pi}{n}\cdot\sin\frac{2\nu\pi}{n}+2\sin\frac{3m\pi}{n}\cdot\sin\frac{3\nu\pi}{n}+\cdots$$
$$+2\sin\frac{(n-1)m\pi}{n}\cdot\sin\frac{(n-1)\nu\pi}{n},$$

oder, wenn man die Produkte der Sinus in Differenzen von Kosinus verwandelt, den Koefficienten

$$\cos\frac{(m-\nu)\pi}{n}+\cos\frac{2(m-\nu)\pi}{n}+\cos\frac{3(m-\nu)\pi}{n}+\cdots$$
$$+\cos\frac{(n-1)(m-\nu)\pi}{n}$$
$$-\cos\frac{(m+\nu)\pi}{n}-\cos\frac{2(m+\nu)\pi}{n}-\cos\frac{3(m+\nu)\pi}{n}-\cdots$$
$$-\cos\frac{(n-1)(m+\nu)\pi}{n},$$

oder, wenn man jede dieser Kosinus-Reihen (nach §. 135. N. 5.) summirt, den Koefficienten

$$\frac{\sin(n-\frac{1}{2})\frac{(m-\nu)\pi}{n}}{2\sin\frac{(m-\nu)\pi}{2n}}-\frac{\sin(n-\frac{1}{2})\frac{(m+\nu)\pi}{n}}{2\sin\frac{(m+\nu)\pi}{2n}}.$$

Weil aber, so oft θ Null oder irgend eine ganze Zahl ist, allemal $\sin\theta\pi=0$ und $\cos\theta\pi=(-1)^\theta$, also auch

$$\sin(n-\tfrac{1}{2})\frac{\theta\pi}{n}=\sin\left(\theta\pi-\frac{\theta\pi}{2n}\right)=-(-1)^\theta\cdot\sin\frac{\theta\pi}{2n}$$

ist, so verwandelt sich, so lange m von ν verschieden, also $m-\nu$ nicht Null ist, dieser Koefficient von A_ν in

$-\frac{1}{2}(-1)^{\mu-\nu}+\frac{1}{2}(-1)^{\mu-\nu}$ d. h. in $\frac{1}{2}(-1)^{\mu-\nu}\cdot((-1)^{2\nu}-1)$
d. h. in 0 (Null),

so daß alle Glieder aus der neuen Gleichung herausfallen, bis auf das einzige mit A_m afficirte Glied. Der Koefficient von A_m dagegen wird

$$2\left(sin\frac{m\pi}{n}\right)^2+2\left(sin\frac{2m\pi}{n}\right)^2+2\left(sin\frac{3m\pi}{n}\right)^2+\cdots$$
$$+2\left(sin\frac{(n-1)m\pi}{n}\right)^2$$

und verwandelt sich, nach der Formel $2sin\,\beta^2=1-cos\,2\beta$, in

$$(n-1)-\left[cos\frac{2m\pi}{n}+cos\frac{4m\pi}{n}+cos\frac{6m\pi}{n}+\cdots\right.$$
$$\left.+cos\frac{2(n-1)m\pi}{n}\right].$$

Nun ist aber diese Summe der Kosinus (nach §. 135. Nr. 5.)

$$=\frac{cos\,m\pi\cdot sin\frac{(n-1)m\pi}{n}}{sin\frac{m\pi}{n}}=-1\,^*);$$

also ist der Koefficient von A_m allemal $=n$.

Die entstandene Gleichung reducirt sich daher auf

$$2)\quad A_m=\frac{2}{n}\cdot\left(u_1\cdot sin\frac{m\pi}{n}+u_2\cdot sin\frac{2m\pi}{n}+u_3\cdot sin\frac{3m\pi}{n}+\cdots\right.$$
$$\left.+u_{n-1}\cdot sin\frac{(n-1)m\pi}{n}\right)$$

oder

$$3)\quad A_m=\frac{2}{n}\,S\left[u_b\cdot sin\frac{bm\pi}{n}\right]^{**}),$$

---

*) Es ist nämlich

$$\frac{(n-1)m\pi}{n}=m\pi-\frac{m\pi}{n},$$

also

$$sin\frac{(n-1)m\pi}{n}=-(-1)^m\cdot sin\frac{m\pi}{n},$$

weil $cos\,m\pi=(-1)^m$ ist, so lange nur m Null oder eine positive ganze Zahl ist.

) Es ist sehr interessant, die Kunstgriffe wahrzunehmen, durch welche Lagrange die Faktoren **gefunden hat, womit wir hier jede der aufzulösenden Gleichungen multiplicirt haben, damit, wenn nachher alle Gleichungen addirt werden, alle Glieder zur Linken herausfallen, bis auf das einzige Glied, welches A_m enthält, so daß nun A_m gefunden wird. — Man

wenn man statt b alle positiven ganzen Zahlen setzt, die nicht $>n-1$ sind.

Setzt man aber hier herein statt m nach und nach 1, 2, 3, 4, 5, ··· n—1, so hat man alle die einzelnen Koefficienten $A_1, A_2, A_3, A_4, \cdots A_{n-1}$ gefunden. — Die gesuchte endliche Reihe 1.) geht aber dadurch über in

$$4) \qquad \frac{2}{n} \cdot S\left[\sin ax \cdot S\left[u_b \cdot \sin \frac{ba\pi}{n}\right]\right],$$

wo man dem **a** alle Werthe 1, 2, 3, ··· n—1 giebt, und für jeden bestimmten Werth von **a**, wiederum dem **b** alle Werthe 1, 2, 3, ··· n—1 geben muß, um den Koefficienten von *sin* ax zu bekommen. Diese endliche, aus n—1 Gliedern bestehende Reihe 4.) hat nun die Eigenschaft, daß sie für $x = \frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \frac{3\pi}{n}, \cdots \frac{(n-1)\pi}{n}$, mit den Werthen $u_1, u_2, u_3, \cdots u_{n-1}$ von u_x (für dieselben Werthe von x) bezüglich zusammenfällt; für jeden andern Werth von x aber im Allgemeinen einen andern Werth annehmen wird, als den, den die gegebene Funktion u_x annimmt.

§. 145.

Nimmt man nun hier n unendlich groß, so daß der Unterschied $\frac{\pi}{n}$ der Werthe von x unendlich-klein wird und durch dx bezeichnet werden kann, während $\frac{b\pi}{n}$ die verschiedenen Werthe von x vorstellt, von $x = 0$ an bis zu $x = \pi$ hin, so verwandelt sich jetzt, weil $\frac{2}{n} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{n} = \frac{2}{\pi} \cdot dx$ wird, der Koefficient A_m (in 3.) in

---

vergleiche deshalb noch des Verfassers „Lehrbuch der Mechanik" 3. Theil (Berlin bei Enslin 1838.) Kap. XV. pag. 513 seqq. und die Miscellanea Taurin. T. I. — T. III. (1759. — 1766.)

$$A_m = \frac{2}{\pi} \cdot S(u_x \cdot \sin mx \cdot dx),$$

wo S die Summe aller unendlich vielen Glieder bedeutet, welche aus $u_x \cdot \sin mx \cdot dx$ dadurch hervorgehen, daß man statt x alle Werthe setzt, welche um dx von einander verschieden sind, d. h. welche stetig neben einander und zwischen 0 und π liegen. Diese Summe wird aber (nach §. 20.) durch das bestimmte Integral

$$\frac{2}{\pi} \cdot \int_{\pi \div 0} u_x \cdot \sin mx \cdot dx$$

ausgedrückt; daher hat man jetzt

$$5) \qquad A_m = \frac{2}{\pi} \cdot \int_{\pi \div 0} u_x \cdot \sin mx \cdot dx,$$

so daß

$$6) \qquad \frac{2}{\pi} \cdot S[\sin ax \cdot \int_{\pi \div 0} u_x \cdot \sin ax \cdot dx]$$

eine unendliche Reihe vorstellt, welche nach Sinus der vielfachen Bogen ax (d. h. x, 2x, 3x, 4x, etc. etc.) fortgeht, und welche die Eigenschaft hat, daß ihre Werthe (wenn sie nur deren wirklich hat, d. h. wenn sie convergent ist) mit den Werthen von u_x zusammenfallen, so oft x zwischen 0 und π liegt; während für alle übrigen Werthe von x, die Werthe der Reihe 6.) von den Werthen von u_x im Allgemeinen verschieden seyn werden, und namentlich schon für $x = 0$ und für $x = \pi$ verschieden seyn können.

Schreibt man daher

I. $$\begin{cases} u_x = A_1 \cdot \sin x + A_2 \cdot \sin 2x + A_3 \cdot \sin 3x + A_4 \cdot \sin 4x \\ \qquad\qquad + \text{in inf.}, \end{cases}$$

und nimmt man dabei $A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots$ aus der Gleichung

$$A_m = \frac{2}{\pi} \cdot \int_{\pi \div 0} u_x \cdot \sin mx \cdot dx,$$

so gilt diese Gleichung einmal nur, wenn diese unendliche Reihe convergent ist, und dann nur für alle Werthe von x, welche zwischen 0 und π liegen; und sie wird im Allgemeinen schon

nicht mehr wahr seyn, wenn $x = 0$ oder $x = \pi$ selbst gesetzt wird, noch weniger aber, wenn man $x < 0$ oder $x > \pi$ nehmen wollte.

§. 146.

Setzt man in I.) $2 \sin x \cdot u_x$ statt u_x, und zerlegt man in A_m das Produkt $2 \sin mx \cdot \sin x$ in die Differenz $\cos(m-1)x - \cos(m+1)x$, und dadurch A_m selber in die Differenz

$$B_{m-1} - B_{m+1},$$

indem man

$$B_m = \frac{2}{\pi} \int_{\pi \div 0} u_x \cdot \cos mx \cdot dx$$

nimmt, — substituirt man statt A_1, A_2, A_3, A_4, etc. etc. ihre Werthe $B_0 - B_2$, $B_1 - B_3$, $B_2 - B_4$, $B_3 - B_5$, etc. etc., ordnet man das Ganze nach B_0, B_1, B_2, B_3, etc. etc. und dividirt man zuletzt durch $2 \sin x$ wieder weg, so erhält man

$$\text{II.} \begin{cases} u_x = \frac{1}{2} B_0 + B_1 \cdot \cos x + B_2 \cdot \cos 2x + B_3 \cdot \cos 3x + \cdots, \\ \text{wenn genommen wird, für } m = 0, 1, 2, 3, 4, \cdots, \\ B_m = \frac{2}{\pi} \cdot \int_{\pi \div 0} u_x \cdot \cos mx \cdot dx. \end{cases}$$

Diese Gleichung gilt natürlich auch nur dann, wenn die I.) gilt, und wenn diese Reihe in II.) zur Rechten ebenfalls convergent ist.

Anmerkung. Das Verfahren des Eliminirens, welches wir im §. 143.) angewandt haben, zeigt uns übrigens ein Mittel, beide unendliche Reihen I.) und II.) direkt zu finden, ohne zuvor eine endliche Reihe von n Gliedern finden zu müssen, um von ihr aus zu dem Falle überzugehen, in welchem n unendlich groß ist. Stellen wir uns nämlich direkt folgende Aufgaben:

I. Man soll eine beliebig gegebene Funktion u_x in eine nach dem Sinus vielfacher Bogen fortlaufende Reihe entwickeln.

Auflösung. Man wende die Methode der unbestimmten Koefficienten an, setze daher zuerst

$$u_x = A_1 \cdot \sin x + A_2 \cdot \sin 2x + A_3 \cdot \sin 3x + \ldots,$$

und suche nun die unbestimmten Koefficienten, dieser Gleichung gemäß zu bestimmen.

Denkt man aber daran, daß wenn **a** und **b** zwei beliebige ganze Zahlen vorstellen, dann allemal

$$\int_{\pi \div 0} \sin ax \cdot \sin bx \cdot dx = 0 \quad \text{ist, so oft} \quad a \gtrless b,$$

dagegen

$$\int_{\pi \div 0} \sin ax \cdot \sin bx \cdot dx = \tfrac{1}{2}\pi \quad \text{ist, wenn} \quad a = b\ ^*),$$

so wird man die angenommene Gleichung nach und nach mit $\sin x$, $\sin 2x$, $\sin 3x$, $\sin 4x$, $\sin 5x$, etc. etc. multipliciren, jede dieser neuen Gleichungen aber links und rechts nach x zwischen den Grenzen 0 und π integriren; und man erhält

$$\int_{\pi \div 0} u_x \cdot \sin x \cdot dx = \tfrac{1}{2}\pi \cdot A_1;$$
$$\int_{\pi \div 0} u_x \cdot \sin 2x \cdot dx = \tfrac{1}{2}\pi \cdot A_2;$$
$$\int_{\pi \div 0} u_x \cdot \sin 3x \cdot dx = \tfrac{1}{2}\pi \cdot A_3; \quad \text{u. s. w. f.,}$$

so daß hieraus die unbestimmten Koefficienten A_1, A_2, A_3, etc. etc. gefunden werden, in bestimmte Integrale ausgedrückt. Man erhält zuletzt

$$1) \qquad u_x = \frac{2}{\pi} \cdot S\left[\sin ax \cdot \int_{\pi \div 0} u_x \cdot \sin ax \cdot dx\right],$$

wenn statt **a** nach und nach Null und alle ganzen Zahlen gesetzt werden, und wenn S bedeutet, daß die Summe aller unendlich vielen Glieder, die auf diese Weise aus dem, in den ecki-

---

*) Es ist nämlich

$$\sin ax \cdot \sin bx = \tfrac{1}{2}\cos(a-b)x - \tfrac{1}{2}\cos(a+b)x$$

und für $a = b$

$$\sin ax \cdot \sin ax = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos 2ax;$$

also

$$1') \quad \int \sin ax \cdot \sin bx \cdot dx = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)}$$

aber

$$2') \quad \int \sin ax \cdot \sin ax \cdot dx = \tfrac{1}{2}x - \frac{1}{4a} \cdot \sin 2ax.$$

gen Klammern befindlichen allgemeinen Gliede hervorgehen, genommen werden soll.

II. Soll u_x in eine Reihe verwandelt werden, welche nach Kosinus der vielfachen Bogen fortläuft, so setze man

$$u_x = B_0 + B_1 \cdot \cos x + B_2 \cdot \cos 2x + B_3 \cdot \cos 3x + \cdots,$$

multiplicire diese Gleichung mit $\cos 0$, $\cos x$, $\cos 2x$, $\cos 3x$, $\cos 4x$, etc. etc., nehme links und rechts die Integrale zwischen den Grenzen 0 und π, und man erhält

$$\int_{\pi\div 0} u_x \cdot dx = B_0 \cdot \pi, \qquad \text{also} \qquad B_0 = \frac{1}{\pi} \int_{\pi\div 0} u_x \cdot dx$$

außerdem aber noch, wenn a jede beliebige positive ganze Zahl vorstellt,

$$B_a = \frac{2}{\pi} \int_{\pi\div 0} u_x \cdot \cos ax \cdot dx.$$

Man hat daher zuletzt

$$u_x = \frac{1}{\pi} \int_{\pi\div 0} u_x \cdot dx + \frac{2}{\pi} \cdot S\left[\cos ax \cdot \int_{\pi\div 0} u_x \cdot \cos ax \cdot dx\right],$$

wo jedoch der Werth Null von a ausgeschlossen bleibt; oder auch

$$2) \qquad u_x = \frac{2}{\pi} \cdot S\left[\cos ax \cdot \int_{\pi\div 0} u_x \cdot \cos ax \cdot dx\right],$$

wenn man auch noch $a = 0$, aber von diesem Gliede nur die Hälfte nimmt.

Diese Gleichungen 1.) und 2.) sind genau die Gleichungen I.) des §. 145.) und II.) des §. 146.); nur daß man hier noch nicht weiß, wie weit sie gelten.

Wir haben nämlich jetzt die Methode der unbestimmten Koefficienten angewandt, also **vorausgesetzt**, daß eine solche Reihe, wie wir sie suchen, existirt. Die gefundenen Resultate gelten also **gar nicht**, wenn diese Voraussetzung gar nie statt haben sollte, — oder sie gelten doch nur in dem Umfange, in welchem diese Voraussetzung statt hat, ohne daß das Gesetz der Stetigkeit unterbrochen wird. Die Untersuchung, **ob** überhaupt, oder **in welchem Umfange** die, mittelst der Methode der un-

bestimmten Koefficienten gefundenen Resultate gelten, muß daher der Anwendung der gedachten Methode selbst allemal auf dem Fuße folgen *).

Man müßte daher nun 1) die Convergenz der gefundenen Reihen untersuchen (da solche nicht nach Potenzen von x fortlaufen); — und in allen den Fällen, wo die Convergenz ausgemittelt ist, 2) die Reihen selbst wieder summiren, um zu sehen, ob, oder in welchen Fällen sie die Funktion u_x wieder geben.

§. 147.

Geht man aber von den (§. 145. und §. 146.) gefundenen Gleichungen aus, nämlich von

$$\text{I.} \quad \begin{cases} u_x = A_1 \cdot \sin x + A_2 \cdot \sin 2x + A_3 \cdot \sin 3x + \text{ in inf.}, \\ \text{wo} \qquad A_m = \frac{2}{\pi} \int_{\pi \div 0} u_x \cdot \sin mx \cdot dx, \end{cases}$$

und

$$\text{II.} \quad \begin{cases} u_x = \frac{1}{2} B_0 + B_1 \cdot \cos x + B_2 \cdot \cos 2x + B_3 \cdot \cos 3x + \text{in inf.}, \\ \text{wo} \qquad B_m = \frac{2}{\pi} \int_{\pi \div 0} u_x \cdot \cos mx \cdot dx, \end{cases}$$

so wissen wir bereits aus der dortigen Entwickelung, daß sie nur für alle Werthe von x gelten, welche zwischen 0 und π liegen. Dagegen geht aus der Entwickelung des §. 144.) hervor, daß die Werthe u_1, u_2, u_3, ... u_{n-1} ganz willkührlich und gesetzlos gewählt werden können, daß daher dieselben Formeln I.) und II.) noch gelten, wenn u_x eine Reihe völlig ge-

---

*) Früher glaubte man, daß die Resultate, welche die Methode der unbestimmten Koefficienten liefert, keiner weitern Bestätigung bedürften, indem man wähnte, daß wenn die Annahme der Form nicht gerechtfertigt sey, solches sich während der Rechnung durch Widersprüche sogleich herausstelle. — Wir haben gegen diese gefährliche Ansicht bereits in den „Aufsätzen aus dem Gebiete der höhern Mathematik", Berlin 1823. S. 39. ff. gewarnt, und gezeigt, daß kein Widerspruch während der Entwickelung sich zeigen kann, sobald die angenommene Form der Reihe auch nur in einem einzigen besonderen Falle zulässig seyn sollte.

setzloser Werthe vorstellt, d. h. eine discontinuirliche Funktion von x ist. Man kann aber bald noch bemerken:

1) Die Gleichung I.) gilt auch noch für alle negativen Werthe von x, welche zwischen 0 und $-\pi$ liegen, so oft statt u_x eine solche continuirliche oder discontinuirliche Funktion φ_x gesetzt wird, welche die Eigenschaft hat, daß $\varphi_{-x} = -\varphi_x$ ist.

2) Die Gleichung II.) gilt dagegen auch noch für alle negative Werthe von x, welche zwischen 0 und $-\pi$ liegen, aber wenn statt u_x eine andere Funktion ψ_x gesetzt wird, welche diese andere Eigenschaft hat, daß $\psi_{-x} = \psi_x$ ist.

3) Setzt man daher, während u_x jede beliebige Funktion vorstellt

$$\varphi_x = \tfrac{1}{2}u_x - \tfrac{1}{2}u_{-x} \quad \text{und} \quad \psi_x = \tfrac{1}{2}u_x + \tfrac{1}{2}u_{-x},$$

so ist

$$u_x = \varphi_x + \psi_x,$$

dabei aber φ_x eine solche Funktion, wie sie in 1.) vorausgesetzt worden, während ψ_x eine solche ist, wie wir sie uns in 2.) gedacht haben. Findet man daher aus I.) φ_x, und aus II.) ψ_x, so folgt, weil $\varphi_x + \psi_x = u_x$ ist,

$$\text{III. } u_x = \left\{\begin{array}{l} \tfrac{1}{2}B_0 + B_1 \cdot cos\, x + B_2 \cdot cos\, 2x + B_3 \cdot cos\, 3x + \ldots \\ \quad + A_1 \cdot sin\, x + A_2 \cdot sin\, 2x + A_3 \cdot sin\, 3x + \ldots \end{array}\right\},$$

wenn A_m und B_m aus den Gleichungen

$$B_m = \frac{1}{\pi}\int_{\pi \div 0}(u_x + u_{-x}) \cdot cos\, mx \cdot dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{\pi \div (-\pi)} u_x \cdot cos\, mx \cdot dx \;^*),$$

$$A_m = \frac{1}{\pi}\int_{\pi \div 0}(u_x - u_{-x}) \cdot sin\, mx \cdot dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{\pi \div (-\pi)} u_x \cdot sin\, mx \cdot dx$$

---

*) Zerlegt man das letztere Integral nach §. 24. I.) in zwei Integrale, von denen das eine zwischen π und 0, das andere zwischen 0 und $-\pi$ genommen ist, und führt man in letzterem $z = -x$ (also $x = -z$) ein, so verwandelt sich solches nach §. 22. II.) in $\int_{\pi \div 0} u_{-z} \cdot cos\, mz \cdot dz$ d. h. in

bestimmt werden; und diese Gleichung III.) gilt für jeden Werth von x, welcher zwischen $-\pi$ und $+\pi$ liegt, wenn nur die Reihen selbst convergent sind. Für $x = 0$ kann aber vielleicht die Gleichung III.) nicht gelten, weil die I.) und II.) für $x = 0$ nicht nothwendig wahr bleiben.

4) Weil man aber in jedem bestimmten Integral nach x, statt x und dx bezüglich z und dz setzen kann, und weil dadurch

$$cos\, mx \cdot \int u_x \cdot cos\, mx \cdot dx = \int u_z \cdot cos\, mx \cdot cos\, mz \cdot dz,$$

$$sin\, mx \cdot \int u_x \cdot sin\, mx \cdot dx = \int u_z \cdot sin\, mx \cdot sin\, mz \cdot dz,$$

also, wenn man beide Gleichungen addirt und durch π dividirt,

$$B_m \cdot cos\, mx + A_m \cdot sin\, mx = \frac{1}{\pi} \int_{\pi \div (-\pi)} u_z \cdot cos\, m(z - x) \cdot dz$$

geschrieben werden kann, so geht die III.), wenn man je zwei unter einander stehende Glieder nach der vorstehenden Formel vereinigt, noch über in

$$\text{IV.} \quad u_x = \frac{1}{\pi} \int_{\pi \div (-\pi)} u_z \cdot [\tfrac{1}{2} + cos\,(z - x) + cos\, 2(z - x) + cos\, 3(z - x) + \ldots.] \cdot dz.$$

Umgekehrt: Kann erwiesen werden, daß wenn man von dieser letztern Reihe n erste Glieder nimmt, der Ausdruck zur Rechten der Funktion u_x immer näher kommt, je größer n gedacht wird, und dem u_x unendlich nahe rückt, wenn n unendlich groß wird, so ist nicht bloß erwiesen, daß die Reihen in III.) zur Rechten convergent sind, sondern es ist auch zu gleicher Zeit das ganze Verfahren gerechtfertigt, welches zu diesen Reihen geführt hat. — Dies wollen wir nun nach Dirichlet hier thun *).

§. 148.

A. Wir wollen in III.) zur Rechten die Glieder der Reihen bis zu $B_n \cdot cos\, nx$ und $A_n \cdot cos\, nx$ nehmen, also $2n + 1$

$\int_{\pi \div 0} u_{-x} \cdot cos\, mx \cdot dx$, und es erhellt nun die oben statt gehabte Umformung des Integrals.

Aehnliches für die nächste Zeile im Texte.

*) S. Dove's Repertorium der Physik. I. Bd.

Glieder, und diese summiren. Zu dem Ende muß man von der Reihe in IV.) zur Rechten die Glieder unter dem Integral-Zeichen bis zu dem Gliede $cos\, n(z-x)$ nehmen. Die Summe dieser Kosinusse ist aber (nach §. 135. R. 5.)

$$= \frac{sin\, \frac{1}{2}(2n+1)(z-x)}{2sin\, \frac{1}{2}(z-x)},$$

also ist die Summe der erstern $2n+1$ Glieder in der Reihe III.) zur Rechten ausgedrückt durch

$$(T)\ldots\ \frac{1}{\pi}\int_{\pi\div(-\pi)} u_z \cdot \frac{sin\, \frac{1}{2}(2n+1)(z-x)}{2sin\, \frac{1}{2}(z-x)} \cdot dz.$$

Wir müssen nun zusehen, ob für $n=\infty$ dieser Ausdruck T in u_x übergeht, so lange x zwischen $+\pi$ und $-\pi$ liegt.

B. Wir werden aber zuerst zeigen, daß wenn man das Integral von $\frac{sin\,(2n+1)\beta}{sin\,\beta}\cdot d\beta$, nachdem der Kürze wegen $2n+1=\varkappa$ gesetzt worden ist, nach und nach zwischen den Grenzen 0 und $\frac{\pi}{\varkappa}$, $\frac{\pi}{\varkappa}$ und $\frac{2\pi}{\varkappa}$, $\frac{2\pi}{\varkappa}$ und $\frac{3\pi}{\varkappa}$, ..., $\frac{(\nu-1)\pi}{\varkappa}$ und $\frac{\nu\pi}{\varkappa}$, ..., $\frac{n\pi}{\varkappa}$ und $\frac{\pi}{2}$ nimmt, diese Werthe desselben abwechselnd positiv und negativ sind, und absolut immer kleiner werden, so daß, wenn man die absoluten Werthe dieses Integrals innerhalb der gedachten Grenzen bezüglich durch

$$\varrho_1,\ \varrho_2,\ \varrho_3,\ \ldots\ \varrho_\nu,\ \ldots\ \varrho_{n+1}$$

bezeichnet, diese eine abnehmende Reihe bilden.

Dies zeigt sich so:

Es liegt $\varkappa\beta$ allemal zwischen $(\nu-1)\pi$ und $\nu\pi$, wenn β zwischen $\frac{(\nu-1)\pi}{\varkappa}$ und $\frac{\nu\pi}{\varkappa}$ liegt. Daher ist $sin\, \varkappa\beta$ für alle diese Werthe von β fortwährend positiv, wenn ν ungerade, und fortwährend negativ, wenn ν gerade ist, während $sin\,\beta$ in demselben Zwischenraume immerfort positiv bleibt. Also ist für alle Werthe von β, welche zwischen $\frac{(\nu-1)\pi}{\varkappa}$ und $\frac{\nu\pi}{\varkappa}$ liegen, $\frac{sin\,\varkappa\beta}{sin\,\beta}\cdot d\beta$ fortwährend positiv oder fortwährend negativ, je nachdem ν ungerade oder gerade; also ist auch (nach §. 20.)

$$\int_{\frac{\nu\pi}{\varkappa}\div\frac{(\nu-1)\pi}{\varkappa}} \frac{\sin \varkappa\beta}{\sin\beta}\cdot d\beta$$

positiv, wenn ν ungerade, und negativ, wenn ν gerade, d. h. es ist

$$\varrho_\nu = (-1)^{\nu-1}\int_{\frac{\nu\pi}{\varkappa}\div\frac{(\nu-1)\pi}{\varkappa}} \frac{\sin \varkappa\beta}{\sin\beta}\cdot d\beta.$$

Dieser Werth von ϱ_ν läßt sich auch durch ein Integral ausdrücken, welches zwischen andern Grenzen, nämlich zwischen den von ν unabhängigen Grenzen 0 und $\frac{\pi}{\varkappa}$ genommen ist. Man darf zu dem Ende nur einen neuen Veränderlichen statt β einführen, mittelst der Gleichung

$$\beta = \frac{(\nu-1)\pi}{\varkappa} + \gamma,$$

so erhält man (nach §. 22. Anmerkg.)

$$\varrho_\nu = (-1)^{\nu-1}\int_{\frac{\pi}{\varkappa}\div 0} \frac{\sin[(\nu-1)\pi + \varkappa\gamma]}{\sin\left(\frac{(\nu-1)\pi}{\varkappa}+\gamma\right)}\cdot d\gamma$$

oder, weil $\sin(\nu-1)\pi = 0$, $\cos(\nu-1)\pi = (-1)^{\nu-1}$ und daher $\sin[(\nu-1)\pi + \varkappa\gamma] = (-1)^{\nu-1}\cdot\sin\varkappa\gamma$ ist, und wenn man β statt γ, so wie auch $d\beta$ statt $d\gamma$ schreibt

$$\varrho_\nu = \int_{\frac{\pi}{\varkappa}\div 0} \frac{\sin\varkappa\beta}{\sin\left(\frac{(\nu-1)\pi}{\varkappa}+\beta\right)}\cdot d\beta.$$

In diesem Integrale wird aber der Zähler $\sin\varkappa\beta$, welchen Werth von ν man nimmt, immer nach und nach alle Werthe von $\sin 0$ bis $\sin\pi$ durchlaufen, während die zugehörigen Nenner $\sin\left(\frac{(\nu-1)\pi}{\varkappa}+\beta\right)$ für jeden größern Werth von ν ebenfalls immer bezüglich größer seyn werden, so daß die durch das Integral summirten Differential-Theilchen immer kleiner sind, wenn ν größer gedacht wird. Also wird ϱ_ν desto kleiner werden, je größer ν gedacht wird.

C. Die Summe aller dieser einzelnen Integrale ist (nach §. 24. I.) dem zwischen den Grenzen 0 und $\frac{\pi}{2}$ genommenen Integral von $\frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta}\cdot d\beta$ gleich. Weil aber $\frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta}$ nichts anders ist (nach §. 135. N. 5.) als die Summe

$$1 + 2\cos 2\beta + 2\cos 4\beta + 2\cos 6\beta + \cdots + 2\cos 2n\beta$$

und diese letzteren Glieder, nach β zwischen den Grenzen 0 und

$\frac{1}{2}\pi$ integrirt, alle Null geben, bis auf das erstere, welches $\frac{1}{2}\pi$ giebt, so hat man

$$\int_{\frac{1}{2}\pi \div 0} \frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta} \cdot d\beta = \frac{1}{2}\pi;$$

folglich ist

1) $\varrho_1 - \varrho_2 + \varrho_3 - \varrho_4 + \cdots \pm \varrho_{n+1} = \frac{1}{2}\pi,$

aber eben deshalb, und weil die Glieder dieser Reihe beständig abnehmen, hat man, wenn $2m < n$ übrigens eine gerade Zahl ist,

2) $\varrho_1 - \varrho_2 + \varrho_3 - \varrho_4 + \cdots - \varrho_{2m} + \varrho_{2m+1} > \frac{1}{2}\pi$

und

3) $\varrho_1 - \varrho_2 + \varrho_3 - \varrho_4 + \cdots - \varrho_{2m} < \frac{1}{2}\pi.$

Subtrahirt man nämlich von der Reihe zur Rechten in 2.) die positiven Glieder $(\varrho_{2m+2} - \varrho_{2m+3})$, $(\varrho_{2m+4} - \varrho_{2m+5})$, etc. etc., so erhält man erst (nach 1.) den Werth $\frac{1}{2}\pi$. — Addirt man dagegen zu der Reihe zur Rechten in 2.) noch die positiven Glieder $(\varrho_{2m+1} - \varrho_{2m+2})$, $(\varrho_{2m+3} - \varrho_{2m+4})$, etc. etc., so erhält man ebenfalls (nach 1.) erst den Werth $\frac{1}{2}\pi$.

D. Denken wir uns nun unter f_β eine solche Funktion von β, welche von $\beta = 0$ an bis zu $\beta = b$ hin, während b eine willkührliche positive Constante, aber nicht $> \frac{1}{2}\pi$ ist, immer einen positiven Werth hat, dabei aber nie wächst, deren Werthe also entweder immer kleiner werden oder doch dieselben bleiben, und stellen wir uns vor, daß das Integral

$$\int_{b \div 0} \frac{\sin \varkappa\beta}{\sin\beta} \cdot f_\beta \cdot d\beta = S$$

(nach §. 24. I.) ebenfalls in die Summe einzelner Theile zerlegt werde, die bezüglich von 0 bis $\frac{\pi}{\varkappa}$, von $\frac{\pi}{\varkappa}$ bis $\frac{2\pi}{\varkappa}$, ... zuletzt von $\frac{r\pi}{\varkappa}$ bis b genommen sind, wenn r so groß und positiv ganz gedacht ist, daß $\frac{(r+1)\pi}{\varkappa} \geqq b$ wird, — so sind auch diese Integrale, welche wir durch

$R_1, -R_2, R_3, -R_4, R_5, -R_6$, etc. etc.
bezeichnen wollen, abwechselnd positiv und negativ, so daß R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, etc. etc. lauter absolute Zahlen (d. h. nicht-negative) vorstellen. Denkt man sich nämlich

$$R_v = (-1)^{v-1} \int_{\frac{v\pi}{\varkappa} \div \frac{(v-1)\pi}{\varkappa}} \frac{\sin \varkappa\beta}{\sin \beta} \cdot f_\beta \cdot d\beta,$$

so ist R_v allemal positiv.

Man hat also

1) $$S = R_1 - R_2 + R_3 - R_4 + \cdots \pm R_{r+1}$$

und da die absoluten Zahlen $R_1, R_2, R_3, R_4, \cdots$ wiederum eine abnehmende Reihe bilden, so ist wiederum

2) $$S > R_1 - R_2 + R_3 - R_4 + \cdots - R_{2m}$$

3) $$S < R_1 - R_2 + R_3 - R_4 + \cdots - R_{2m} + R_{2m+1},$$

wenn nur 2m gerade und $< r$ ist.

Es ist nämlich (nach §. 24. V.) der Werth R_v allemal $= f_{\beta'} \cdot \varrho_v$, wenn $f_{\beta'}$ einen unbekannten Zwischen-Werth von f_β vorstellt, der zwischen dem größten $f_{(v-1)\pi:\varkappa}$ und kleinsten $f_{v\pi:\varkappa}$ von allen Werthen von f_β liegt, die sich von $\beta = \frac{(v-1)\pi}{\varkappa}$ an, bis zu $\beta = \frac{v\pi}{\varkappa}$ hin, für alle Werthe von β ergeben. Weil aber der Voraussetzung zu Folge, f_β nie größer wird (während β wächst) und dabei immer positiv bleibt, so folgt daraus: 1) daß R_v immer positiv ist, aber auch 2) daß $R_{v+1} < R_v$ ist; denn es ist aus demselben Grunde, aus welchem man $R_v = f_{\beta'} \cdot \varrho_v$ hat, auch $R_{v+1} = f_{\beta''} \cdot \varrho_{v+1}$, wo $f_{\beta''} \leqq f_{\beta'}$ ist, während man ohnedies $\varrho_{v+1} < \varrho_v$ hat.

E. Setzt man nun in der Ungleichung D. 2.) statt der addirten Glieder R_1, R_3, R_5, etc. kleinere oder gleiche Werthe, nämlich bezüglich $f_{\pi:\varkappa} \cdot \varrho_1$, $f_{3\pi:\varkappa} \cdot \varrho_3$, $f_{5\pi:\varkappa} \cdot \varrho_5$, etc. etc., und statt der subtrahirten Glieder $R_2, R_4, R_6, \cdots$ bezüglich größere (oder gleiche) Werthe, nämlich $f_{\pi:\varkappa} \cdot \varrho_2$, $f_{3\pi:\varkappa} \cdot \varrho_4$, $f_{5\pi:\varkappa} \cdot \varrho_6$, so bleibt offenbar dieselbe Ungleichung noch aufrecht, d. h. man hat noch

1) $$S > f_{\pi:\varkappa} \cdot (\varrho_1 - \varrho_2) + f_{3\pi:\varkappa} \cdot (\varrho_3 - \varrho_4) + \cdots + f_{(2m-1)\pi:\varkappa} \cdot (\varrho_{2m-1} - \varrho_{2m}).$$

Wendet man nun das umgekehrte Verfahren auf D. 3.) an, d. h. setzt man statt der addirten Glieder bezüglich größere, statt der subtrahirten Glieder aber bezüglich kleinere, so ergiebt sich noch

2) $S < f_0 \cdot \varrho_1 - f_{2\pi:\varkappa} \cdot (\varrho_2 - \varrho_3) - f_{4\pi:\varkappa} \cdot (\varrho_4 - \varrho_5) - \cdots - f_{2\pi m:\varkappa} \cdot (\varrho_{2m} - \varrho_{2m+1})$.

Weil aber in 1.) und in 2.) alle Glieder positiv sind, so bleiben diese beiden Ungleichheiten noch aufrecht, wenn man statt aller dieser Werthe von f, mit Ausnahme von f_0, einen und denselben Werth $f_{2m\pi:\varkappa}$ setzt (der entweder eben so groß oder kleiner ist, als jeder dieser Werthe). Man hat also

3) $S > (\varrho_1 - \varrho_2 + \varrho_3 - \varrho_4 + \cdots - \varrho_{2m}) \cdot f_{2m\pi:\varkappa}$,

4) $S < f_0 \cdot \varrho_1 - (\varrho_2 - \varrho_3 + \varrho_4 - \cdots + \varrho_{2m} - \varrho_{2m+1}) \cdot f_{2m\pi:\varkappa}$.

Weil jedoch nach C. 2.) der erste Faktor in 3.) zur Rechten $> \frac{1}{2}\pi - \varrho_{2m+1}$, dagegen der erste Faktor des subtrahirten Gliedes in 4.) zur Rechten $< \varrho_1 - \frac{1}{2}\pi$ ist, so folgt noch aus 3.) und 4.)

5) $S > \frac{1}{2}\pi \cdot f_{2m\pi:\varkappa} - \varrho_{2m+1} \cdot f_{2m\pi:\varkappa}$

6) $S < \frac{1}{2}\pi \cdot f_{2m\pi:\varkappa} + \varrho_1 \cdot (f_0 - f_{2m\pi:\varkappa})$.

F. Denkt man sich nun n unendlich groß, so ist $\varkappa = 2n+1$ ebenfalls unendlich groß, und auch r unendlich groß, weil r die größeste ganze Zahl ist, welche in $\frac{b}{\pi} \cdot \varkappa$ d. h. in $\frac{b}{\pi}(2n+1)$ steckt; also kann auch nun m unendlich groß werden, weil keine andere Bedingung für m obwaltat, als daß $2m < r$ seyn soll. Man denke sich aber m immer so, daß $\frac{2m}{\varkappa}$ d. h. $\frac{2m}{2n+1}$ für $n = \infty$ noch unendlich klein wird (man denke sich z. B. m von der Form $\sqrt{n}$, oder n von der Form m^2), so werden die für S (in D. 5. und 6.) gefundenen Grenzen nur unendlich wenig von einander verschieden seyn; und man hat dann $S = \frac{1}{2}\pi \cdot f_0$; d. h.

$$(\odot)\cdots \int_{b \div 0} \frac{sin(2n+1)\beta}{sin\,\beta} \cdot f_\beta \cdot d\beta = \tfrac{1}{2}\pi \cdot f_0 \quad (\text{für } n = \infty),$$

während b positiv, $\leqq \frac{1}{2}\pi$ und im Uebrigen eine beliebige constante Zahl ist.

Denn es ist auf der einen Seite (nach §. 24. N. 5.)

$$\varrho_{2m+1} = \frac{1}{\sin \beta'} \int_{\frac{(2m+1)\pi}{\varkappa}}^{\frac{(2m+2)\pi}{\varkappa}} \sin \varkappa\beta \cdot d\beta = \frac{2}{\varkappa} \cdot \frac{1}{\sin \beta'},$$

wenn $\frac{1}{\sin \beta'}$ ein unbekannter Werth von $\frac{1}{\sin \beta}$ ist, aber zwischen dem größten und kleinsten der Werthe liegt, die $\frac{1}{\sin \beta}$ annimmt, wenn statt β alle Werthe von $\frac{(2m+1)\pi}{\varkappa}$ an bis zu $\frac{(2m+2)\pi}{\varkappa}$ hin gesetzt werden. Also liegt ϱ_{2m+1} zwischen $\frac{2}{\varkappa} \cdot \frac{1}{\sin \frac{(2m+1)\pi}{\varkappa}}$ und $\frac{2}{\varkappa} \cdot \frac{1}{\sin \frac{(2m+2)\pi}{\varkappa}}$, d. h.

zwischen $\frac{2}{(2m+1)\pi} \cdot \frac{\left[\frac{(2m+1)\pi}{\varkappa}\right]}{\sin \frac{(2m+1)\pi}{\varkappa}}$ und $\frac{2}{(2m+2)\pi} \cdot \frac{\left[\frac{(2m+2)\pi}{\varkappa}\right]}{\sin \frac{(2m+2)\pi}{\varkappa}}$;

also wird

$$\varrho_{2m+1} = 0 \quad \text{für} \quad m = \infty \quad \text{d. h. für} \quad n = \infty;$$

folglich wird auch $\varrho_{2m+1} \cdot f_{2m\pi:\varkappa} = 0$.

Auf der andern Seite wird $\frac{2m\pi}{\varkappa} = 0$ für $n = \infty$, also $f_{2m\pi:\varkappa} = f_0$, während ϱ_1 für $n = \infty$ einen endlichen bestimmten Werth annimmt; denn es ist nach C. 2.) für $m = 1$, $\varrho_1 - \varrho_2 < \frac{1}{2}\pi$, also $\varrho_1 < \frac{1}{2}\pi + \varrho_2$, während nach den nächst vorhergehenden Zeilen (wenn 2 statt $2m+1$ gesetzt wird) ϱ_2 allemal zwischen

$$\frac{2}{2\pi} \cdot \frac{\left(\frac{2\pi}{\varkappa}\right)}{\sin \frac{2\pi}{\varkappa}} \quad \text{und} \quad \frac{2}{3\pi} \cdot \frac{\left(\frac{3\pi}{\varkappa}\right)}{\sin \frac{3\pi}{\varkappa}}$$

liegt; — also wird auch $\varrho_1 \cdot (f_{2m\pi:\varkappa} - f_0) = 0$.

G. Daraus folgt auch noch, daß wenn $a < b$ ist, übrigens positiv und beliebig constant, und wenn f_β zwischen $\beta = a$ und $\beta = b$ nie zunimmt, dann allemal für $n = \infty$ seyn wird

$$(\mathbb{C})\cdots \quad \int_{b\div a} \frac{sin(2n+1)\beta}{sin\,\beta}\cdot f_\beta\cdot d\beta = 0 \quad (\text{für } n=\infty),$$

wenn nur $b \overset{=}{<} \frac{1}{2}\pi$ ist.

Denn da man sich zwischen $\beta=0$ und $\beta=a$ die Funktion f_β noch so denken kann, daß sie von $\beta=0$ bis $\beta=b$ nie zunimmt, so hat man (nach F. ⊙.) dasselbe Integral $=\frac{1}{2}\pi\cdot f_o$, es mag solches zwischen $\beta=0$ und $\beta=a$, oder zwischen $\beta=0$ und $\beta=b$ genommen werden, während das letztere aus der Summe des ersteren und des zwischen $x=a$ und $x=b$ genommenen Integrals besteht (nach §. 24. I.).

II. Stehen aber diese Resultate ⊙.) und ℂ.) fest, wenn f_β positiv ist und (während β innerhalb seiner Grenzen wächst) nie zunimmt, so gelten dieselben auch noch, wenn die Werthe von f_β auch negativ werden, — und auch dann noch, wenn die Werthe von f_β immerfort, mit β zugleich größer werden, oder dieselben bleiben, und dabei positiv und auch negativ sind.

Denn, angenommen, daß f_β zwar nicht mit β wächst, aber doch negativ wird, so nehme man c constant und größer als der absolut größeste negative Werth von f_β, so ist $c-f_\beta$ immer positiv, und es gelten daher die Formeln ⊙.) und ℂ.), wenn $c-f_\beta$ statt f_β gesetzt wird. Dann aber zerlegt sich das Integral (in ⊙. oder ℂ. zur Linken) in die Differenz

$$\int c\cdot\frac{sin(2n+1)\beta}{sin\,\beta}\cdot d\beta - \int f_\beta\cdot\frac{sin(2n+1)\beta}{sin\,\beta}\cdot d\beta,$$

von welchem das erstere $=\frac{1}{2}\pi\cdot c$ wird für $n=\infty$ (nach ⊙.), oder $=0$ wird für $n=\infty$ (nach ℂ.), je nachdem die Grenzen des Integrals 0 und b, oder a und b sind; während das ganze Integral in denselben Fällen (nach ⊙. oder ℂ.), $=\frac{1}{2}\pi(c-f_o)$, oder $=0$ wird. Daraus ergeben sich aber wieder die Formeln ⊙.) und ℂ.) für das jetzige f_β.

Nimmt ferner f_β nie zu, so nimmt $-f_\beta$ nie ab, also gelten dann die Formeln ⊙.) und ℂ.) wenn man $-f_\beta$ statt f_β setzt. Dies giebt (nach ⊙. und ℂ.)

$$-\int f_\beta\cdot\frac{sin(2n+1)\beta}{sin\,\beta}\cdot d\beta = \frac{1}{2}\pi\cdot(-f_o), \text{ oder } = 0,$$

je nachdem die Grenzen des Integrals 0 und b, oder a und b sind. Dies ist aber wiederum die Gleichung ⊙.) oder ℂ.) für die jetzige Funktion f_β.

J. Es gelten endlich diese Formeln ⊙.) und ℂ.) auch, wenn f_β irgend eine beliebige stetige Funktion ist, welche zwischen den

den Grenz-Werthen 0 und b, oder a und b von β, beliebig oft vom Wachsen zum Abnehmen, oder vom Abnehmen zum Wachsen übergeht.

Dies folgt, wenn man (nach §. 24. I.) das Integral in so viel Theile zerlegt, als die Funktion vom Abnehmen zum Wachsen, oder vom Wachsen zum Abnehmen übergeht, so daß die Integrale nach und nach zwischen den Grenzen 0 oder a und ε_1, dann zwischen ε_1 und ε_2, hernach zwischen ε_2 und ε_3, u. s. w., zuletzt zwischen ε_ν und b genommen sind, wenn ε_1, ε_2, ε_3, $\cdots$ ε_ν die Werthe von β vorstellen, für welche f_β ein solches Maximum oder Minimum ist. Dann sind die Integrale alle (nach C. und H.) einzeln $=0$, bis auf das zwischen $\beta=0$ und $\beta=\varepsilon_1$ genommene, welches (nach ⊙. und H.) $=\frac{1}{2}\pi\cdot f_0$ ist.

K. Unterbricht aber f_β für $\beta=\varepsilon$ (wo ε zwischen 0 und b liegt) seine Stetigkeit und zwar so daß f_β als Endwerth der einen Funktion einen besonderen Werth hat, den wir durch $f_{\varepsilon-0}$ bezeichnen wollen, und als Anfangs-Werth der andern Funktion (die von $\beta=\varepsilon$ an unter f_β verstanden werden soll) einen anderen Werth hat, den wir durch $f_{\varepsilon+0}$ bezeichnen, und der von $f_{\varepsilon-0}$ verschieden ist *), so gelten die Sätze ⊙.) und C.) deshalb noch immer, weil nun das Integral wiederum in zwei zerlegt werden kann, von denen nur das eine, welches von 0 bis ε sich erstreckt, $=\frac{1}{2}\pi\cdot f_0$ ist, nach ⊙.) und J.); das andere aber $=0$ ist, nach C.) und J.). — Und wenn die Stetigkeit innerhalb der Grenz-Werthe von β beliebig oft unterbrochen wird, so darf man nur das Integral (nach §. 24. I.) in eben so viele Theile zertheilt sich denken, um die letzteren alle $=0$, das erstere aber $=\frac{1}{2}\pi\cdot f_0$ zu haben.

L. Also gelten die Formeln ⊙.) und C.) für jede beliebige stetige oder nicht stetige Funktion, welche statt f_β gesetzt werden mag.

In dem Ausdrucke T in A.), dessen Werth für $n=\infty$ wir eigentlich aufsuchen, nämlich in

---

*) Nur im Falle der Stetigkeit ist also $f_{\varepsilon-0}=f_{\varepsilon+0}=f_\varepsilon$.

1) $$\pi \cdot T = \int_{x \div (-x)} u_z \cdot \frac{\sin (n+1) \cdot \frac{1}{2}(z-x)}{2 \sin \frac{1}{2}(z-x)} \cdot dz,$$

ist aber u_z beliebig gedacht, stetig oder nicht stetig.

Dieses Integral T läßt sich nun zunächst (nach §. 24. I.) in zwei Integrale zerlegen, von denen das eine von $-\pi$ bis x, das andere von x bis $+\pi$ sich erstreckt. Nach §. 22. Anmerkg.) kann man aber diese letzteren beiden sogleich umformen, so daß man erhält

2) $$\pi \cdot T = \int_{0 \div -(\pi+x)} u_{x+z} \cdot \frac{\sin (2n+1) \cdot \frac{1}{2} z}{2 \sin \frac{1}{2} z} \cdot dz$$

$$+ \int_{(\pi-x) \div 0} u_{x+z} \cdot \frac{\sin (2n+1) \cdot \frac{1}{2} z}{2 \sin \frac{1}{2} z} \cdot dz,$$

oder, wenn man $\frac{1}{2}z = \beta$, also $dz = 2d\beta$ setzt, und wenn man ferner auf das erstere dieser Integrale die Formel $\int_{b \div a} f \cdot dx = -\int_{a \div b} f \cdot dx$ anwendet,

3) $$\pi \cdot T = \int_{\frac{1}{2}(\pi+x) \div 0} u_{x-2\beta} \cdot \frac{\sin (2n+1)\beta}{\sin \beta} \cdot d\beta$$

$$+ \int_{\frac{1}{2}(\pi-x) \div 0} u_{x+2\beta} \cdot \frac{\sin (2n+1)\beta}{\sin \beta} \cdot d\beta.$$

Betrachten wir zunächst das zweite dieser Integrale. Da x zwischen $-\pi$ und $+\pi$ liegt, so liegt $\frac{1}{2}(\pi - x)$ zwischen π und 0. Für $\frac{1}{2}(\pi - x) = 0$, d. h. für $x = \pi$ ist solches Integral, $= 0$. — Ist x Null oder positiv, aber zwischen 0 und π, so ist $\frac{1}{2}(\pi - x) < \frac{1}{2}\pi$; also ist (nach ⊙. J. und K.) dasselbe zweite Integral $= \frac{1}{2}\pi \cdot u_{x+0}$, wenn $n = \infty$ gedacht wird. — Ist aber x negativ, zwischen 0 und $-\pi$, also $\frac{1}{2}(\pi - x) > \frac{1}{2}\pi$, so zerlege man dasselbe zweite Integral (nach §. 24. I.) in die Summe zweier Integrale, von denen das eine zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ liegt, also für $n = \infty$ (nach ⊙. und J.) den Werth $\frac{1}{2}\pi \cdot u_{x+0}$ annimmt, das andere dagegen

$$= \int_{\frac{1}{2}(\pi-x) \div \frac{1}{2}\pi} u_{x+2\beta} \cdot \frac{\sin (2n+1)\beta}{\sin \beta} \cdot d\beta$$ ist. Setzt man in diesem letzteren $\pi - \beta = \gamma$, und wendet man noch den Satz an,

nach welchem $\int_{b \div -a} f \cdot dx = -\int_{a \div -b} f \cdot dx$ ist, so erhält man selbiges

$$= \int_{\frac{1}{2}\pi \div \frac{1}{2}(\pi+x)} u_{x+2\pi-2\gamma} \cdot \frac{sin\,(2n+1)(\pi-\gamma)}{sin\,(\pi-\gamma)} \cdot d\gamma.$$

Weil aber $sin\,(\pi-\gamma) = sin\,\gamma$ und, insofern n eine ganze Zahl ist, auch $sin\,(2n+1)(\pi-\gamma) = sin\,(2n+1)\gamma$ ist, so wird dieses letztere Integral

$$= \int_{\frac{1}{2}\pi \div \frac{1}{2}(\pi+x)} u_{x+2\pi-2\gamma} \cdot \frac{sin\,(2n+1)\gamma}{sin\,\gamma} \cdot d\gamma;$$

und solches wird nun wiederum für $n = \infty$ der Null gleich (nach C. J. und K.). Hiervon ist ausgenommen der Fall, wo $x = -\pi$ selbst ist, so daß die erstere Grenze $\frac{1}{2}(\pi+x), = 0$ wird, weil für diesen Fall das Integral (nach C. J. und K.) $= \frac{1}{2}\pi \cdot u_{x+2\pi-0}$ d. h. $= \frac{1}{2}\pi \cdot u_{\pi-0}$ wird.

Es ist also für alle Werthe von x, die zwischen $-\pi$ und $+\pi$ liegen, und für $n = \infty$, das zweite Integral in 3.) $= \frac{1}{2}\pi \cdot u_{x+0}$; die beiden Grenzen $x = -\pi$ und $x = +\pi$ ausgenommen. Für $x = -\pi$ wird nämlich dasselbe $= \frac{1}{2}\pi \cdot u_{\pi+0} + \frac{1}{2}\pi \cdot u_{\pi-0}$ und für $x = +\pi$ wird dasselbe $= 0$, immer unter der Voraussetzung, daß $n = \infty$ ist.

Betrachtet man ganz auf dieselbe Weise das erstere der Integrale in 3.), so findet man zuletzt, daß solches für $n = \infty$ im Allgemeinen $= \frac{1}{2}\pi \cdot u_{x-0}$ wird, dagegen

für $x = -\pi$ in 0

und für $x = +\pi$ in $\frac{1}{2}\pi \cdot u_{\pi-0} + \frac{1}{2}\pi \cdot u_{-\pi+0}$

übergeht.

M. Folglich findet man aus 3.) für alle Werthe von x, die zwischen $-\pi$ und $+\pi$ liegen, wenn $n = \infty$ gedacht wird,

$$T = \frac{1}{2}(u_{x-0} + u_{x+0}).$$

Für $x = -\pi$ und auch für $x = +\pi$ wird dagegen, immer unter der Voraussetzung, daß $n = \infty$ ist,

$$T = \frac{1}{2}(u_{\pi-0} + u_{-\pi+0}).$$

Man sieht daraus:

1) Ist u_x bei einem bestimmten Werthe von x stetig, also $u_{x-0} = u_{x+0} = u_x$, so geht T für $n = \infty$ genau in u_x über.

2) Für die Werthe von x dagegen, wo u_x discontinuirlich ist, und wo ein End-Werth u_{x-0} der erstern Form von u_x, und ein Anfangs-Werth u_{x+0} der andern Form von u_x existirt, wird T für $n = \infty$ die halbe Summe dieser beiden Werthe von u_x, die zu diesem bestimmten Werthe von x gehören.

3) An den Grenzen der Werthe von x, d. h. für $x = -\pi$ und für $x = +\pi$, wird T für $n = \infty$ nur dann $= u_x$ d. h. $= u_{-\pi}$, oder $= u_{+\pi}$, wenn die Funktion u_x die Eigenschaft hat, daß sie für $x = -\pi$ und für $x = +\pi$ einen und denselben Werth annimmt.

Also ist (nach A.) die Convergenz der Reihe III.) des §. 147.), so wie zugleich die Richtigkeit dieser Formel erwiesen, mit Berücksichtigung der gefundenen Ausnahmen an den Grenzen, und der Modifikation, welche für den Werth von x eintritt, an welchem die Funktion u_x discontinuirlich ist, und selbst zwei verschiedene Werthe hat; in welchem Falle die Reihe III.) des §. 147.) die halbe Summe dieser letztern liefert.

§. 149.

I. Denkt man sich nun eine beliebige Funktion u_x von $x = 0$ an bis zu $x = \pi$ hin, dann aber von $x = 0$ an bis $x = -\pi$ hin, eine andere, ebenfalls durch u bezeichnete Funktion, so daß für einerlei Werth von x, $u_{-x} = u_x$ wird, so ist für $u = 0$, doch noch $u_{x-0} = u_{x+0}$, obgleich (für $x = 0$) im Allgemeinen die Stetigkeit unterbrochen seyn wird. Unter der jetzigen Voraussetzung wird aber ferner

$$u_x \cdot cos\, mx \cdot dx$$

für alle negativen Werthe von x bezüglich dieselben Werthe annehmen, wie für die gleichgroßen und positiven Werthe von x, während

$$u_x \cdot \sin mx \cdot dx$$

für die negativen Werthe von x zwar der Größe nach dieselben Werthe annehmen wird, wie für die gleich großen und positiven Werthe von x, jedoch allemal mit dem entgegengesetzten $\pm$ Zeichen. Deshalb ist jetzt (nach §. 24. II. und III.)

$$B_m = \frac{2}{\pi} \int_{\pi+0} u_x \cdot \cos mx \cdot dx \quad \text{und} \quad A_m = 0.$$

— Also geht aus III.) des §. 147.) wiederum die II.) des §. 147.) hervor, nur daß wir jetzt wissen, daß dieselbe auch noch für $x = 0$ und für $x = \pi$ gilt (weil $u_{-\pi} = u_{+\pi}$ gedacht worden ist) und für die Werthe von x, für welche u_x zwei Werthe u_{x-0} und u_{x+0} haben sollte, allemal noch richtig bleibt, wenn links unter u_x die halbe Summe dieser beiden Werthe verstanden wird. Und weil die Funktion u_x von $x = 0$ bis $x = \pi$ ganz beliebig gedacht worden ist, so gilt also die Gleichung II.) des §. 147.) für $x = 0$, für $x = \pi$ und für alle Werthe von x, welche zwischen 0 und π liegen, wenn auch u_x eine ganz beliebige Funktion von x vorstellt; nur für diejenigen Werthe von x, wo die Stetigkeit von u_x unterbrochen seyn sollte und wo zwei Werthe u_{x-0} und u_{x+0} existiren, muß links die halbe Summe dieser beiden Werthe gesetzt werden, wenn die Gleichung richtig verbleiben soll.

II. Denkt man sich wiederum u_x von $x = 0$ an bis $x = \pi$ ganz beliebig, dagegen von $x = 0$ an bis zu $x = -\pi$ hin so fortgesetzt, daß $u_{-x} = -u_x$ ist, so hat man $B_m = 0$ und $A_m = \frac{2}{\pi} \int_{\pi+0} u_x \cdot \sin mx \cdot dx$; und die III. des §. 147.) geht nun wieder in die I.) desselben §. 147.) über, so daß letztere für jedes u_x gilt, und für jedes x zwischen 0 und π; — aber im Allgemeinen nicht gilt für $x = 0$ und auch nicht für $x = \pi$. — An den Stellen endlich, wo u_x (zwischen $x = 0$ und $x = \pi$) ihre Stetigkeit verlieren sollte und wo zwei Werthe u_{x-0} und u_{x+0} von u_x existiren, da gilt sie nur, wenn zur

Linken unter u_x die halbe Summe dieser beiden Werthe verstanden wird.

§. 150.

Will man Reihen haben, die nach Sinus und Kosinus der vielfachen Bogen fortlaufen, welche aber eine Funktion u_x ausdrücken von $x = -a$ an bis zu $x = +a$ hin, so darf man nur in der III.) des §. 147.) einen neuen Veränderlichen y statt x einführen, so daß $y = \frac{ax}{\pi}$, oder $x = \frac{\pi y}{a}$ und $dx = \frac{\pi}{a} \cdot dy$ wird. Man erhält dann aus §. 147. III.) sogleich (nach §. 22. III.)

$$u_{\pi y : a} = \tfrac{1}{2}B_0 + B_1 \cdot \cos\frac{\pi y}{a} + B_2 \cdot \cos\frac{2\pi y}{a} + B_3 \cdot \cos\frac{3\pi y}{a} + \cdots$$
$$+ A_1 \cdot \sin\frac{\pi y}{a} + A_2 \cdot \sin\frac{2\pi y}{a} + A_3 \cdot \sin\frac{3\pi y}{a} + \cdots,$$

während

$$B_m = \frac{1}{a}\int_{a \div (-a)} u_{\pi y : a} \cdot \cos\frac{m\pi y}{a} \cdot dy,$$

und

$$A_m = \frac{1}{a}\int_{a \div (-a)} u_{\pi y : a} \cdot \sin\frac{m\pi y}{a} \cdot dy$$

ist; und diese Gleichung gilt, zwischen den durch $\frac{\pi y}{a} = -\pi$ und $\frac{\pi y}{a} = +\pi$ gegebenen Grenz-Werthen von y, d. h. von $y = -a$ bis zu $y = +a$ hin.

Weil aber u_x jede beliebige Funktion von x gewesen ist, so ist auch $u_{xy:a}$ jede beliebige Funktion von y, so daß man u_y selbst dafür setzen kann. Dies giebt aber, wenn man wieder x statt y schreibt:

$$\text{V.}\begin{cases} u_x = \frac{1}{2}B_0 + B_1 \cdot cos\frac{\pi x}{a} + B_2 \cdot cos\frac{2\pi x}{a} + B_3 \cdot cos\frac{3\pi x}{a} + \cdots \\ \qquad + A_1 \cdot sin\frac{\pi x}{a} + A_2 \cdot sin\frac{2\pi x}{a} + A_3 \cdot sin\frac{3\pi x}{a} + \cdots, \\ \text{wenn} \quad B_m = \frac{1}{a}\int_{a \div (-a)} u_x \cdot cos\frac{m\pi x}{a} \cdot dx \\ \text{und} \quad A_m = \frac{1}{a}\int_{a \div (-a)} u_x \cdot sin\frac{m\pi x}{a} \cdot dx \quad \text{ist;} \end{cases}$$

und diese Formel ist gültig von $x = -a$ bis zu $x = +a$ hin. — An den Grenzen selbst, nämlich für $x = -a$ und für $x = +a$ giebt die Reihe zur Rechten jedoch nicht u_{-a} oder u_{+a}, sondern jedesmal $\frac{1}{2}u_{+a} + \frac{1}{2}u_{-a}$. Und an den Stellen, wo, wegen Unterbrechung der Stetigkeit, u_x zwei Werthe hat, u_{x-0} und u_{x+0}, da giebt die Reihe zur Rechten allemal die halbe Summe dieser beiden Werthe.

Aus dieser V.) folgt nun aber noch (nach §. 149.)

$$\text{VI.}\begin{cases} u_x = \frac{1}{2}B_0 + B_1 \cdot cos\frac{\pi x}{a} + B_2 \cdot cos\frac{2\pi x}{a} + B_3 \cdot cos\frac{3\pi x}{a} + \cdots \\ \text{wenn} \quad B_m = \frac{2}{a}\int_{a \div 0} u_x \cdot cos\frac{m\pi x}{a} \cdot dx \quad \text{ist;} \end{cases}$$

und diese Formel gilt von $x = 0$ inkl. an, bis zu $x = a$ inkl. hin. — Ferner noch

$$\text{VII.}\begin{cases} u_x = A_1 \cdot sin\frac{\pi x}{a} + A_2 \cdot sin\frac{2\pi x}{a} + A_3 \cdot sin\frac{3\pi x}{a} + \cdots \\ \text{wenn} \quad A_m = \frac{2}{a}\int_{a+0} u_x \cdot sin\frac{m\pi x}{a} \cdot dx \quad \text{ist;} \end{cases}$$

und diese Formel gilt von $x = 0$ exkl. an, bis zu $x = a$ exkl. hin.

§. 151.

Diese Reihen (I.—III. und V.—VII.) werden die Fourier'schen Reihen genannt, weil Fourier zuerst ihre hohe Wichtigkeit in den Anwendungen der Mathematik auf Physik geltend gemacht und ihre Natur näher kennen gelehrt hat. Man kann

sie noch mannigfach umformen, und wir wollen hier noch einige dieser Umformungen mittheilen.

Setzt man z. B. 2a statt a in den Formeln VI.) und VII.), dann f_x statt u_x, hernach $x = z + a$, also $dx = dz$, zuletzt aber statt f_{z+a} wieder u_z, so erhält man sogleich, wenn man noch lieber x statt z schreibt

$$\text{VIII.}\quad \begin{cases} u_x = \frac{1}{2}B_0 + B_1 \cdot \cos\frac{\pi(x+a)}{2a} + B_2 \cdot \cos\frac{2\pi(x+a)}{2a} \\ \qquad\qquad + B_3 \cdot \cos\frac{3\pi(x+a)}{2a} + \cdots \\ \text{wenn} \quad B_m = \frac{1}{a}\int_{a\div(-a)} u_x \cdot \cos\frac{m\pi(x+a)}{2a} \cdot dx \quad \text{ist;} \end{cases}$$

und diese Formel ist gültig von $x = -a$ inkl. an bis zu $x = +a$ inkl. hin; — ferner

$$\text{IX.}\quad \begin{cases} u_x = A_1 \cdot \sin\frac{\pi(x+a)}{2a} + A_2 \cdot \sin\frac{2\pi(x+a)}{2a} \\ \qquad\qquad + A_3 \cdot \sin\frac{3\pi(x+a)}{2a} + \cdots \\ \text{wenn} \quad A_m = \frac{1}{a}\int_{a\div(-a)} u_x \cdot \sin\frac{m\pi(x+a)}{2a} \cdot dx \quad \text{ist;} \end{cases}$$

und diese Formel ist gültig von $x = -a$ exkl. an bis zu $x = +a$ exkl. hin.

Weil aber

$$\cos\frac{2\mu\pi(x+a)}{2a} = \cos\left(\frac{\mu\pi x}{a} + \mu\pi\right) = (-1)^\mu \cdot \cos\frac{\mu\pi x}{a}$$

$$\sin\frac{2\mu\pi(x+a)}{2a} = \sin\left(\frac{\mu\pi x}{a} + \mu\pi\right) = (-1)^\mu \cdot \sin\frac{\mu\pi x}{a},$$

und

$$\cos\frac{(2\mu+1)\pi(x+a)}{2a} = (-1)^{\mu+1}\sin\frac{(2\mu+1)\pi x}{2a}$$

$$\sin\frac{(2\mu+1)\pi(x+a)}{2a} = (-1)^\mu \cdot \cos\frac{(2\mu+1)\pi x}{2a}$$

ist, so erhält man noch, wenn von den vorliegenden Reihen

VIII.) und IX.) die geraden Glieder von den ungeraden abgesondert werden:

$$\text{X.}\begin{cases} u_x = \frac{1}{2}B_0 + B_2\cdot cos\frac{\pi x}{a} + B_4\cdot cos\frac{2\pi x}{a} + B_6\cdot cos\frac{3\pi x}{a} + \cdots \\ \qquad + B_1\cdot sin\frac{\pi x}{2a} + B_3\cdot sin\frac{3\pi x}{2a} + B_5\cdot sin\frac{5\pi x}{2a} + \cdots \\ \text{wenn} \quad B_{2\mu} = \frac{1}{a}\int_{a\div(-a)} u_x\cdot cos\frac{\mu\pi x}{a}\cdot dx \\ \text{und} \quad B_{2\mu+1} = \frac{1}{a}\int_{a\div(-a)} u_x\cdot sin\frac{(2\mu+1)\pi x}{2a}\cdot dx \quad \text{ist;} \end{cases}$$

und diese Formel gilt von $x = -a$ an inkl. bis zu $x = +a$ inkl. hin; ferner

$$\text{XI.}\begin{cases} u_x = A_2\cdot sin\frac{\pi x}{a} + A_4\cdot sin\frac{2\pi x}{a} + A_6\cdot sin\frac{3\pi x}{a} + \cdots \\ \qquad + A_1\cdot cos\frac{\pi x}{2a} + A_3\cdot cos\frac{3\pi x}{2a} + A_5\cdot cos\frac{5\pi x}{2a} + \cdots \\ \text{wenn} \quad A_{2\mu} = \frac{1}{a}\int_{a\div(-a)} u_x\cdot sin\frac{\mu\pi x}{a}\cdot dx \\ \text{und} \quad A_{2\mu+1} = \frac{1}{a}\int_{a\div(-a)} u_x\cdot cos\frac{(2\mu+1)\pi x}{2a}\cdot dx \quad \text{ist;} \end{cases}$$

welche Formel gilt von $x = -a$ exkl. an bis zu $x = +a$ exkl. hin.

Anmerkung. Wir dürfen uns jedoch hier in weiteres Detail nicht einlassen. Wer von diesem neuen Gebiete der Analysis noch mehr kennen lernen will, und besonders die fruchtbaren Anwendungen dieser Reihen, den verweisen wir nicht bloß auf des Verfassers „Lehrbuch der Mechanik" 2ter Th. Anhang. Berlin 1837, und 3ter Theil Kap. XV., sondern in's Besondere auf die „théorie de la chaleur par Fourier"; à Paris 1822. (worin Fourier zuerst seine wichtigen Untersuchungen und Resultate umfangreicher mitgetheilt hat), so wie noch auf die „théorie mathematique de la chaleur" par Poisson; à Paris 1835.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Berlin, gedruckt bei Trowitzsch und Sohn.

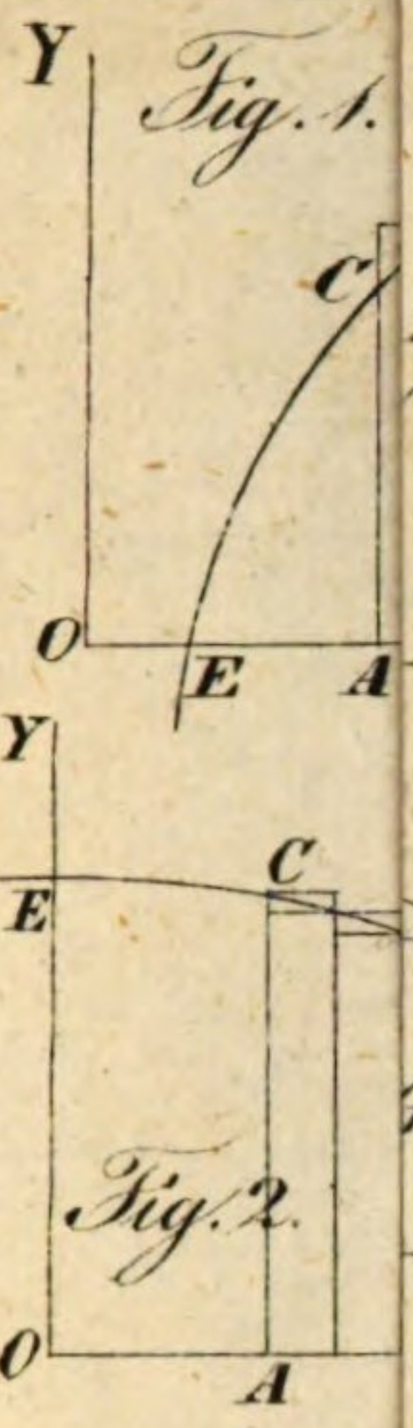


Fig. 1.

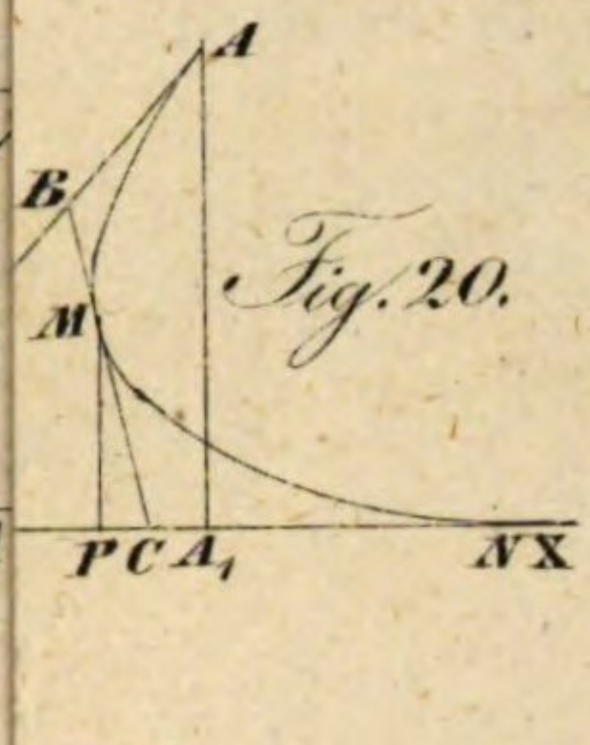


Fig. 20.

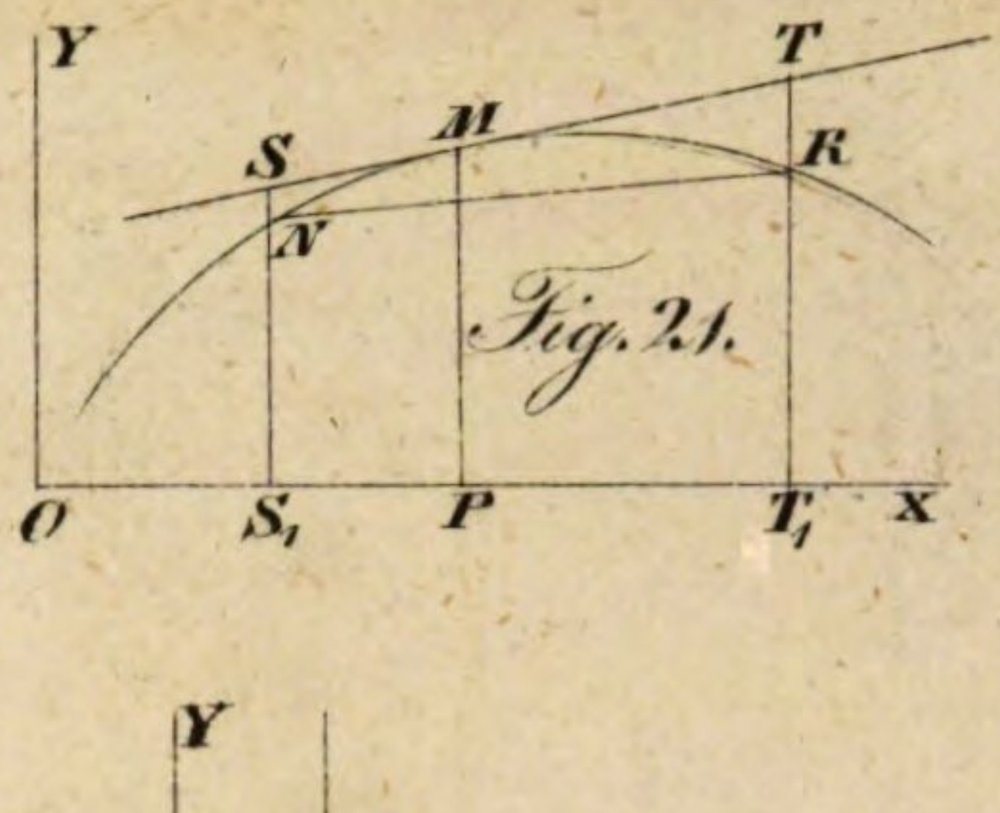


Fig. 21.

Fig. 2.

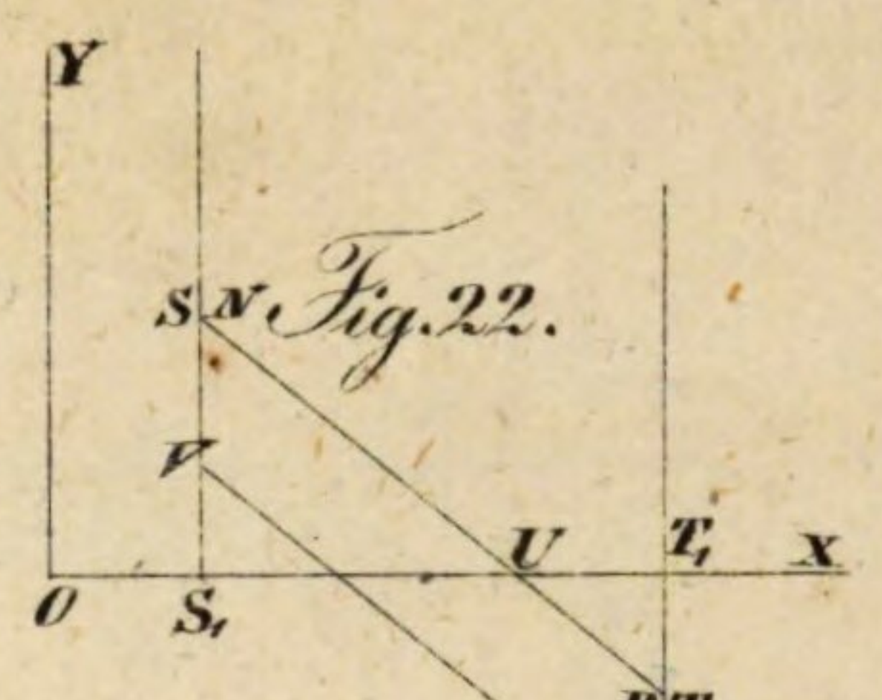
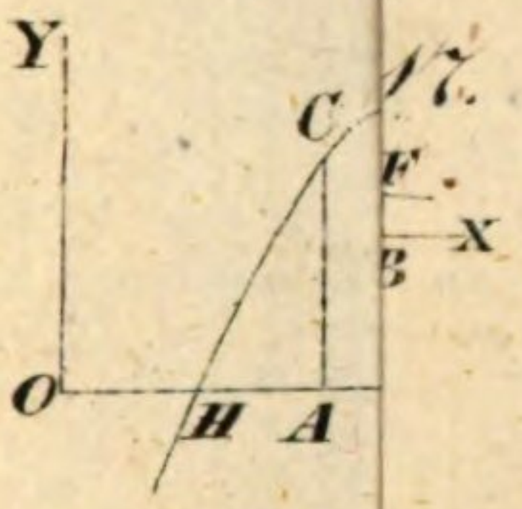


Fig. 22.



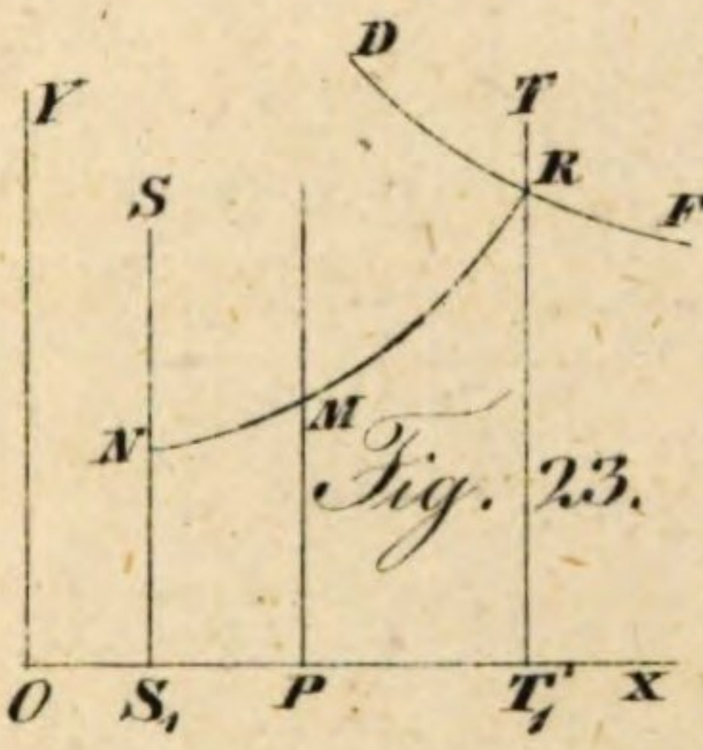


Fig. 23.

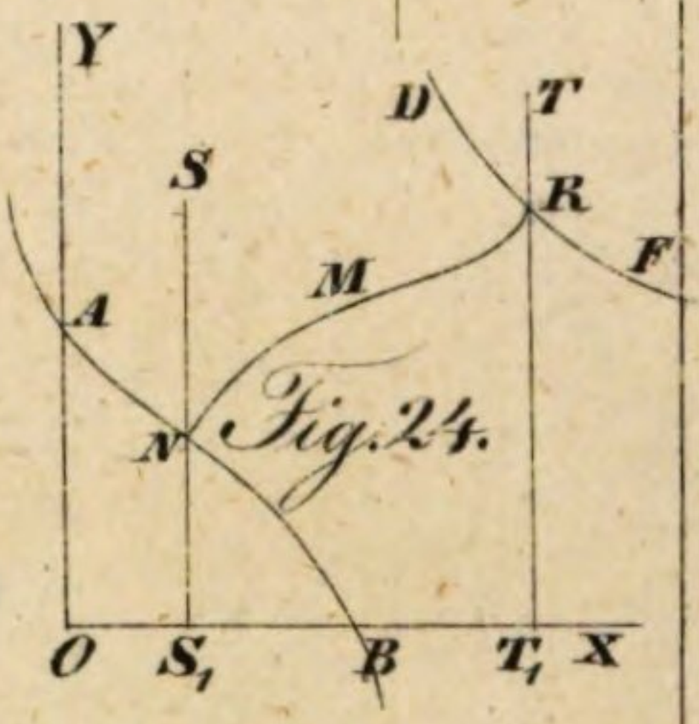
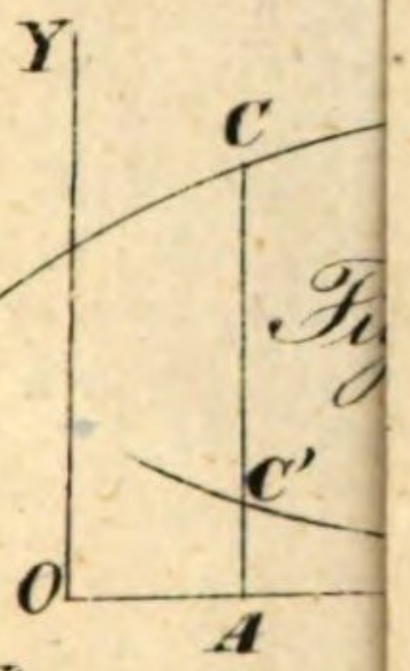


Fig. 24.



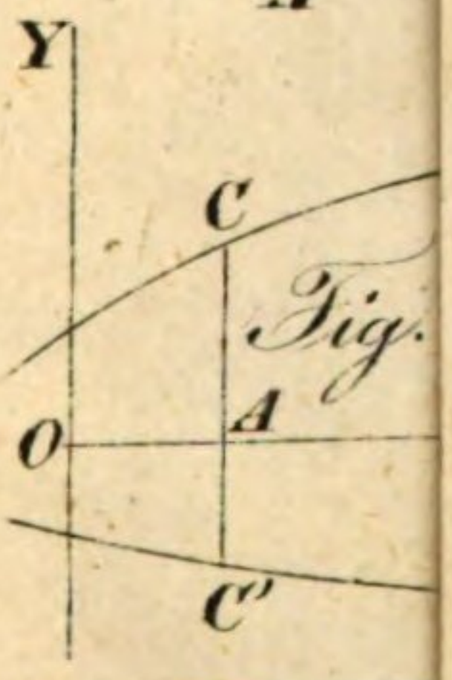


Fig.

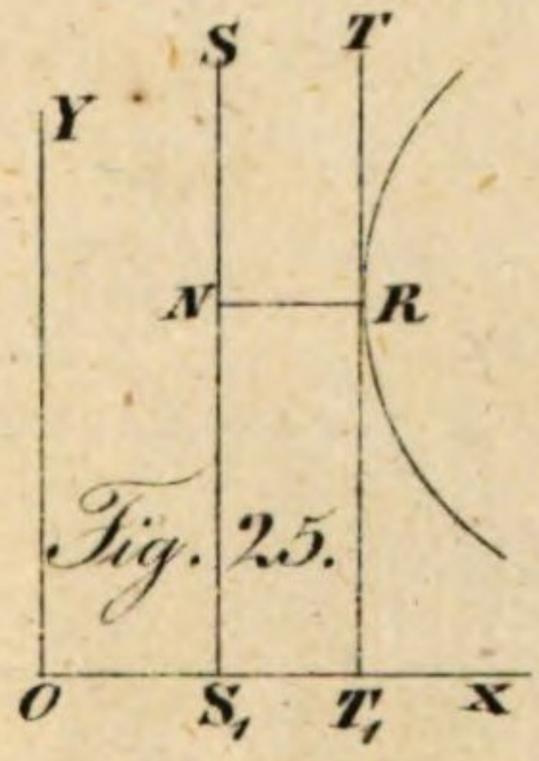


Fig. 25.

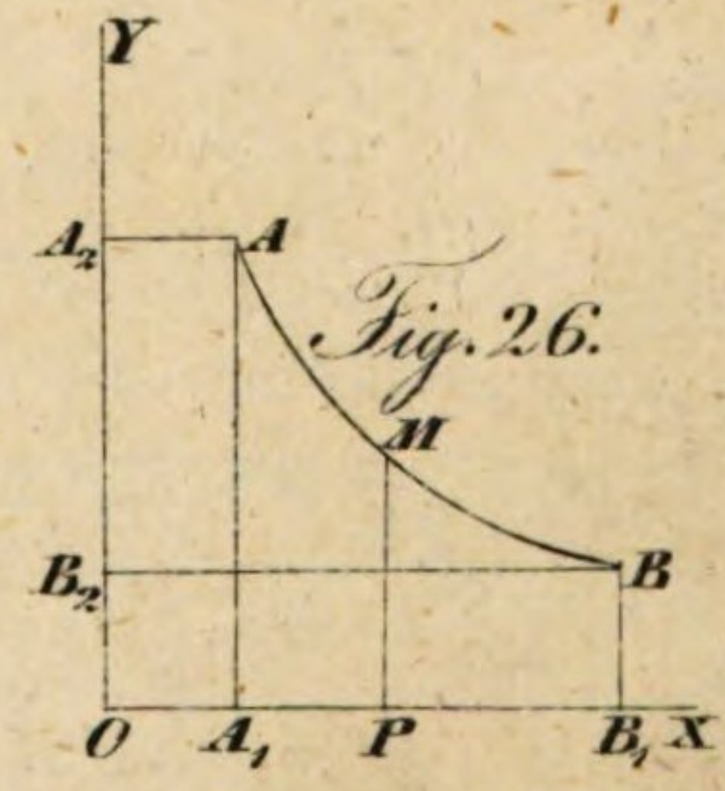


Fig. 26.

Werner

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Ohm, Martin,

Lehrbuch der gesammten höhern Mathematik in zwei Bänden ; zum Gebrauche fü
r die oberen Klassen der Gymnasien und anderen höheren Lehr-Anstalten, so
wie zum Selbstunterrichte bearbeitet und mit vielen Uebungs-Beispielen
versehen
Bd.: 2

Leipzig 1839

Math.p. 382 fl-2
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082507-1